

**$\mu$ -BULLES ET VARIÉTÉS À COURBURE SCALAIRE  
STRICTEMENT POSITIVE EN DIMENSIONS 4 ET 5  
[d’après O. Chodosh, C. Li et Y. Liokumovich]**

par **Laurent Bessières**

## INTRODUCTION

La question étudiée par Chodosh et Li (2023a) et Chodosh, Li et Liokumovich (2023) dans les travaux présentés ici est :

Quelles variétés admettent une métrique riemannienne complète de courbure scalaire strictement positive ?

Par commodité nous appellerons PSC (pour Positive Scalar Curvature) une telle métrique et nous dirons qu’une variété  $M$  est PSC si elle admet une métrique PSC. Sauf mention contraire, nous ne considérerons que des variétés fermées<sup>(1)</sup> orientables. La courbure scalaire est le plus faible des invariants de courbure, c’est la fonction  $R : M \rightarrow \mathbf{R}$  définie comme somme des courbures sectionnelles :  $R(x) = \sum_{i \neq j} K(e_i, e_j)$  (pour  $(e_i)$  une base orthonormée de  $T_x M$ ). Elle ne renseigne que sur le volume infinitésimal :

$$\text{vol}(B_r(x)) = c_n r^n \left( 1 - \frac{R(x)}{6(n+2)} r^2 + o(r^2) \right).$$

En dimension 2,  $R = 2K$  et  $K$  est la courbure de Gauss, la formule de Gauss–Bonnet montre que  $\mathbf{S}^2$  est la seule variété fermée PSC. Mais dès la dimension 3, il est beaucoup plus difficile de les classifier. Il a fallu attendre les travaux de Perelman sur le flot de Ricci, après les grandes avancées de Schoen et Yau et de Gromov et Lawson dans les années 1980 : ce sont les sommes connexes d’un nombre fini de  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$  et de quotients  $\mathbf{S}^3/\Gamma_i$  où les sous-groupes  $\Gamma_i \subset \mathbf{SO}(4)$  sont finis et agissent librement. Il a été facile de montrer que de telles sommes connexes sont PSC : Schoen et Yau (1979b, Corollaire 3) et Gromov et Lawson (1980, Théorème A) ont montré comment réaliser géométriquement une somme connexe de variétés riemanniennes PSC pour obtenir une variété riemannienne PSC (en dimension  $n \geq 3$ ). Dans l’autre direction, on peut utiliser les travaux de Perelman de deux manières. Une preuve utilise seulement le flot de Ricci avec chirurgie : partant d’une métrique initiale PSC, le flot décompose en temps fini la variété en somme connexe de  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$  et de quotients  $\mathbf{S}^3/\Gamma$ . L’autre preuve complète

---

1. Une variété est fermée si elle est compacte sans bord.

une classification partielle antérieure. Rappelons qu’une variété fermée orientable de dimension 3 admet une décomposition en somme connexe de variétés premières <sup>(2)</sup>

$$M = P_1 \# \cdots \# P_k \# (\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1) \# \cdots \# (\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1) \# K_1 \# \cdots \# K_m$$

où les  $P_i$  sont de groupe fondamental fini et les  $K_j$  sont *asphériques*, *i.e.* de groupes d’homotopie  $\pi_i(K_j) = 0$  pour tout  $i > 1$  (de manière équivalente,  $K_j$  a un revêtement universel  $\widetilde{K}_j$  contractile <sup>(3)</sup>). Gromov et Lawson (1983, Théorème E) avaient montré qu’une variété PSC n’a pas de facteur asphérique dans sa décomposition. En particulier une variété asphérique n’est pas PSC. Il restait à prouver que  $P_i = S^3/\Gamma_i$  où  $\Gamma_i \subset SO(4)$ , ce qui est la conjecture d’elliptisation, résolue par Perelman. Comme exemple de variété asphérique, on peut penser aux variétés de courbure sectionnelle négative ou nulle, puisque leur revêtement universel est difféomorphe à  $\mathbf{R}^n$  par le théorème de Cartan-Hadamard.

Un mot très bref sur les variétés de dimension 3 non compactes PSC : leur classification reste une question ouverte. Une difficulté supplémentaire vient de la topologie : il existe une infinité de variétés de dimension 3 contractiles non homéomorphes à  $\mathbf{R}^3$  (les variétés de type Whitehead). Il est conjecturé que  $\mathbf{R}^3$  est la seule variété contractile PSC. Il y a eu récemment des avancées prometteuses. Il a été prouvé par exemple qu’une large famille de variétés de type Whitehead n’est pas PSC (voir Wang, 2023).

Les travaux de Chodosh–Li et Chodosh–Li–Liokumovich présentés ici concernent plutôt les variétés fermées en dimension supérieure. Une conjecture majeure est :

CONJECTURE 0.1 (Conjecture du  $K(\pi, 1)$ ). — *Aucune variété fermée asphérique de dimension  $n \geq 3$  n’admet de métrique PSC.*

Cette conjecture est soutenue par le fait que les tores  $\mathbf{T}^n$ ,  $n \geq 3$ , ne sont pas PSC (résolution de la conjecture de Geroch par Schoen et Yau, 1979b,a, 2022) ni plus généralement les variétés fermées de courbure sectionnelle négative ou nulle (Gromov et Lawson, 1983, Corollaire C). Le résultat principal de Chodosh et Li (2023a, Théorème 1) est la preuve de cette conjecture en dimensions 4 et 5 (la conjecture a été prouvée indépendamment par Gromov (2020) en dimension 5) :

THÉORÈME 0.2. — *Pour  $n \in \{4, 5\}$ , une variété fermée asphérique  $M$  de dimension  $n$  n’est pas PSC. De plus, une métrique riemannienne sur  $M$  de courbure scalaire positive ou nulle, si elle existe, est plate <sup>(4)</sup>.*

Ils obtiennent également la généralisation suivante de la conjecture de Geroch (Chodosh et Li, 2023a, Théorème 2) :

2.  $M$  est première si  $M = M_1 \# M_2$  implique  $M_1 \approx \mathbf{S}^3$  ou  $M_2 \approx \mathbf{S}^3$ .

3. On dit également que  $K_j$  est un  $K(\pi, 1)$ .

4. C’est-à-dire de courbures sectionnelles nulles. Cela équivaut à être localement isométrique à  $\mathbf{R}^n$ .

**THÉORÈME 0.3.** — *Soit  $n \leq 7$ . Pour toute variété  $X$  de dimension  $n$ , la somme connexe  $\mathbf{T}^n \# X$  n'a pas de métrique complète PSC. De plus, une métrique riemannienne complète de courbure scalaire positive ou nulle sur  $\mathbf{T}^n \# X$ , si elle existe, est plate.*

Ce résultat était déjà bien connu pour  $X$  compacte. Dans le sens d'une classification des variétés PSC, Chodosh, Li et Liokumovich (2023, Théorème 1) démontrent :

**THÉORÈME 0.4.** — *Soit  $N$  une variété fermée de dimension  $n$  telle que*

- $n = 4$  et  $\pi_2(N) = 0$ , ou
- $n = 5$  et  $\pi_2(N) = \pi_3(N) = 0$ .

*Supposons que  $M$  admette une métrique PSC. Alors il existe un revêtement fini  $\hat{N}$  de  $N$  homotopiquement équivalent à  $\mathbf{S}^n$  ou à une somme connexe d'un nombre fini de  $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$ .*

Sans les hypothèses topologiques, il est clair qu'il y a beaucoup d'autres variétés : n'importe quel produit  $\mathbf{S}^2 \times X^{n-2}$  est PSC (prendre une métrique produit avec un facteur  $\mathbf{S}^2$  de courbure très positive). Le théorème 0.4 a une version « mapping », plus générale (Chodosh, Li et Liokumovich, 2023, Théorème 2) :

**THÉORÈME 0.5.** — *Soit  $N$  une variété fermée de dimension  $n$  telle que*

- $n = 4$  et  $\pi_2(N) = 0$ , ou
- $n = 5$  et  $\pi_2(N) = \pi_3(N) = 0$ .

*Supposons qu'il existe une variété fermée  $X$  de dimension  $n$ , admettant une métrique PSC et une application continue  $f : X \rightarrow N$  de degré non nul. Alors il existe un revêtement fini  $\hat{N}$  de  $N$  homotopiquement équivalent à  $\mathbf{S}^n$  ou à une somme connexe d'un nombre fini de  $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$ .*

Un corollaire immédiat de ce résultat est une généralisation du théorème 0.2 :

**COROLLAIRE 0.6.** — *Soient  $n \in \{4, 5\}$ ,  $X, N$  des variétés fermées de dimension  $n$  où  $N$  est sphérique. Supposons qu'il existe une application continue  $f : X \rightarrow N$  de degré non nul. Alors  $X$  n'est pas PSC.*

En particulier, si  $N$  est sphérique et  $X$  quelconque, la somme connexe  $N \# X$  n'est pas PSC (en effet une application  $N \# X \rightarrow N$  de degré 1 est obtenue en écrasant  $X$  sur un point).

Avant d'énoncer un dernier résultat, rappelons qu'un espace métrique  $(X, d)$  a une  $q$ -largeur d'Urysohn  $\leq \Lambda$  s'il existe un complexe simplicial  $K$  de dimension  $q$  et une application continue  $f : X \rightarrow K$  telle que  $\text{diam } f^{-1}(s) \leq \Lambda$  pour tout  $s \in K$ . Avoir une  $q$ -largeur d'Urysohn finie signifie ressembler à un espace de dimension  $\leq q$  en un sens macroscopique. Gromov (2021, page 63) a conjecturé qu'une variété complète de dimension  $n$  et courbure scalaire  $\geq n(n-1)$  a une  $(n-2)$ -largeur d'Urysohn  $\leq \text{const}_n$ . Cette conjecture est prouvée en dimension 3 mais largement ouverte pour  $n \geq 4$ . Au cours de la preuve du théorème 0.4 il est montré :

THÉORÈME 0.7. — *Soit  $(N, g)$  satisfaisant les hypothèses du théorème 0.4. Alors le revêtement universel  $(\tilde{N}, \tilde{g})$  a une 1-largeur d’Urysohn finie.*

Dans la suite du manuscrit nous nous limiterons aux preuves des théorèmes 0.2, 0.4 (et 0.7). Un phénomène central commun aux preuves est la propriété suivante de remplissage à distance bornée (cf. Proposition 3.1 et Proposition 4.2) :

*Si  $(M^n, g)$  satisfait les hypothèses topologiques de ces énoncés et est de courbure scalaire strictement positive, alors il existe  $L = L(M, g) > 0$  tel que toute sous-variété fermée de  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  de dimension  $n - 2$  borde dans son  $L$ -voisinage, i.e. est le bord d’une  $(n - 1)$ -chaîne contenue dans son  $L$ -voisinage.*

La preuve de cette propriété combine l’utilisation de surfaces minimales et de  $\mu$ -bulles (une généralisation des hypersurfaces minimales) et une méthode de descente par produit tordu (cf. Sections 1 et 2 pour ces notions). La preuve du théorème 0.2 à partir de cette propriété est très simple. Dans le revêtement universel  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  d’une variété asphérique orientée  $(M, g)$  supposée PSC, Chodosh et Li construisent une droite<sup>(5)</sup>  $\sigma$  et une hypersurface orientée compacte à bord  $M_{n-1}$ , étant d’intersection algébrique non triviale<sup>(6)</sup> et vérifiant  $d(\partial M_{n-1}, \sigma) > L$ . En remplissant  $\partial M_{n-1}$  dans son  $L$ -voisinage (donc sans intersecter  $\sigma$ ), ils obtiennent un  $(n - 1)$ -cycle non trivial dans  $H_{n-1}(\tilde{M}) = 0$ , ce qui est une contradiction.

La propriété de remplissage à distance bornée est le point de départ de la démonstration du théorème 0.4. Elle permet de montrer que dans le revêtement universel  $(\tilde{N}, \tilde{g})$  de la variété  $(N, g)$  considérée, les composantes connexes des sphères géodésiques sont de diamètre  $\leq 20L$ . Ceci implique que tout sous-groupe de type fini de  $\pi_1(N)$  a un nombre de bouts  $\neq 1$  (cf. note (16) pour une définition). On en déduit que  $\pi_1(N)$  est virtuellement libre par la théorie de Bass-Serre. La classification topologique s’ensuit.

Dans la section 1 nous commençons par présenter quelques méthodes de surfaces minimales et de descente liées aux problèmes de courbure scalaire, soit le cadre « classique ». Dans la section 2 nous introduisons les  $\mu$ -bulles et donnons les premiers exemples d’application. La section 3 est dévolue à la démonstration du théorème 0.2, qui est en grande partie la preuve de la proposition 3.1 de remplissage à distance bornée. Les théorèmes 0.4 et 0.7 sont prouvés dans la section 4.

En dehors de deux articles présentés, on peut consulter l’article d’exposition de Chodosh et Li (2023b) et les notes de cours de Chodosh (2021) qui m’ont beaucoup inspiré dans la rédaction de ce manuscrit.

Je remercie très chaleureusement Gérard Besson, Gilles Carron, Sylvain Maillot et Thomas Richard pour leurs remarques sur la première version du texte.

5. C’est-à-dire un plongement isométrique  $\sigma : \mathbf{R} \rightarrow (\tilde{M}, d_{\tilde{g}})$ .

6. L’intersection  $\sigma \cap M_{n-1}$  est transverse, à chaque  $x \in \sigma \cap M_{n-1}$  est associé le nombre  $+1$  ou  $-1$  selon que la juxtaposition de  $\sigma'$  et d’une base directe de l’espace tangent  $T_x M_{n-1}$  forme une base directe ou non de  $T_x \tilde{M}$ . L’intersection algébrique est la somme de ces nombres.

## 1. SURFACES MINIMALES ET ARGUMENTS DE DESCENTE

On considère des hypersurfaces sans bord immergées  $\Sigma^m \rightarrow (M^{m+1}, g)$  à fibré normal trivial. Si  $\nu$  est un vecteur unitaire normal, la seconde forme fondamentale de  $\Sigma$  est définie par  $\text{II}(X, Y) = -\langle \nabla_X Y, \nu \rangle = \langle \nabla_X \nu, Y \rangle$  pour  $X, Y$  tangent à  $\Sigma$ . La *courbure moyenne* de  $\Sigma$  est la trace  $H = \text{tr}(\text{II})$ . Une *variation* de  $\Sigma$  est une famille lisse d'immersions  $(F_t)_{t \in (-\epsilon, \epsilon)} : \Sigma \rightarrow M$  telle que (i)  $F_t \equiv \text{Id}$  en dehors d'un compact fixé de  $\Sigma$  (ii)  $\partial_t F_t = f_t \nu_t$ , où  $f_t \in C_c^\infty(\Sigma)$  (fonctions  $C^\infty$  à support compact) et  $\nu_t$  est normal à  $\Sigma_t := F_t(\Sigma)$ . Pour toute  $f \in C_c^\infty(\Sigma)$  il existe une variation  $F_t$  telle que  $\partial_t F_t|_{t=0} = f$ , définie par  $F_t(x) = \exp_x(t f(x) \nu(x))$ .

THÉORÈME 1.1 (Variation première et seconde). — Notant  $f = f_t|_{t=0}$  et  $\dot{f} = \partial_t f_t|_{t=0}$

$$(1) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{vol}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma} H f.$$

$$(2) \quad \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{vol}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 - (|\text{II}|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)) f^2 + H^2 f^2 + H \dot{f}.$$

où  $\text{Ric}$  désigne la courbure de Ricci de  $g$ .

Une hypersurface  $\Sigma$  est *minimale* si  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{vol}(\Sigma_t) = 0$  pour toute variation de  $\Sigma$ . Ceci signifie que  $\Sigma$  est un point critique de la fonctionnelle  $\Sigma \mapsto \text{vol}(\Sigma)$  (mais pas nécessairement un minimum) et équivaut à  $H = 0$  d'après (1). L'hypersurface minimale est *stable* si  $\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{vol}(\Sigma_t) \geq 0$  pour toute variation de  $\Sigma$ , ce qui équivaut à

$$(3) \quad \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 \geq \int_{\Sigma} (|\text{II}|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu)) f^2, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Sigma).$$

### Réarrangement de Schoen–Yau

Schoen et Yau (1979a, Théorème 5.1) ont découvert une ré-écriture de (3) sous une forme particulièrement utile en faisant apparaître le rôle des courbures scalaires  $R_M$  et  $R_\Sigma$  de  $M$  et  $\Sigma$  via les équations de Gauss : la trace de l'équation de Gauss  $R_M = R_\Sigma + 2\text{Ric}(\nu, \nu) + |\text{II}|^2 - H^2$ , mise sous la forme

$$(4) \quad 2(\text{Ric}(\nu, \nu) + |\text{II}|^2) = R_M + |\text{II}|^2 - R_\Sigma + H^2$$

et introduite dans (3) donne (avec  $H = 0$ ) l'équation de stabilité

$$(5) \quad 2 \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 \geq \int_{\Sigma} (R_M + |\text{II}|^2 - R_\Sigma) f^2, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Sigma).$$

Une application immédiate (Schoen et Yau, 1979b, Théorème 5.1) :

PROPOSITION 1.2. — Supposons que  $(M^3, g)$  vérifie  $R_M > 0$ . Si  $\Sigma \rightarrow (M, g)$  est une surface fermée orientable minimale stable alors chaque composante connexe de  $\Sigma$  est une sphère.

*Démonstration.* — Supposons  $\Sigma$  connexe. En faisant  $f = 1$  dans (5) on obtient

$$(6) \quad \int_{\Sigma} R_{\Sigma} \geq \int_{\Sigma} R_M + |\text{II}|^2 > 0$$

et on conclut avec la formule de Gauss-Bonnet que la caractéristique d'Euler de  $\Sigma$  est strictement positive, *i.e.*  $\chi(\Sigma) = 2 - 2 \times \text{genre}(\Sigma) > 0$ , donc  $\Sigma$  est une sphère.  $\square$

Si on suppose  $R_M \geq 2$  on obtient la majoration  $\text{vol}(\Sigma) \leq 4\pi$  <sup>(7)</sup> <sup>(8)</sup>. Ce genre de contrôle géométrique sera crucial dans la preuve de la conjecture du  $K(\pi, 1)$ . Comme conséquence de la proposition 1.2, Schoen et Yau (1979a, Théorème 5.1) obtiennent :

**COROLLAIRE 1.3.** — *Soit  $M^3$  fermée orientée telle que  $\pi_1(M^3)$  contienne un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface de genre  $\geq 1$ . Alors  $M$  n'est pas PSC.*

Pour cela ils prouvent que le sous-groupe peut-être réalisé par une surface minimale stable, ce que contredit la proposition 1.2. En particulier  $\mathbf{T}^3$  n'est pas PSC puisque  $\pi_1(\mathbf{T}^3) \supset \mathbf{Z}^2 = \pi_1(\mathbf{T}^2)$ .

#### *Arguments de descente*

Partant de  $\Sigma_n = M^n$  munie d'une métrique  $g_n$  PSC, on voudrait construire une suite

$$\Sigma_j \subset \Sigma_{j+1} \subset \cdots \subset \Sigma_n$$

où  $\Sigma_i \rightarrow (\Sigma_{i+1}, g_{i+1})$  serait minimale stable, jusqu'à  $j = 1$  ou  $j = 2$ . Idéalement  $g_{i+1}$  est simplement la métrique induite et elle est PSC mais c'est beaucoup trop naïf. Néanmoins la positivité de l'opérateur de stabilité lié à (3) permet de produire de la courbure scalaire strictement positive de deux manières : par déformation conforme de la métrique induite ou sur un produit tordu  $\Sigma_i \times \mathbf{S}^1$ .

La méthode de descente conforme permet de prouver que  $\mathbf{T}^n$  n'est pas PSC ( $3 \leq n \leq 7$ ). Elle n'est pas utilisée dans les travaux présentés ici mais on en dit néanmoins quelques mots. Elle est basée sur la formule ( $m \geq 3$ )

$$\tilde{R} = u^{-\frac{m+2}{m-2}}(-Lu)$$

pour la courbure scalaire de  $\tilde{g} = u^{\frac{4}{m-2}}g$ , où  $u > 0$  sur  $(\Sigma^m, g)$  et

$$Lf = 4\frac{m-1}{m-2}\Delta_{\Sigma}f - R_{\Sigma}f, \quad f \in C^{\infty}(\Sigma)$$

est le *Laplacien conforme* de  $g$  <sup>(9)</sup>. S'il existe  $\lambda > 0$  tel que  $-Lu = \lambda u$  alors  $\tilde{R} = \lambda u^{-\frac{m+2}{m-2}+1} > 0$ . Or si  $(\Sigma^m, g)$  est minimale stable dans  $(M^{m+1}, g_M)$  de courbure scalaire

7. On a  $R_{\Sigma} = 2K_{\Sigma}$  donc  $8\pi = 2\chi(\Sigma) = \int_{\Sigma} R_{\Sigma} \geq 2\text{vol}(\Sigma)$ .

8. On peut montrer facilement que dans le cas d'égalité, la sphère minimale est totalement géodésique et isométrique à une sphère ronde de rayon 1. Mais il y a de plus rigidité globale, *cf.* Bray, Brendle et Neves (2010).

9. La convention pour le laplacien est celle utilisée dans Chodosh et Li (2023a) :  $\Delta f = \text{tr}Ddf$ .

$R_M \geq R_0 > 0$ , l'opérateur  $(-L)$  est positif : la caractérisation variationnelle de la première valeur propre  $\lambda$  de  $L$  donne

$$\lambda = \inf_{f \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Sigma f(-L)f}{\int_\Sigma f^2} = \inf_{f \in C^\infty(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Sigma 4 \frac{m-1}{m-2} |\nabla f|^2 + R_\Sigma f^2}{\int_\Sigma f^2}$$

et en utilisant  $4 \frac{m-1}{m-2} \geq 2$  et l'équation de stabilité (5) on voit que

$$\int_\Sigma 4 \frac{m-1}{m-2} |\nabla f|^2 + R_\Sigma f^2 \geq \int_\Sigma 2 |\nabla f|^2 + R_\Sigma f^2 \geq \int_\Sigma (R_M + |\text{II}|^2) f^2 \geq R_0 \int_\Sigma f^2$$

donc  $\lambda \geq R_0$ . On sait que  $\lambda$  est de multiplicité 1 et qu'une fonction propre associée  $u$  ne s'annule pas. En choisissant  $u > 0$ , on obtient donc (Schoen et Yau, 1979b) :

**PROPOSITION 1.4.** — *Soit  $(M^n, g)$  une variété fermée PSC,  $n \geq 3$ . Alors toute hypersurface minimale stable de  $M$  admet une métrique PSC.*

On peut trouver des hypersurfaces minimales stables par la théorie géométrique de la mesure :

**PROPOSITION 1.5** (Federer, Fleming, De Giorgi, Almgren, Allard ; cf. Simon, 1983)

*Soit  $(M, g)$  orientée fermée de dimension  $n \leq 7$ . Pour tout  $\alpha \in H_{n-1}(M, \mathbf{Z})$ , on peut minimiser l'aire parmi les représentants de  $\alpha$  pour écrire*

$$\alpha = [\Sigma_1] + \dots + [\Sigma_k]$$

où les  $\Sigma_j$  sont des hypersurfaces plongées orientées minimales stables.

Ces deux résultats permettent de montrer que  $\mathbf{T}^n$  n'est pas PSC. Pour être complet, nous donnons une preuve à la fin de cette section.

La méthode de produit tordu pour construire

$$\Sigma_j \subset \Sigma_{j+1} \subset \dots \subset \Sigma_{n-2} \subset \Sigma_{n-1} \subset \Sigma_n = M$$

est basée sur la formule

$$(7) \quad R_{\bar{g}} = R_{\Sigma_{n-1}} - 2 \frac{\Delta_{\Sigma_{n-1}} u}{u}$$

pour le produit tordu  $\bar{g} = g_{\Sigma_{n-1}} + u^2 dt^2$  sur  $\Sigma_{n-1} \times \mathbf{S}^1$ . Si  $\Sigma_{n-1} \rightarrow (M^n, g)$  est minimale stable, l'équation de stabilité (5)

$$2 \int_{\Sigma_{n-1}} |\nabla f|^2 \geq \int_{\Sigma_{n-1}} (R_M + |\text{II}|^2 - R_{\Sigma_{n-1}}) f^2, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Sigma_{n-1})$$

implique l'existence d'une fonction  $u > 0$  sur  $\Sigma_{n-1}$  vérifiant

$$(8) \quad -2 \Delta_{\Sigma_{n-1}} u \geq (R_M - R_{\Sigma_{n-1}}) u$$

ce qui dans (7) implique  $R_{\bar{g}} \geq R_M$ . En particulier le produit tordu hérite de la minoration  $R_{\bar{g}} \geq R_0$  si  $R_M \geq R_0$ . On peut itérer l'opération. Supposons que  $\Sigma_{n-2} \times \mathbf{S}^1$  minimise l'aire dans  $(\Sigma_{n-1} \times \mathbf{S}^1, \bar{g})$  parmi les domaines de cette forme. L'équation de stabilité donne  $v > 0$  sur  $\Sigma_{n-2} \times \mathbf{S}^1$  (qui ne dépend que de  $x \in \Sigma_{n-2}$ ) telle que le produit

tordu (double)  $\bar{g} = g + u^2 dt^2 + v^2 ds^2$  sur  $\Sigma_{n-2} \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$  vérifie à nouveau  $R_{\bar{g}} \geq R_0$ . En itérant on obtient

$$\Sigma_j \subset \Sigma_{j+1} \subset \dots \subset \Sigma_{n-2} \subset \Sigma_{n-1} \subset \Sigma_n = M$$

où  $\Sigma_j \times (\mathbf{S}^1)^{n-j}$  minimise l'aire dans  $\Sigma_{j+1} \times (\mathbf{S}^1)^{n-j+1}$  muni du produit tordu itéré. Cela équivaut à ce que  $\Sigma_j$  minimise dans  $\Sigma_{j+1}$  une certaine fonctionnelle d'aire tordue. En effet, on a

$$\text{vol}_{\bar{g}}(\Sigma_{n-2} \times \mathbf{S}^1) = \int_{\Sigma_{n-2} \times \mathbf{S}^1} u dt = 2\pi \int_{\Sigma_{n-2}} u$$

(la métrique sur  $\Sigma_{n-2}$  est celle induite par  $g$ ) donc  $\Sigma_{n-2}$  minimise dans  $\Sigma_{n-1}$  la fonctionnelle  $\int_{\Sigma_{n-2}} u$  <sup>(10)</sup>. De même  $\Sigma_{n-3}$  minimise dans  $\Sigma_{n-2}$  la fonctionnelle  $\int_{\Sigma_{n-3}} uv$ , etc. (cf. Schoen et Yau, 1982, 2022). Chodosh et Li combinent cette méthode à l'utilisation de  $\mu$ -bulles pour prouver le théorème 0.2 (cf. Section 3). L'avantage de cette méthode sur celle de déformation conforme est que  $\Sigma_j$  reste munie de la métrique induite par  $g$ , ce qui est crucial pour les contrôles géométriques que l'on veut obtenir. Nous donnons un premier exemple d'utilisation de cette méthode dans la preuve du lemme 2.7.

Ci-dessous une preuve que  $\mathbf{T}^n$  n'est pas PSC, tirée de Chodosh (2021).

**PROPOSITION 1.6.** — *Pour  $3 \leq n \leq 7$ , soit  $M^n$  une variété fermée admettant  $\omega^1, \dots, \omega^{n-1} \in H^1(M, \mathbf{R})$  telles que  $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{n-1} \neq 0 \in H_{dR}^{n-1}(M, \mathbf{R})$ . Alors  $M$  n'est pas PSC.*

*Démonstration.* — Par récurrence sur  $n$ . Supposons  $n = 3$ . Par l'absurde on suppose que  $(M^3, g)$  est PSC. Il existe  $\alpha \in H_2(M^3, \mathbf{Z})$  telle que  $(\omega^1 \wedge \omega^2)(\alpha) \neq 0$ . Alors tout représentant  $\Sigma \in \alpha$  vérifie

$$\int_{\Sigma} \omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0$$

En minimisant l'aire dans la classe  $\alpha$ , la proposition 1.5 donne des surfaces minimales stables  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$  telles que  $[\Sigma_1] + \dots + [\Sigma_k] = \alpha$ . D'après la proposition 1.2, les  $\Sigma_j$  sont des sphères. Nécessairement une composante  $\Sigma = \Sigma_j$  vérifie

$$\int_{\Sigma} \omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0.$$

Ceci implique que  $\omega^1|_{\Sigma}, \omega^2|_{\Sigma} \neq 0 \in H^1(\Sigma, \mathbf{R})$ , ce qui est absurde puisque  $\Sigma$  est une sphère. Supposons maintenant que  $(M^n, g)$  soit PSC ( $4 \leq n \leq 7$ ) et admette  $\omega^1, \dots, \omega^{n-1} \in H^1(M, \mathbf{R})$  telles que  $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{n-1} \neq 0$ . Soit  $\alpha \in H_{n-1}(M, \mathbf{Z})$  telle que  $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{n-1}(\alpha) \neq 0$ . D'après la proposition 1.5 on peut trouver une hypersurface  $\Sigma \in \alpha$  minimale stable. On a toujours

$$\int_{\Sigma} (\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{n-1})|_{\Sigma} \neq 0.$$

---

10. Qu'on peut aussi voir comme l'aire pour la métrique conforme  $u^{\frac{n-1}{2}} g$ .

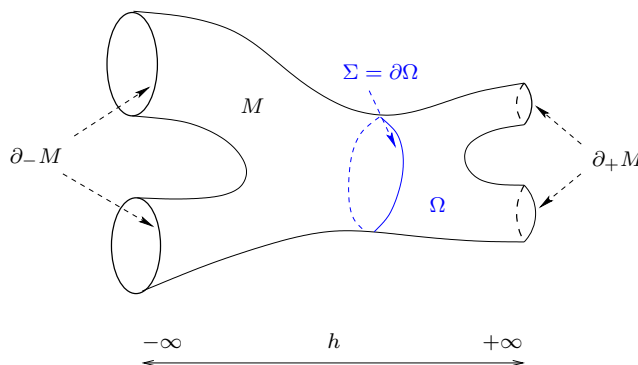


Ceci implique  $\omega|_{\Sigma}^1 \wedge \dots \wedge \omega|_{\Sigma}^{n-2} \neq 0 \in H_{dR}^{n-2}(\Sigma, \mathbf{R})$  donc que  $\omega|_{\Sigma}^1, \dots, \omega|_{\Sigma}^{n-2} \in H^1(\Sigma, \mathbf{R})$  satisfont l'hypothèse de récurrence. Mais d'après la proposition 1.4,  $\Sigma$  admet une métrique PSC, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.  $\square$

*Remarque 1.7.* — Il découle de cet énoncé que si  $M^n$  fermée orientée admet  $f : M^n \rightarrow \mathbf{T}^n$  de degré non nul alors  $M^n$  n'est pas PSC : en notant  $\omega^i = f^* dx^i$  on a  $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^{n-1} = f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}) \neq 0 \in H_{dR}^{n-1}(M, \mathbf{R})$  et la proposition s'applique. En particulier, pour toute variété fermée orientée  $X^n$ ,  $X^n \# \mathbf{T}^n$  n'est pas PSC.

## 2. $\mu$ -BULLES ET PRODUITS TORDUS

L'introduction de  $\mu$ -bulles dans des problèmes de courbure scalaire est due à Gromov (1996, Section 5 $\frac{5}{6}$ ; 2018, Section 9). Pour éviter des problèmes de régularité on suppose  $n \leq 7$ . Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne compacte à bord, avec  $\partial M = \partial_- M \cup \partial_+ M$  où  $\partial_{\pm} M$  est union non vide de composantes de  $\partial M$ . Soit  $h \in C^\infty(M \setminus \partial M)$  telle que  $h \rightarrow \pm\infty$  vers  $\partial_{\pm} M$ . Pour  $\Omega \subset M$  un ouvert à bord (11)  $\Sigma = \partial\Omega$  lisse,



posons

$$(9) \quad \mu(\Omega) := \text{vol}(\partial\Omega) - \int_{\Omega} h.$$

En pratique  $\Omega \supset \partial_+ M$  donc  $\mu$  n'est peut-être pas finie mais ignorons le problème pour l'instant. Pour toute variation  $(F_t)_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)} : \Sigma^{n-1} = \partial\Omega \rightarrow M$ , posons  $\Sigma_t = F_t(\Sigma)$  et soit  $\Omega_t$  la variation de  $\Omega$  telle  $\partial\Omega_t = \Sigma_t$ . Soit  $\nu_t$  le vecteur unitaire normal à  $\Sigma_t$  pointant vers l'extérieur de  $\Omega_t$ .

LEMME 2.1 (Variation première). — En notant  $\partial_t F_t = f_t \nu_t$  et  $f = f_t|_{t=0}$ ,

$$(10) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mu(\Omega_t) = \int_{\Sigma} (H - h) f.$$

On dit  $\Omega$  est une  $\mu$ -bulle si  $H = h$  sur  $\Sigma$ . Ce sont les points critiques de  $\mu(\cdot)$ .

11. Il s'agit du bord topologique dans  $M$ ,  $\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{M} \setminus \overline{\Omega}$ . En particulier,  $\partial\Omega \subset M \setminus \partial M$ .

PROPOSITION 2.2 (Variation seconde). — *Supposons que  $H = h$  sur  $\partial\Omega$  alors*

$$(11) \quad \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \mu(\Omega_t) = \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 - \left( |\mathbb{I}|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu) + \langle \nabla h, \nu \rangle \right) f^2.$$

La formule (11) conduit à définir la notion de  $\mu$ -bulle stable :

DÉFINITION 2.3. — *Un ouvert  $\Omega$  à bord  $\Sigma = \partial\Omega$  lisse est une  $\mu$ -bulle stable si  $H = h$  sur  $\Sigma$  et*

$$(12) \quad \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 \geq \int_{\Sigma} \left( |\mathbb{I}|^2 + \text{Ric}(\nu, \nu) + \langle \nabla h, \nu \rangle \right) f^2, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Sigma).$$

Cette définition fait sens même si  $\mu(\Omega)$  n'est pas bien définie. En injectant dans (12) le réarrangement de Schoen et Yau (4) et l'inégalité  $|\mathbb{I}|^2 \geq \frac{1}{n-1} H^2 = \frac{1}{n-1} h^2$  on obtient

LEMME 2.4. — *Si  $\Omega$  est une  $\mu$ -bulle stable alors*

$$(13) \quad 2 \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 \geq \int_{\Sigma} \left( R_M + \frac{n}{n-1} h^2 + 2 \langle \nabla h, \nu \rangle - R_{\Sigma} \right) f^2, \quad \forall f \in C_c^\infty(\Sigma).$$

La différence avec l'équation (5) des hypersurfaces minimales est le remplacement de  $R_M + |\mathbb{I}|^2$  par le terme  $R_M + \frac{n}{n-1} h^2 + 2 \langle \nabla h, \nu \rangle$ . La positivité de ce terme est cruciale pour l'exploitation de (13). Sous la condition  $R_M > 0$ , il suffit de minorer convenablement  $\frac{n}{n-1} h^2 - 2|\nabla h|$ , ce qu'on peut faire dans une zone de la variété contenant une « bande assez large ». (Voir les équations (15) à (17) ci-dessous.)

L'existence de  $\mu$ -bulles stables est prouvée par Jintian Zhu (2021, Proposition 2.1).

PROPOSITION 2.5. — *Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne compacte à bord telle que  $\partial M = \partial_- M \cup \partial_+ M$  où  $\partial_{\pm} M$  est union non vide de composantes de  $\partial M$ . Soit  $h \in C^\infty(M \setminus \partial M)$  telle que  $h \rightarrow \pm\infty$  vers  $\partial_{\pm} M$ . Alors il existe une  $\mu$ -bulle stable  $\Omega \subset M$  contenant un voisinage tubulaire de  $\partial_+ M$  et évitant un voisinage tubulaire de  $\partial_- M$ .*

*Idée de la preuve.* — Fixons  $\Omega_0 \subset M$  un ouvert à bord lisse, qui est un petit voisinage tubulaire de  $\partial_+ M$  (évitant un voisinage tubulaire de  $\partial_- M$ ). Notons  $\chi_{\Omega}$  la fonction indicatrice de  $\Omega$  et considérons la fonctionnelle auxiliaire

$$(14) \quad \mu(\Omega; \Omega_0) = \text{vol}(\partial\Omega) - \int_M (\chi_{\Omega} - \chi_{\Omega_0}) h.$$

sur les domaines  $\Omega$  contenant un voisinage tubulaire de  $\partial_+ M$  et évitant un voisinage tubulaire de  $\partial_- M$ . Comme  $\chi_{\Omega} - \chi_{\Omega_0} = 0$  près de  $\partial M$ , la fonctionnelle est bien définie. Ses variations première et seconde sont données par (10) et (11). Soit  $(\Omega_i)_i$  une suite minimisante. On peut voir que  $\partial\Omega_i$  ne s'approche pas de  $\partial M$  par la considération heuristique suivante. Soit  $\Sigma_{\pm, t}$  l'hypersurface à distance  $t$  de  $\partial_{\pm} M$ . Comme  $H_{\Sigma_{\pm, t}} = O(1)$  on a

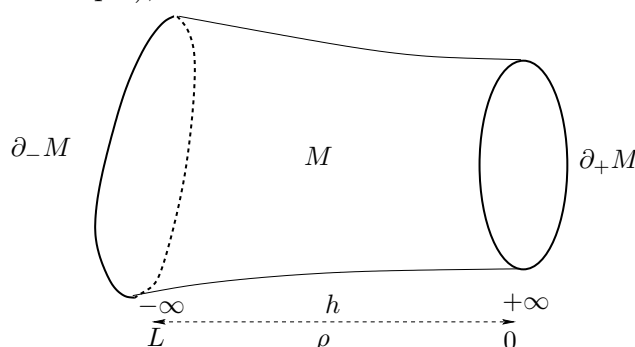
$$(H - h)_{\Sigma_{-, t}} \gg 0, \quad (H - h)_{\Sigma_{+, t}} \ll 0$$

pour  $t$  proche de 0. Par conséquent si  $\Omega_t$  provient d'une variation dans la direction  $\nu_t$  (pointant vers l'extérieur de  $\Omega_t$ ) dont le bord contient  $\Sigma_{-, t}$ , resp.  $\Sigma_{+, t}$  alors  $\mu(\Omega_t)$

augmente quand  $\Sigma_{-,t}$  s'approche de  $\partial_-M$ , resp. diminue quand  $\Sigma_{+,t}$  s'éloigne de  $\partial_+M$ . Le bord  $\partial\Omega_i$  reste donc éloigné de  $\partial M$ , ce qui implique  $\int_M (\chi_{\Omega_i} - \chi_{\Omega_0}) h = O(1)$ . Il s'ensuit que la fonctionnelle est minorée et  $\text{vol}(\partial\Omega_i)$  majorée. La théorie des fonctions à variation bornée permet d'extraire une limite faible de  $\chi_{\Omega_i}$  vers un minimiseur  $\Omega$  (qui est un ensemble de Caccioppoli <sup>(12)</sup>). On montre que le bord  $\partial\Omega$  est lisse par des arguments standards de régularité (cf. Tamanini (1984), Zhou et Jonathan Zhu (2020, Théorème 2.2)).  $\square$

### Choix de $h$

La fonction  $h$  sera souvent définie comme suit. Étant donnés  $L > 0$  et  $\rho : M \rightarrow [0, L]$  lisse 1-lipschitzienne telle que  $\rho|_{\partial_+M} = 0$  et  $\rho|_{\partial_-M} = L$  (obtenue en régularisant la fonction  $d(\cdot, \partial_+M)$  par exemple),



on pose

$$(15) \quad h(x) = -\frac{2(n-1)\pi}{nL} \tan\left(\frac{\pi}{L}\rho(x) - \frac{\pi}{2}\right).$$

Alors  $h \rightarrow \pm\infty$  vers  $\partial_{\pm}M$  et on calcule que

$$(16) \quad \frac{n}{n-1}h^2 - 2|\nabla h| \geq -\frac{4(n-1)\pi^2}{nL^2}$$

qui est petit quand  $L$  est grand. En particulier si  $R_M \geq R_0 > 0$  alors

$$(17) \quad R_M + \frac{n}{n-1}h^2 - 2|\nabla h| \geq R_0 - \frac{4(n-1)\pi^2}{nL^2} > 0$$

dès que  $L > 2\pi\sqrt{\frac{n-1}{nR_0}}$ . Les hypothèses sur  $\rho$  imposent  $d(\partial_-M, \partial_+M) \geq L$ , ce qui donne la contrainte  $d(\partial_-M, \partial_+M) > 2\pi\sqrt{\frac{n-1}{nR_0}}$  pour que ce choix soit possible.

### 1er exemple : largeur de bande

Comme premier exemple d'utilisation de  $\mu$ -bulle pour obtenir un contrôle géométrique, nous avons le résultat suivant de Gromov (2018, 2021).

**THÉORÈME 2.6.** — *Soit  $g$  une métrique sur  $[-1, 1] \times \mathbf{T}^n$  telle que  $R_g \geq R_0 > 0$ . Alors*

$$d_g(\{-1\} \times \mathbf{T}^n, \{1\} \times \mathbf{T}^n) \leq 2\pi\sqrt{\frac{n}{R_0(n+1)}}.$$

12. Par définition c'est un ensemble dont la fonction caractéristique est localement à variation bornée.

*Démonstration.* — Nous suivons Chodosh (2021), dont l’argument de  $\mu$ -bulles est légèrement différent de celui de Gromov. Pour simplifier supposons  $n = 2$ . On argumente par l’absurde, supposant que

$$d_g(\{-1\} \times \mathbf{T}^2, \{1\} \times \mathbf{T}^2) > L > 2\pi\sqrt{\frac{2}{3R_0}}.$$

Pour  $M = [-1, 1] \times \mathbf{T}^2$  et  $\partial_{\pm}M = \{\pm 1\} \times \mathbf{T}^2$ , on se donne  $\rho : M \rightarrow [0, L]$  lisse 1-lipschitzienne telle que  $\rho|_{\partial_+M} = 0$  et  $\rho|_{\partial_-M} = L$  et on définit  $h \in C^\infty(M \setminus \partial M)$  par (15). Soit  $\Omega \subset M$  une  $\mu$ -bulle stable donnée par la proposition 2.5. Puisque  $\partial\Omega$  est homologue à  $\partial_+M = \mathbf{T}^2$ , l’une de ses composantes  $\Sigma_1 \subset \partial\Omega$  au moins est de genre  $> 0$  (voir l’argument d’intégration dans la preuve de 1.6). L’équation de stabilité (13) montre, en faisant  $f = 1$  sur  $\Sigma_1$  et  $f = 0$  sur les autres composantes, que

$$\int_{\Sigma_1} R_\Sigma > \int_{\Sigma_1} R_M + \frac{3}{2}h^2 + 2\langle \nabla h, \nu \rangle > 0$$

(en utilisant (17)), ce qui est impossible puisque  $\Sigma_1$  est de genre  $> 0$ . En dimension supérieure, on trouverait une  $\mu$ -bulle  $\Omega \subset [-1, 1] \times \mathbf{T}^n$  telle que  $\partial\Omega$  admet par déformation conforme une métrique PSC alors qu’une de ses composantes au moins satisfait les hypothèses de la proposition 1.6.  $\square$

### 2ème exemple : estimée de diamètre

Une surface complète sans bord de courbure scalaire  $R \geq R_0 > 0$  est de diamètre  $\leq \pi\sqrt{\frac{2}{R_0}}$ . Cela est dû au fait que  $R = 2K$  et résulte du théorème de Myers. Une surface minimale stable  $\Sigma^2 \rightarrow (M^3, g)$ , où  $R_g \geq R_0 > 0$ , n’est pas nécessairement de courbure scalaire  $> 0$  mais satisfait également une estimée de diamètre. En effet on a vu que l’équation de stabilité (3) implique l’existence de  $u > 0$  sur  $\Sigma^2$  telle que

$$(18) \quad \Delta_\Sigma u + \frac{1}{2}(R_0 - R_\Sigma)u \leq 0.$$

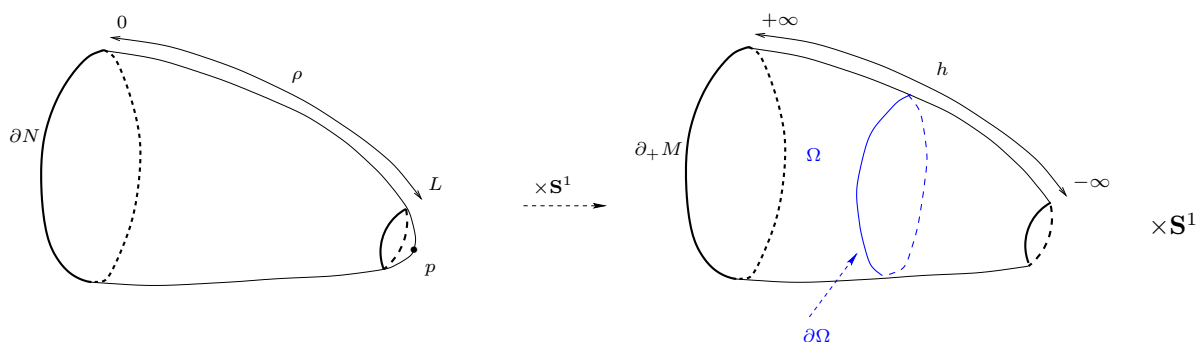
Cette équation est satisfaite si  $R_\Sigma \geq R_0$  (faire  $u = 1$ ) et on peut la voir comme une généralisation de cette condition. Si  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ , on a seulement  $u > 0$  sur  $\Sigma \setminus \partial\Sigma$  (voir par exemple la preuve de Fischer-Colbrie et Schoen (1980, Théorème 1)) mais on peut supposer  $u > 0$  sur  $\Sigma$  en enlevant un petit voisinage de  $\partial\Sigma$ . L’équation (18) implique une majoration du diamètre ou de la distance au bord :

LEMME 2.7 (Schoen et Yau, 1983). — *Soient  $(N^2, g)$  une surface complète à bord compact. Supposons qu’il existe une fonction  $u > 0$  sur  $N$  et  $K_0 > 0$  tels que*

$$(19) \quad \Delta u + (K_0 - K)u \leq 0.$$

*Alors  $N$  est compacte. Si  $\partial N = \emptyset$  alors  $\text{diam } N \leq \frac{2}{\sqrt{3K_0}}\pi$ . Si  $\partial N \neq \emptyset$  alors  $d_g(p, \partial N) \leq \frac{2}{\sqrt{3K_0}}\pi$  pour tout  $p \in N$ .*

*Démonstration.* — Nous suivons Chodosh (2021, Corollaire 6.16) pour démontrer ce résultat en combinant  $\mu$ -bulle et méthode de produit tordu. Supposons pour simplifier que  $K_0 = 1$ . On argumente par l'absurde. Quitte à enlever une petite boule de  $N$ , on suppose que  $\partial N \neq \emptyset$  et qu'il existe  $p \in N$  tel que  $d(p, \partial N) > L > \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$ . On se donne une fonction lisse 1-lipshitzienne  $\rho : N \rightarrow [0, +\infty[$  telle que  $\rho(\partial N) = 0$  et  $\rho^{-1}(L) = \partial B_\varepsilon(p)$ .



Sur  $M := \rho^{-1}([0, L]) \times \mathbf{S}^1$  on considère le produit tordu  $\bar{g} = g + u^2 dt^2$ . D'après l'hypothèse (19) et la formule (7), on a l'inégalité  $R_{\bar{g}} \geq 2$ . Sur  $M \setminus \partial M$  soit la fonction  $h(x, t) = h(x)$  définie par (15), alors  $h \rightarrow \pm\infty$  vers  $\partial_\pm M$  et l'équation (17) donne

$$(20) \quad R_{\bar{g}} + \frac{3}{2}h^2 - 2|\nabla h| \geq 2 - \frac{8\pi^2}{3L^2} > 0$$

La preuve de la proposition 2.5 montre l'existence d'une  $\mu$ -bulle de la forme  $\bar{\Omega} = \Omega \times \mathbf{S}^1$  dans  $(M, \bar{g})$  (considérer une suite minimisante pour les domaines de cette forme). Considérons une composante connexe de  $\bar{\Omega}$ . Elle est de la forme  $\gamma \times \mathbf{S}^1$  où  $\gamma \subset N$  est un lacet. L'équation de stabilité (13) (avec  $f = 1$  sur  $\gamma \times \mathbf{S}^1$ ) donne (pour la métrique induite par  $\bar{g}$ )

$$\int_{\gamma \times \mathbf{S}^1} R_{\gamma \times \mathbf{S}^1} \geq \int_{\gamma \times \mathbf{S}^1} \bar{R} + \frac{3}{2}h^2 - 2|\nabla h|^2 > 0$$

d'après (20), ce qui absurde. □

*Remarque 2.8.* — Les fonctions  $h$  et  $u$  ne dépendent que de  $x \in N$  donc

$$\mu(\Omega \times \mathbf{S}^1) = \int_{\partial(\Omega \times \mathbf{S}^1)} u dt - \int_{\Omega \times \mathbf{S}^1} h u dt = 2\pi \left( \int_{\partial\Omega} u - \int_{\Omega} h u \right) =: 2\pi \mu_u(\Omega)$$

Ainsi  $\Omega \times \mathbf{S}^1$  minimise  $\mu$  (parmi les domaines de cette forme) quand  $\Omega$  minimise (13)  $\mu_u$ . Dans la suite on dira que  $\Omega \subset N$  est une  $\mu$ -bulle tordue (pour la fonction  $u$ ). Il est équivalent de travailler avec l'une ou l'autre. La formule de variation seconde pour  $\mu_u$  est toutefois bien plus technique, voir Chodosh et Li (2023a, Proposition 14). C'est pourquoi nous préférons présenter la version plus simple dans ce manuscrit.

13. Pour être exact, il faut considérer  $\int_{\partial\Omega} u - \int_N (\chi_\Omega - \chi_{\Omega_0}) h u$  pour que la fonctionnelle soit bien définie, comme dans la preuve de 2.5.

COROLLAIRE 2.9. — Soit  $(M^3, g)$  fermée orientable telle que  $R_g \geq 2$ . Soit  $\gamma \subset M^3$  un lacet qui borde, alors il borde dans son  $\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$ -voisinage.

*Démonstration.* — On résout le problème de Plateau pour trouver une surface  $\Sigma^2 \subset (M^3, g)$  minimisant l'aire parmi les surfaces telles que  $\partial\Sigma = \gamma$ . La surface est minimale stable et comme expliqué plus haut, le lemme 2.7 s'applique.  $\square$

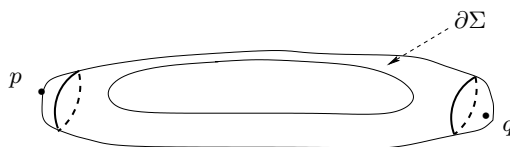
Le lemme 2.7 ne borne pas le diamètre de  $\Sigma$  lorsque  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ , il majore seulement la distance à son bord. Par exemple, le lacet ci-dessus peut-être arbitrairement long (penser à un lacet homotopiquement trivial dans un  $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$ , où le facteur  $\mathbf{S}^1$  est grand comparé au facteur  $\mathbf{S}^2$ ). Une majoration du diamètre est obtenue dans le lemme suivant, où la condition (19) est également légèrement affaiblie.

LEMME 2.10. — Soit  $(\Sigma^2, g)$  une surface riemannienne compacte connexe. On suppose qu'il existe une fonction  $u > 0$  et  $K_0 > 0$  tel que

$$(21) \quad \Delta u + (K_0 - K_\Sigma)u \leq \frac{1}{2}u^{-1}|\nabla u|^2.$$

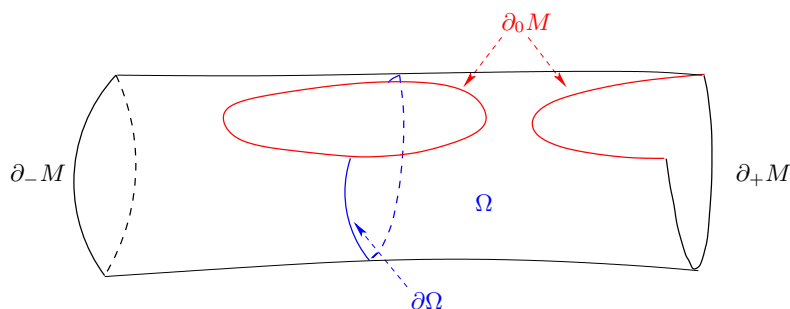
Si  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ , on suppose de plus  $\langle \nabla u, \eta \rangle = -k_{\partial\Sigma}u$  le long de  $\partial\Sigma$  où  $\eta$  est la normale unitaire pointant vers l'extérieur. Alors  $\text{diam } \Sigma \leq \sqrt{\frac{2}{K_0}}\pi$ .

Chodosh et Li (2023a) prouvent ce résultat dans les lemmes 16 et 17. D'une part, la seconde forme fondamentale est utilisée plus finement en écrivant  $|\text{II}|^2 = k_\gamma^2 + u^{-2}\langle \nabla_\Sigma u, \eta \rangle^2$  (plutôt que  $\geq \frac{1}{n}h^2$ ) et contribue à neutraliser le membre de droite de (21). D'autre part il faut gérer différemment les composantes de bord : si  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  et  $p, q \in \Sigma$  sont éloignés, séparer  $\partial B_\varepsilon(p)$  de  $\partial B_\varepsilon(q)$  par une  $\mu$ -bulle est impossible si les composantes de  $\partial\Sigma$  sont trop proches :



Pour traiter ce problème (et d'autres apparaissant dans la preuve du théorème 0.2), les auteurs développent une notion de  $\mu$ -bulle à bord libre. Dans cette situation  $\partial M = \partial_- M \cup \partial_0 M \cup \partial_+ M$  où  $\partial_\pm M$  et  $\partial_0 M$  sont des sous-variétés (possiblement à bord). On demande que  $\partial_- M \cap \partial_+ M = \emptyset$  et  $\partial_\pm M \cap \partial_0 M$ , si elle est non vide, est une sous-variété fermée de  $M$  de codimension 2,  $\partial_\pm M$  et  $\partial_0 M$  s'intersectant orthogonalement. On demande aussi que  $H_{\partial_0 M} = 0$ . Le bord  $\Sigma = \partial\Omega$  d'une  $\mu$ -bulle peut avoir un bord  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ , alors  $\partial\Sigma$  rencontre alors  $\partial_0 M$  orthogonalement. (voir Chodosh et Li (2023a, Section 4)).

Remarque 2.11. — En dimension  $n \geq 3$ , les variétés à courbure scalaire  $R \geq R_0 > 0$  sont de diamètre non borné : considérer  $\mathbf{S}^{n-1} \times (DS^1)$  pour  $D > 0$  arbitraire. Même  $\mathbf{S}^n$  peut avoir courbure scalaire  $\geq 1$  et diamètre  $\geq 2D$  : recoller un cylindre  $\mathbf{S}^{n-1} \times [-D, D]$  à deux hémisphères et lisser. Enfin, on peut faire des sommes connexes arbitraires.

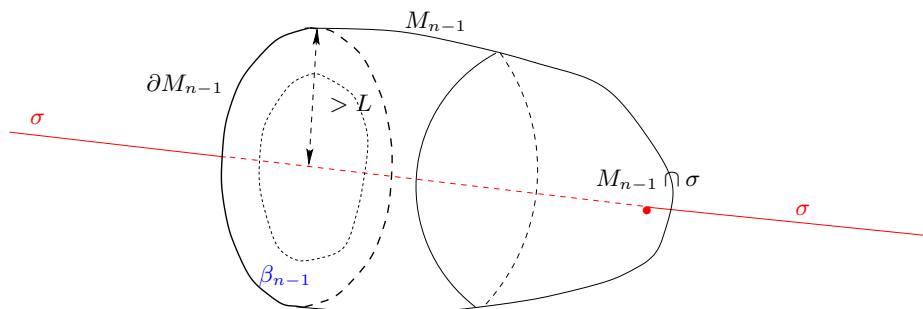


### 3. PREUVE DE LA CONJECTURE DU $K(\pi, 1)$ , $n \in \{4, 5\}$

Nous présentons ici la preuve du théorème 0.2. Commençons par traiter le cas de  $(M, g)$  de courbure scalaire positive ou nulle. D'après Kazdan et Warner (1975),  $(M, g)$  est Ricci-plate ou bien admet une métrique PSC. Si  $M$  est Ricci-plate, le théorème de scindement de Cheeger et Gromoll (1971/72) implique que le revêtement universel  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  est isométrique à un produit  $(\tilde{M}', \tilde{g}') \times \mathbf{R}^k$  où  $\tilde{M}'$  est fermée. Comme  $M$  est asphérique,  $\tilde{M}'$  est un point et  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  est plate. Il reste à exclure que  $M$  soit PSC.

#### 3.1. Structure de la preuve

Chodosh et Li s'inspirent d'une stratégie proposée par Schoen et Yau (1987) (qui considéraient le cas  $n = 4$ ). Ils raisonnent par contradiction. Supposons que  $M^n$  asphérique fermée admette une métrique  $g$  de courbure scalaire  $R_g \geq n$ . Le revêtement universel  $\tilde{M}$  étant contractile, il satisfait  $H_{n-1}(\tilde{M}) = 0$ . La démonstration va produire dans  $\tilde{M}$  un  $(n-1)$ -cycle non trivial. On commence par construire dans  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  une droite  $\sigma$  et une hypersurface  $M_{n-1} \subset \tilde{M}$  compacte à bord, étant d'intersection algébrique non triviale et vérifiant  $d_{\tilde{g}}(\partial M_{n-1}, \sigma) > L$  où  $L > 0$  est arbitraire (c'est facile, cf. lemme 3.5 ci-dessous). On va ensuite remplir  $\partial M_{n-1}$  par une  $(n-1)$ -chaîne  $\beta_{n-1}$  restant proche de  $\partial M_{n-1}$ . En particulier  $\beta_{n-1}$  est disjointe de la droite  $\sigma$ . Par conséquent, le  $(n-1)$ -cycle  $M_{n-1} - \beta_{n-1}$  intersecte  $\sigma$  non trivialement et est donc non trivial dans  $H_{n-1}(\tilde{M}) = 0$ , comme voulu.



L'élément essentiel de la démonstration réside donc dans l'énoncé suivant.

**PROPOSITION 3.1** (Remplissage à distance bornée). — *Pour  $n \in \{4, 5\}$  il existe  $L_0 = L_0(M, g) > 0$  tel que toute sous-variété fermée  $M_{n-2} \subset \tilde{M}$  de dimension  $n - 2$  borde*

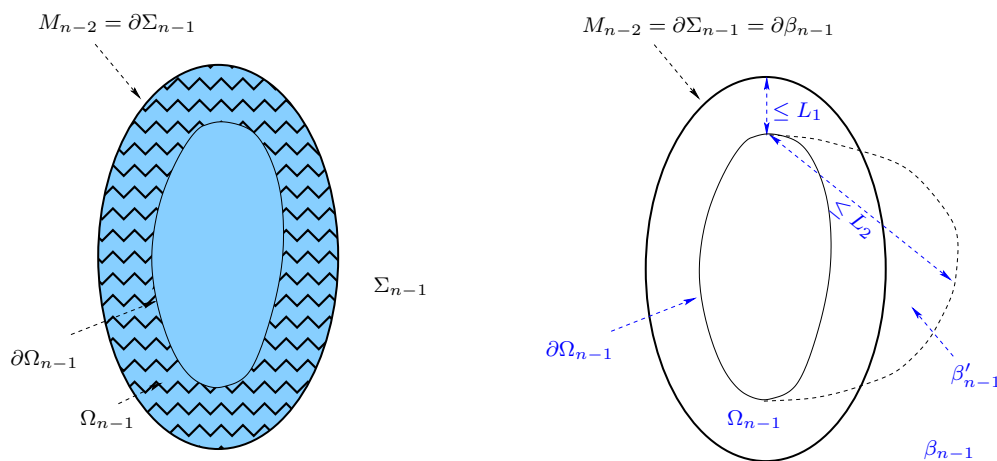
dans son  $L_0$ -voisinage, i.e. il existe une  $(n - 1)$ -chaîne  $\beta_{n-1} \subset B_{L_0}(M_{n-2})$  telle que  $M_{n-2} = \partial\beta_{n-1}$ .

Appliquée à  $M_{n-2} = \partial M_{n-1}$  avec  $L > L_0$ , cela conclut la preuve du théorème 0.2.

Expliquons comment démontrer la proposition 3.1. Partant de  $M_{n-2} \subset \tilde{M}$ , on commence par résoudre le problème de Plateau pour trouver une hypersurface minimale stable  $\Sigma_{n-1} \subset \tilde{M}$  bordant  $M_{n-2}$ . On a vu qu'en dimension  $n = 3$ ,  $\Sigma_{n-1} = \Sigma_2$  est contenue dans le  $\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$ -voisinage de son bord (corollaire 2.9) mais en dimension supérieure, il n'y a pas de raison que  $\Sigma_{n-1}$  soit contenue dans un  $L_0$ -voisinage de son bord : déjà, le diamètre des variétés de dimension 3 à courbure scalaire  $\geq C > 0$  n'est pas majoré. (Remarque : l'argument ci-dessus prouve qu'une variété fermée asphérique de dimension 3 n'est pas PSC). Supposons que  $d(p, \partial\Sigma_{n-1}) \geq L_0$  pour un point  $p \in \Sigma_{n-1}$  (la constante  $L_0$  est précisée à la fin de la section 3.1). On va modifier  $\Sigma_{n-1}$  pour obtenir une  $(n - 1)$ -chaîne  $\beta_{n-1}$  qui satisfait la conclusion de la proposition.

L'idée de Schoen et Yau dans leur proposition de stratégie était de chercher un domaine  $\Omega_{n-1} \subset \Sigma_{n-1}$  tel que les composantes de  $\partial\Omega_{n-1}$  soient loin de la droite  $\sigma$  et d'aire majorée, ce qui permettrait de les remplir loin de  $\sigma$  (cas  $n = 4$ ). Une idée est de chercher  $\partial\Omega_{n-1}$  sous forme de surfaces minimales, mais leur existence n'est pas évidente ni leur position. Chodosh et Li surmontent cette difficulté en utilisant des  $\mu$ -bulles, qui peuvent être localisées.

Dans la première étape, commune aux dimensions  $n = 4$  et 5, ils construisent donc une  $\mu$ -bulle tordue  $\Omega_{n-1} \subset \Sigma_{n-1}$ , contenue dans un  $L_1(g)$ -voisinage de  $\partial\Sigma_{n-1}$  et contenant  $\partial\Sigma_{n-1}$ . Dans les étapes suivantes, les contrôles géométriques sur  $\partial\Omega_{n-1}$  sont utilisés pour remplir  $\partial\Omega_{n-1}$  par une  $(n - 1)$ -chaîne  $\beta'_{n-1}$  dans son  $L_2(g)$ -voisinage. En dimension  $n = 4$ , ils peuvent majorer le diamètre des composantes de  $\partial\Omega_{n-1}$ , ce qui suffit pour obtenir ce remplissage. En dimension  $n = 5$ , il faut une idée supplémentaire. La  $(n - 1)$ -chaîne  $\beta_{n-1} := \Omega_{n-1} - \beta'_{n-1}$  remplit alors  $\partial\Sigma_{n-1}$  dans son  $(L_1 + L_2)$ -voisinage.





La  $\mu$ -bulle tordue  $\Omega_{n-1}$  est définie comme suit. L'équation de stabilité (5) implique l'existence de  $u \in C^\infty(\Sigma_{n-1})$ ,  $u > 0$  sur  $\Sigma_{n-1} \setminus \partial\Sigma_{n-1}$ , vérifiant (8). On enlève à  $\Sigma_{n-1}$  un petit voisinage de  $\partial\Sigma_{n-1}$  pour obtenir  $u > 0$  sur  $\Sigma_{n-1}$ . On pose  $L_1 = 2\pi$ .

LEMME 3.2. — *Il existe une  $\mu$ -bulle tordue  $\Omega_{n-1} \subset \Sigma_{n-1}$  (pour la fonction  $u$ ) telle que*

- (1)  $\Omega_{n-1} \supset \partial\Sigma_{n-1}$  et  $\Omega_{n-1} \subset B_{L_1}(\partial\Sigma_{n-1})$ .
- (2) La fonction  $h$  associée vérifie  $\frac{n}{n-1}h^2 - 2|\nabla h| \geq -1$  sur  $\partial\Omega_{n-1}$

Le lemme est prouvé en section 3.3 ci-après. En dimension  $n = 4$ , les composantes de  $\partial\Omega_{n-1}$  sont de dimension 2 donc uniformément bornées :

PROPOSITION 3.3 ( $\mu$ -bulle à bord de petit diamètre). — *Pour  $n = 4$ , chaque composante connexe de  $\Sigma_2 := \partial\Omega_3$  est de diamètre  $\leq \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$ .*

Cela découle de l'équation de stabilité de  $\Sigma_2 \times \mathbf{S}^1$  dans le produit tordu, qui implique que  $\Sigma_2$  vérifie l'hypothèse (21) de l'estimée de diamètre 2.10 (voir section 3.3). Les composantes connexes de  $\Sigma_2$  étant bornées, on les remplit dans  $\tilde{M}^4$ , en restant à distance bornée, grâce à la propriété de contractilité uniforme suivante (prouvée en section 3.2) :

LEMME 3.4 (Contractilité uniforme). — *Soit  $(\tilde{N}, \tilde{g})$  le revêtement universel d'une variété riemannienne fermée asphérique  $(N, g)$ . Pour tout  $r > 0$  il existe  $R = R(r) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $k \in \mathbf{N}$ . Soit  $\alpha$  un  $k$ -cycle dans  $\tilde{N}$  contenu dans  $B_r(p)$  pour  $p \in \tilde{N}$ , alors  $\alpha = \partial\beta$  pour  $\beta \subset B_R(p)$ .*

Le lemme donne une 3-chaîne  $\beta'_3 \subset B_{R(\frac{2}{\sqrt{3}}\pi)}(\Sigma_2)$  telle que  $\partial\beta'_3 = \Sigma_2$ . On termine la preuve de la proposition 3.1 en posant  $\beta_3 := \Omega_3 - \beta'_3$ . Nous avons  $\beta_3 \subset B_{L_1+R(\frac{2}{\sqrt{3}}\pi)}(\partial\Sigma_3)$  et  $\partial\beta_3 = \partial\Sigma_3 = M_2$  comme voulu. En dimension  $n = 4$ , cela conclut la preuve du théorème 0.2.

En dimension  $n = 5$ , les composantes de  $\Sigma_3 := \partial\Omega_{n-1}$  sont de dimension 3 donc non bornées. L'heuristique cependant est que  $\Sigma_3$  devrait ressembler à un graphe et pouvoir être remplie à distance bornée. Pour ce faire, Chodosh et Li introduisent une procédure ingénieuse « d'éminçage » (slice and dice) découpant  $\Sigma_3$  le long de surfaces minimales et de  $\mu$ -bulles tordues, en des composantes de diamètre borné (cf. Proposition 3.6). Le lemme de contractilité uniforme est alors appliqué aux bords de ces composantes pour obtenir des 3-cycles bornés, puis à ces 3-cycles pour obtenir une 4-chaîne à distance bornée de  $\Sigma_3$ , et une dernière fois pour obtenir une 4-chaîne  $\beta'_4$  bordant exactement  $\Sigma_3$  (le premier remplissage produit des 3-cycles superflus par rapport à  $\Sigma_3$ ), cf. Lemme 3.9. On repousse une présentation plus détaillée du cas  $n = 5$  à la section 3.4.

Dans les sections suivantes, nous détaillons les arguments esquissés ci-dessus. Les preuves du lemme 3.5 (construction de la paire  $\sigma$  et  $M_{n-1}$ ) et du lemme 3.4 de contractilité uniforme sont données en section 3.2. Dans la section 3.3 est prouvée l'existence de la  $\mu$ -bulle  $\Omega_{n-1} \subset \Sigma_{n-1}$  (lemme 3.2) et la majoration du diamètre sur

$\partial\Omega_3$  (proposition 3.3). La section 3.4 est consacrée à l'éminçage de  $\partial\Omega_4$  (proposition 3.6) et à son remplissage (lemme 3.9).

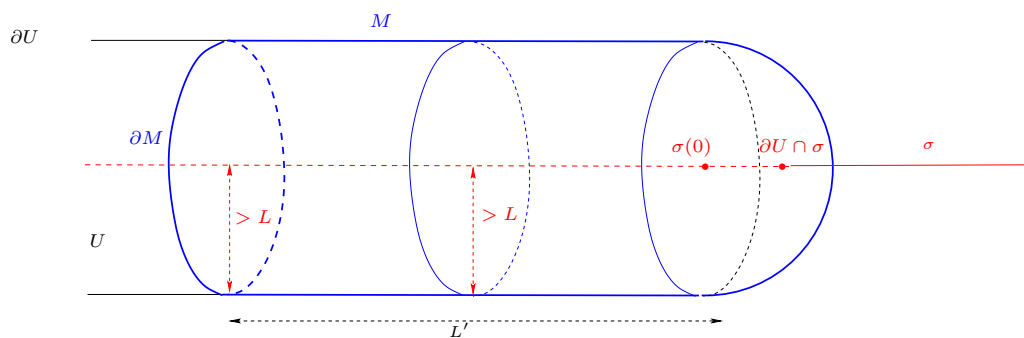
Nous pouvons fixer la constante  $L_0(M, g)$  de la proposition 3.1 comme  $L_0 = L_1 + L_2$  avec  $L_2 = R(3\pi) + R(10\pi + 2R(3\pi))$  où  $R$  est comme dans le lemme 3.4 de contractilité uniforme.

### 3.2. Lemmes topologiques

On justifie l'existence de la droite  $\sigma$  et de l'hypersurface  $M_{n-1}$  s'intersectant non trivialement, affirmée au début de la section 3.1.

LEMME 3.5. — Soit  $(\tilde{N}, \tilde{g})$  le revêtement universel d'une variété riemannienne fermée  $(N^n, g)$ . On suppose  $\tilde{N}$  non fermée et  $H_{n-1}(\tilde{N}) = 0$ . Alors il existe une droite  $\sigma$  dans  $\tilde{N}$  et pour tout  $L > 0$ , une hypersurface orientable fermée à bord  $M \subset \tilde{N}$  ayant une intersection algébrique non triviale avec  $\sigma$  et telle que  $d_{\tilde{g}}(\partial M, \sigma) > L$ .

Démonstration. — L'existence de la droite  $\sigma$  découle de la non compacité de  $\tilde{N}$  et de la compacité d'un domaine fondamental  $K$  : on se donne une suite de segments géodésiques de longueur  $\rightarrow \infty$ , on ramène leurs milieux dans  $K$  par des transformations de revêtement et on passe à la limite. Ensuite, soit  $U$  le  $2L$ -voisinage de  $\sigma((-\infty, 0])$ . Après une petite perturbation  $\partial U$  est une hypersurface lisse à distance  $> L$  de  $\sigma((-\infty, 0])$ . Puisque  $\sigma((-\infty, 0]) \subset U$  et que  $\sigma(t)$  sort de  $U$  pour  $t \rightarrow \infty$ , l'intersection algébrique de  $\partial U$  avec  $\sigma$  est non triviale.



On pose alors  $M = \partial U \cap B_{L'}(\sigma(0))$  où  $L' > L$  est assez grand pour que  $M$  contienne  $\partial U \cap \sigma$ . En particulier l'intersection algébrique  $M \cap \sigma$  est non triviale, ce qui assure que  $M$  est une hypersurface compacte, à bord non vide (sinon  $[M] \neq 0$  dans  $H_{n-1}(\tilde{N}) = 0$ ). L'hypothèse  $H_{n-1}(\tilde{N}) = 0$  est clairement nécessaire : avec  $N = \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$  et  $2L > \text{diam } \mathbf{S}^{n-1}$  on a  $M = \partial U \approx \mathbf{S}^{n-1}$ .  $\square$

Preuve du lemme 3.4. — Soient  $p_0 \in \tilde{N}$  et  $r > 0$ . Par contractilité de  $\tilde{N}$  il existe  $R_0(r) > 0$  tel que  $B_r(p_0)$  est contractile dans  $B_{R_0(r)}(p_0)$ . Par conséquent tout  $k$ -cycle  $\alpha \subset B_r(p_0)$  borde  $\beta \subset B_{R_0(r)}(p_0)$ . Toute boule  $B_r(p)$  peut être ramenée dans  $B_{r+\text{diam } N}(p_0)$  par une transformation de revêtement. On en déduit qu'un  $k$ -cycle  $\alpha \subset B_r(p)$  borde  $\beta \subset B_{R_0(r+\text{diam } N)+\text{diam } N}(p)$ .  $\square$

### 3.3. Construction de $\Omega_{n-1}$ et majoration du diamètre de $\partial\Omega_3$

*Preuve du lemme 3.2.* — On se donne  $\rho : \Sigma_{n-1} \rightarrow [0, +\infty[$  lisse 1-lipschitzienne telle que  $\rho = 0$  sur  $\partial\Sigma_{n-1}$  et  $\rho^{-1}(L_1)$  est une hypersurface fermée. En particulier  $\rho^{-1}([0, L_1])$  est contenu dans le  $L_1$ -voisinage (dans  $\Sigma_{n-1}$ ) de  $\partial\Sigma_{n-1}$ . On définit  $h$  sur  $\rho^{-1}([0, L_1]) \times \mathbf{S}^1$  par  $h(x, t) = h(x)$  où  $h$  est donné par (15) (avec  $L = L_1$ ). On a  $\frac{n}{n-1}h^2 - 2|\nabla h| \geq -1$  d'après (16). La proposition 2.5 donne une  $\mu$ -bulle  $\tilde{\Omega} = \Omega_{n-1} \times \mathbf{S}^1 \subset \Sigma_{n-1} \times \mathbf{S}^1$  pour le produit tordu. L'ouvert  $\Omega_{n-1} \subset \Sigma_{n-1}$  contient  $\partial\Sigma_{n-1}$  et  $\Omega_{n-1} \subset B_{L_1}(\partial\Sigma_{n-1})$ .  $\square$

*Preuve de la proposition 3.3.* — Les formules (7) et (8) combinées avec l'hypothèse  $R_{\bar{g}} \geq n$  impliquent que la courbure scalaire du produit tordu  $\bar{g} = g_{\Sigma_{n-1}} + u^2 dt^2$  vérifie  $R_{\bar{g}} \geq n$  sur  $\Sigma_{n-1} \times \mathbf{S}^1$ . Compte tenu du lemme 3.2(2), il s'ensuit

$$R_{\bar{g}} + \frac{4}{3}h^2 - 2|\nabla h| \geq 4 - 1 = 3.$$

L'équation de stabilité (13) du bord  $\partial\tilde{\Omega} = \Sigma_2 \times \mathbf{S}^1$  donne (pour la métrique induite par  $\bar{g}$ )

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Sigma_2 \times \mathbf{S}^1} |\nabla f|^2 &\geq \int_{\Sigma_2 \times \mathbf{S}^1} \left( R_{\bar{g}} + \frac{4}{3}h^2 + 2\langle \nabla h, \nu \rangle - R_{\Sigma_2 \times \mathbf{S}^1} \right) f^2 \\ &\geq \int_{\Sigma_2 \times \mathbf{S}^1} (3 - R_{\Sigma_2 \times \mathbf{S}^1}) f^2 \end{aligned}$$

pour toute fonction  $\mathbf{S}^1$ -invariante  $f \in C^\infty(\Sigma_2 \times \mathbf{S}^1)$ . Ceci implique l'existence d'une fonction  $\mathbf{S}^1$ -invariante  $v \in C^\infty(\Sigma_2 \times \mathbf{S}^1)$ ,  $v > 0$ , telle que

$$(22) \quad \Delta_{\Sigma_2 \times \mathbf{S}^1} v + \frac{1}{2} (3 - R_{\Sigma_2 \times \mathbf{S}^1}) v \leq 0$$

(pour le Laplacien et la courbure scalaire induits par  $\bar{g}$ ). En exprimant  $\Delta_{\Sigma_2 \times \mathbf{S}^1}$  et  $R_{\Sigma_2 \times \mathbf{S}^1}$  en termes de  $\Delta_{\Sigma_2}$  et  $R_{\Sigma_2}$  (ceux de la métrique induite par  $\tilde{g}$ ), un calcul permet de déduire de (22) que la fonction  $w := uv > 0$  sur  $\Sigma_2$  vérifie

$$\Delta_{\Sigma_2} w + \frac{1}{2} (3 - R_{\Sigma_2}) w \leq \frac{1}{2} w^{-1} |\nabla w|^2.$$

Par conséquent chaque composante connexe de  $(\Sigma_2, \tilde{g})$  satisfait l'hypothèse (21) de l'estimée de diamètre 2.10 (avec  $K_0 = 3/2$ ) et on conclut que leur diamètre est  $\leq \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$ .  $\square$

### 3.4. Le cas $n = 5$ : éminçage et remplissage de $\partial\Omega_4$

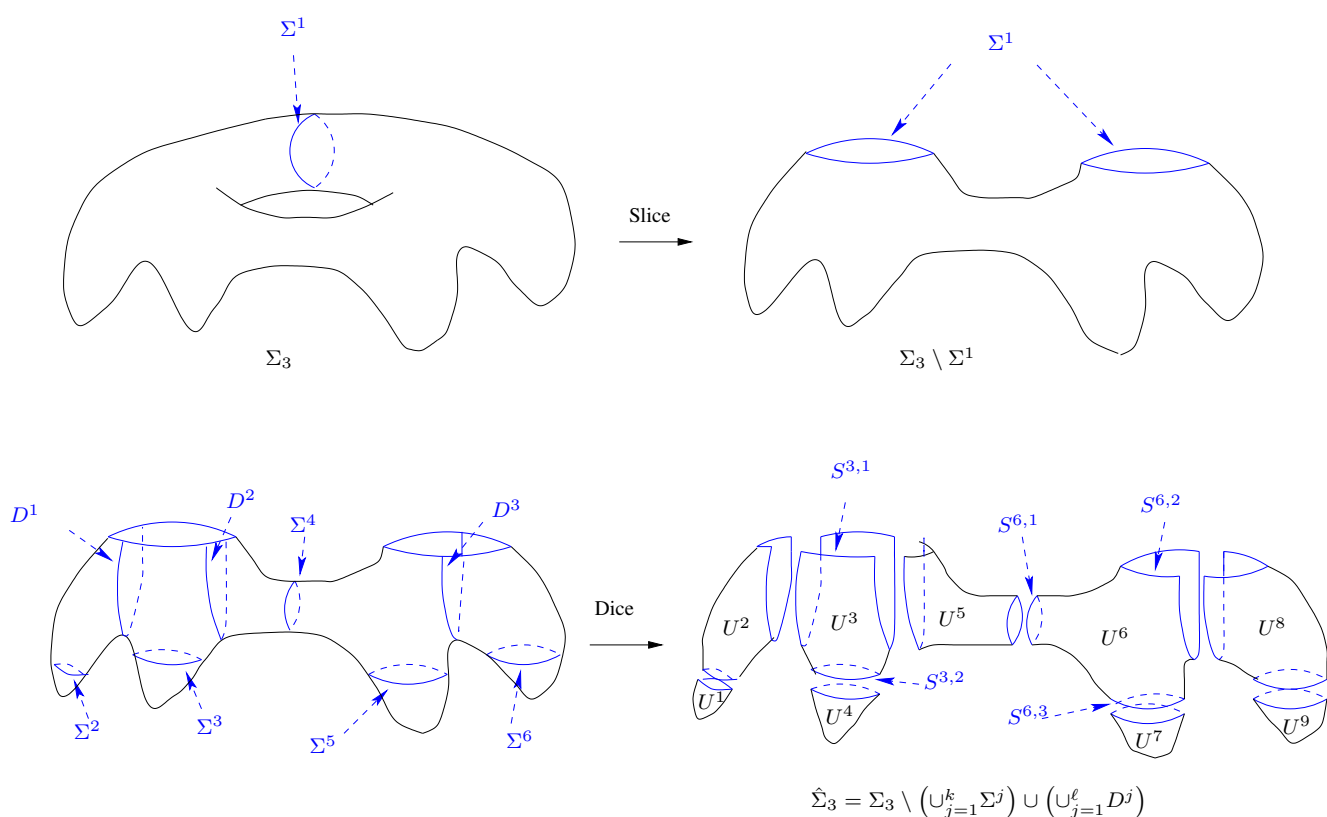
On reprend la preuve de la proposition 3.1. Rappelons qu'étant donnée  $M_3 \subset \tilde{M}^5$  fermée, on a défini une hypersurface minimale stable  $\Sigma_4 \subset (\tilde{M}^5, \tilde{g})$  telle que  $\partial\Sigma_4 = M_3$ . En supposant qu'il existe  $p \in \Sigma_4$  tel que  $d(p, \partial\Sigma_4) \geq L_0$ , le lemme 3.2 fournit une  $\mu$ -bulle tordue  $\Omega_4 \subset \Sigma_4$  dans le  $L_1$ -voisinage de  $\partial\Sigma_4$ . Il s'agit de remplir  $\Sigma_3 := \partial\Omega_4$  par une 4-chaîne  $\beta'_4$  restant à distance bornée. Comme expliqué auparavant, la nouvelle difficulté en dimension 5 est que  $\Sigma_3$  est de dimension 3 donc non uniformément bornée, on ne peut utiliser directement le lemme 3.4 de contractilité uniforme. L'idée de Chodosh et Li est de décomposer  $\Sigma_3$  en composantes de diamètre borné, lesquelles seront remplies

via la contractilité uniforme. Pour ce faire, Chodosh et Li introduisent une procédure « d'éminçage ».

*Procédure d'éminçage (slice and dice)*

La procédure a deux étapes :

- 1) (Slice) La variété  $\Sigma_3 = \partial\Omega_4$  est découpée le long de sphères minimales stables (pour une fonctionnelle d'aire tordue) en une variété compacte à bord  $\hat{\Sigma}_3$  à l'homologie plus simple. En particulier  $H_1(\hat{\Sigma}_3)$  est de torsion.
- 2) (Dice) On décompose  $\hat{\Sigma}_3$  le long de sphères et disques minimaux stables (bords de  $\mu$ -bulles tordues) en composantes de diamètre borné.



Avant de détailler la procédure, formalisons le résultat final :

**PROPOSITION 3.6.** — *Il existe des sphères plongées  $\Sigma^1, \dots, \Sigma^k \subset \Sigma_3$  de diamètre  $\text{diam } \Sigma^j \leq \pi$  et des disques plongés  $D^1, \dots, D^\ell \subset \Sigma_3$  de diamètre  $\text{diam } D^j \leq \pi$  tels que*

- leurs intérieurs sont disjoints deux à deux et  $\partial D^j \subset \bigcup_{i=1}^k \Sigma^i$  pour tout  $1 \leq j \leq \ell$ ,
- chaque composante connexe  $U^1, \dots, U^m$  de

$$\Sigma_3 \setminus \left( \bigcup_{j=1}^k \Sigma^j \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^l D^j \right)$$

*est de diamètre  $\text{diam } U^j \leq 10\pi$ ,*

- chaque composante connexe  $S^{j,1}, \dots, S^{j,n(j)}$  de  $\partial U^j$  est une sphère topologique,

— chaque sphère  $S^{j,i}$  intersecte exactement une sphère  $\Sigma^{u(j,i)}$  et au plus deux disques parmi les  $D^a$ . En particulier  $\text{diam } S^{j,i} \leq 3\pi$ .

*Idées de la preuve.* — Les sphères et disques de la décomposition sont obtenus en minimisant des fonctionnelles d’aire tordue et de  $\mu$ -bulles tordues pour une fonction  $v$  choisie comme suit. L’équation de stabilité de la  $\mu$ -bulle  $\Omega_4 \times \mathbf{S}^1 \subset \Sigma_4 \times \mathbf{S}^1$  pour le produit tordu  $g_{\Sigma_4} + u^2 dt^2$  implique l’existence d’une fonction  $\mathbf{S}^1$ -invariante  $v > 0$  sur  $\Sigma_3 \times \mathbf{S}^1$  telle que

$$\Delta_{\Sigma_3 \times \mathbf{S}^1} v + \frac{1}{2} (4 - R_{\Sigma_3 \times \mathbf{S}^1}) v \leq 0.$$

Pour toute surface fermée  $\Sigma \subset \Sigma_3$ , on considère la fonctionnelle d’aire tordue

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_{\Sigma} uv.$$

(à une constante multiplicative près, c’est l’aire de  $\Sigma \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$  dans  $(\Sigma_3 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1, g_{\Sigma_3} + u^2 dt^2 + v^2 ds^2)$ ). On a (Chodosh et Li, 2023a, Lemme 18) :

LEMME 3.7. — Si  $\Sigma \subset \Sigma_3$  est une surface connexe fermée orientable minimale stable pour  $\mathcal{A}$ , alors  $\Sigma$  est une sphère d’aire  $\leq 2\pi$  et de diamètre  $\leq \pi$ .

*Démonstration.* — Dans  $\Sigma_3 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$  muni du produit tordu, de courbure scalaire  $\geq 4$ , l’équation de stabilité (5) implique

$$(23) \quad 2 \int_{\Sigma \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1} |\nabla f|^2 uv dt ds \geq \int_{\Sigma \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1} (4 - R_{\Sigma \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1}) f^2 uv dt ds.$$

En l’évaluant sur une fonction  $f$  telle que  $f^2 uv = 1$  et en exprimant toutes les quantités géométriques en termes de la métrique induite sur  $\Sigma$ , on trouve après un peu de calculs

$$\int_{\Sigma} R_{\Sigma} \geq \int_{\Sigma} 4 = 4 \text{vol}(\Sigma)$$

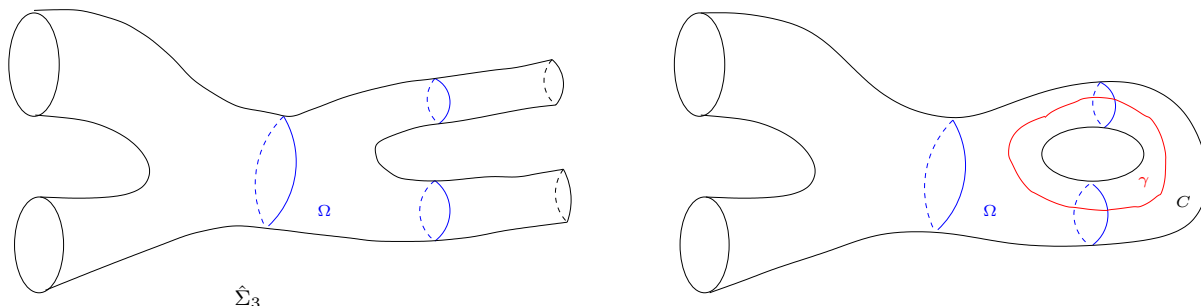
ce qui montre que  $\Sigma$  est une sphère d’aire  $\leq 2\pi$ . L’équation (23) implique l’existence d’une fonction  $w > 0$  sur  $\Sigma \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$  telle que  $\Delta_{\Sigma \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1} w + \frac{1}{2} (4 - R_{\Sigma \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1}) w \leq 0$ . La fonction est  $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ -invariante et un calcul montre que  $\lambda := uvw > 0$  sur  $\Sigma$  satisfait l’hypothèse (21) de l’estimée de diamètre 2.10. □

La première étape de l’éminçage (slice) décompose  $\Sigma_3$  le long de sphères minimales stables de  $\mathcal{A}$  pour simplifier l’homologie :

LEMME 3.8. — Il existe des surfaces fermées orientables disjointes  $\Sigma^1, \dots, \Sigma^r \subset \Sigma_3$  minimales stables pour  $\mathcal{A}$  telles que la variété à bord  $\hat{\Sigma}_3 = \Sigma_3 \setminus (\cup_{i=1}^r \Sigma^i)$  soit connexe et  $H_2(\partial \hat{\Sigma}_3) \rightarrow H_2(\hat{\Sigma}_3)$  soit surjectif.

*Démonstration.* — Supposons construites  $\Sigma^1, \dots, \Sigma^j \subset \Sigma_3$  et soit  $\hat{\Sigma}_3^{(j)} = \Sigma_3 \setminus (\cup_{i=1}^j \Sigma^i)$ . Tant que  $H_2(\partial \hat{\Sigma}_3^{(j)}) \rightarrow H_2(\hat{\Sigma}_3^{(j)})$  n’est pas surjectif, on peut trouver en minimisant la fonctionnelle  $\mathcal{A}$  une surface  $\Sigma^{j+1}$  dans l’intérieur de  $\hat{\Sigma}_3^{(j)}$ , minimale stable, qui n’est pas dans l’image de  $H_2(\partial \hat{\Sigma}_3^{(j)})$ . Un argument de compacité permet de montrer que le processus s’arrête. (cf. Chodosh et Li, 2023a, Lemme 19). □

Ceci implique que  $H_1(\hat{\Sigma}_3)$  est de torsion (voir Chodosh et Li, 2023a, Lemme 20). Conséquence : pour tout ouvert connexe  $\Omega \subset \hat{\Sigma}_3$  à bord lisse, chaque composante connexe de  $\hat{\Sigma}_3 \setminus \Omega$  intersecte une seule composante de  $\partial\Omega$ , comme illustré ici (à gauche) :



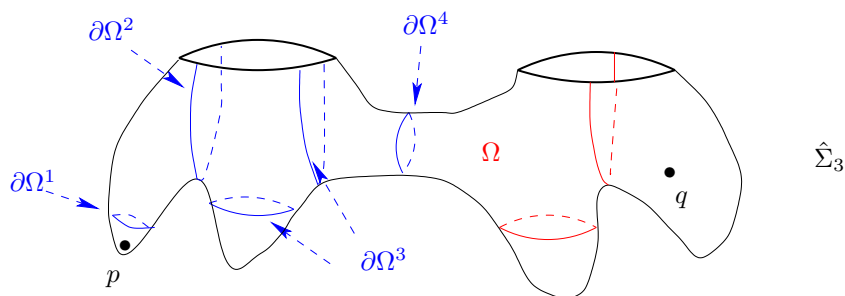
En effet si une composante  $C$  de  $\hat{\Sigma}_3 \setminus \Omega$  intersectait deux composantes de  $\partial\Omega$ , on pourrait connecter ces deux composantes par un chemin dans  $C$  et un chemin dans  $\Omega$ , formant un lacet  $\gamma$  intersectant une composante de  $\partial\Omega$  en un point exactement (figure à droite). En particulier  $[\gamma] \in H_1(\hat{\Sigma}_3)$  ne serait pas de torsion, ce qui est une contradiction.

La deuxième étape (dice) décompose la variété compacte à bord  $\hat{\Sigma}_3$  récursivement à l'aide de  $\mu$ -bulles. Partons d'un domaine  $\Omega^1 = B_\varepsilon(p)$  contenu dans l'intérieur de  $\hat{\Sigma}_3$ , et supposons construites des régions

$$\Omega^1 \subset \Omega^2 \subset \dots \subset \Omega^k$$

telles que

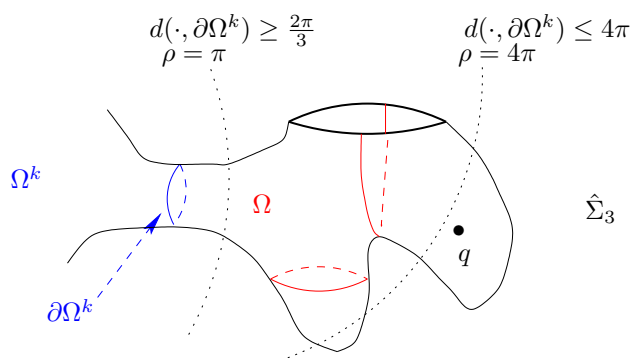
- (1)  $d_{\hat{\Sigma}_3}(\partial\Omega^{j+1}, \partial\Omega^j) \geq \frac{2\pi}{3}$ ,
- (2) Chaque composante de  $\Omega^{j+1} \setminus \Omega^j$  a un diamètre inférieur à  $10\pi$ ,
- (3) Chaque composante de  $\partial\Omega^j$  a un diamètre inférieur à  $\pi$ ,
- (4) Chaque composante de  $\partial\Omega^j$  est une sphère topologique ou un disque topologique à bord dans  $\partial\hat{\Sigma}_3$ .



Une région  $\Omega^{k+1} \supset \Omega^k$  vérifiant (1)-(4) est obtenue en ajoutant à  $\Omega^k$  une  $\mu$ -bulle tordue  $\Omega$  (pour la fonction  $uv$ ), possiblement à bord, définie comme suit. Supposons qu'il existe  $q \in \hat{\Sigma}_3$  tel que  $d(q, \Omega^k) > 4\pi$  (sinon on pose simplement  $\Omega^{k+1} = \hat{\Sigma}_3$ ). Posons

$$h(x) = -\tan\left(\frac{1}{3}(\rho(x) - \pi) - \frac{\pi}{2}\right),$$

où  $\rho$  régularise  $d(\cdot, \Omega^k)$ , est  $\frac{3}{2}$ -lipschitzienne et vérifie  $d(\cdot, \Omega^k) \leq \rho \leq \frac{3}{2}d(\cdot, \Omega^k)$  et  $\rho|_{\Omega^k} = 0$ .



En particulier  $h \rightarrow \infty$  sur  $\{\rho = \pi\}$ , où  $d(\cdot, \Omega^k) \geq \frac{2\pi}{3}$  et  $h \rightarrow -\infty$  sur  $\{\rho = 4\pi\}$ , où  $d(\cdot, \Omega^k) \leq 4\pi$ . De plus,  $\frac{3}{2}h^2 - 2|\nabla h| \geq -1$ . La version à bord de la proposition 2.5 (où  $\partial_0 M \subset \partial \hat{\Sigma}_3$ ) (cf. Chodosh et Li, 2023a, Proposition 15) montre l'existence d'une  $\mu$ -bulle tordue  $\Omega$  minimisant

$$\mu(\Omega) = \int_{\partial\Omega} uv - \int_{\Omega} uvh$$

et vérifiant  $\partial\Omega \subset \{\pi \leq \rho \leq 4\pi\} \subset \{\frac{2\pi}{3} \leq d(\cdot, \Omega^k) \leq 4\pi\}$ . La propriété (1) est donc satisfaite. Chaque composante connexe de  $\Omega$  est attachée à  $\Omega^k$  par une composante de  $\partial\Omega^k$ , de diamètre  $\leq \pi$ , et contenue dans le  $4\pi$ -voisinage de cette composante. Elle est donc de diamètre  $\leq 9\pi$ , prouvant (2). Soit  $\Sigma$  une composante connexe de  $\partial\Omega$ . Si  $\partial\Sigma = \emptyset$ , l'équation de stabilité permet de montrer, comme dans le lemme 3.7, que  $\Sigma$  est une sphère de diamètre  $\leq \pi$ . Si  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ , des arguments semblables conduisent à l'inégalité

$$\text{vol}(\Sigma) \leq \int_{\Sigma} K_{\Sigma} + \int_{\partial\Sigma} k_{\partial\Sigma} = 2\pi\chi(\Sigma)$$

et on conclut que  $\Sigma$  est un disque topologique (voir Chodosh et Li (2023a, pages 20, 21)). Comme dans le lemme 3.7, l'équation de stabilité permet de trouver une fonction  $w > 0$  sur  $\Sigma$  telle que  $uvw > 0$  vérifie (21), avec ici de plus la condition de bord nécessaire pour appliquer le lemme 2.10. Il s'ensuit que  $\Omega^{k+1}$  vérifie (3) et (4). Le point (1) assure que le processus s'arrête en temps fini et qu'au plus deux disques intersectent une composante de  $\hat{\Sigma}_3$ .

On peut conclure la preuve de la proposition 3.6. Soient  $D^1, \dots, D^{\ell}$  les disques parmi les composantes connexes des  $\partial\Omega^a$  et soient  $\Sigma^{r+1}, \dots, \Sigma^k$  les sphères. Ces disques et sphères sont deux à deux disjoints mais les disques peuvent intersecter les sphères  $\Sigma^1, \dots, \Sigma^r$  obtenues lors de l'étape « slice ». Une composante  $U^j$  correspond à une composante de  $\partial\Omega^{a+1} \setminus \Omega^a$ . Une composante de  $\partial U^j$  disjointe des disques est une sphère  $\Sigma^i$ . Une composante de  $\partial U^j$  intersectant un disque  $D^a$  est l'union de  $D^a$  et d'une sphère  $\Sigma^i$  privée d'un disque ou bien l'union de deux disques  $D^a, D^b$  et d'une sphère  $\Sigma^i$  privée de deux disques ( $i \leq r$ ). Dans tous les cas, c'est une sphère topologique de diamètre  $\leq 3\pi$ .

□

On rappelle que  $L_2 = R(3\pi) + R(10\pi + 2R(3\pi))$  où  $R(\cdot)$  est la fonction du lemme 3.4 de contractilité uniforme.

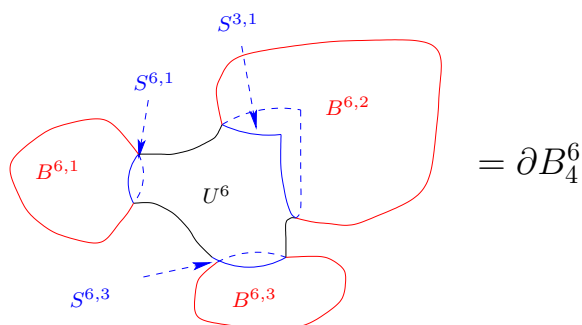
LEMME 3.9. —  $\Sigma_3 = \partial\Omega_4$  borde dans son  $L_2$ -voisinage : il existe une 4-chaîne  $\beta'_4 \subset B_{L_2}(\Sigma_3)$  telle que  $\Sigma_3 = \partial\beta'_4$ .

*Démonstration.* — Rappelons que  $S^{j,1}, \dots, S^{j,n(j)}$  sont les composantes connexes de  $\partial U^j$ . Par le lemme 3.4 de contractilité uniforme, il existe des 3-chaînes  $B^{j,i} \subset B_{R(3\pi)}(S^{j,i})$  dans  $\tilde{M}^5$  telles que  $S^{j,i} = \partial B^{j,i}$ . Il s'ensuit que

$$U^j - B^{j,1} - \dots - B^{j,n(j)}$$

est un 3-cycle de diamètre inférieur à  $10\pi + 2R(3\pi) =: D$ . Le lemme 3.4 donne une 4-chaîne  $B_4^j$  dans  $\tilde{M}^5$  de diamètre extrinsèque inférieur à  $R(D)$  telle que

$$U^j - \sum_{i=1}^{n(j)} B^{j,i} = \partial B_4^j$$

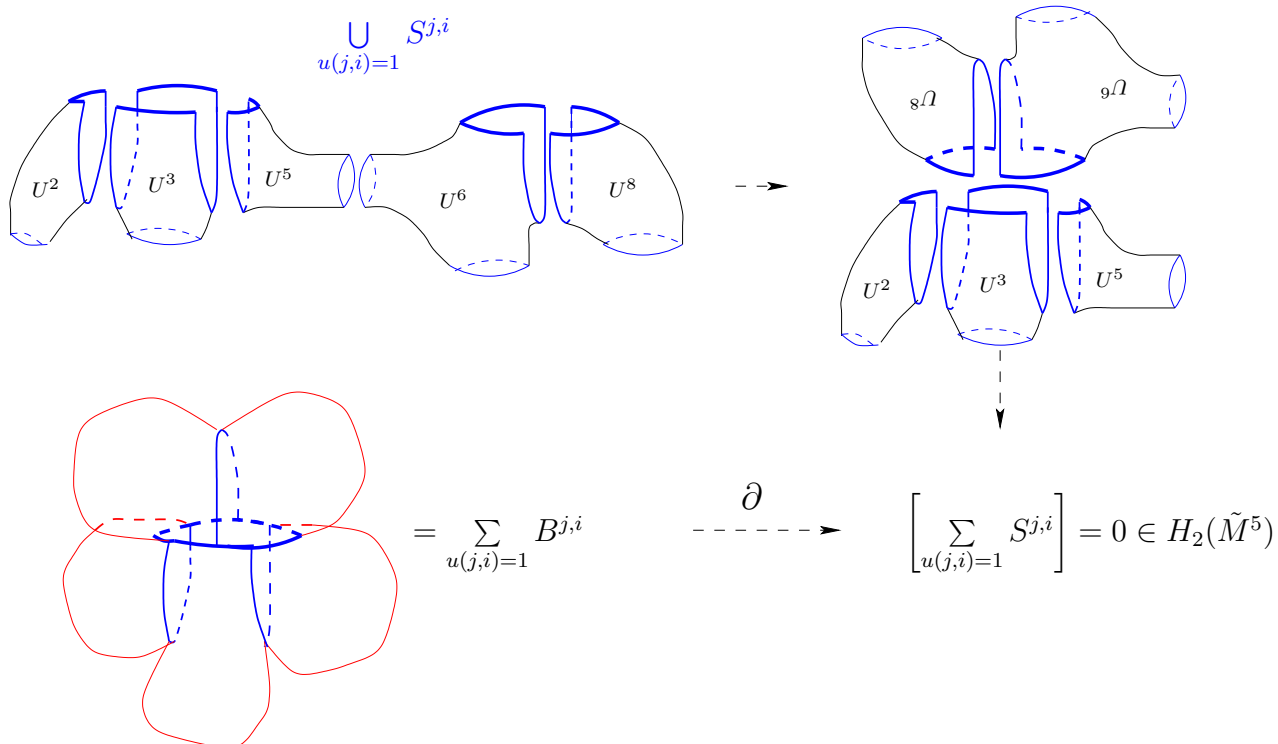


donc

$$\Sigma_3 = \partial \left( \sum_{j=1}^m B_4^j \right) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n(j)} B^{j,i}$$

où  $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n(j)} B^{j,i}$  est un 3-cycle à distance inférieure à  $R(3\pi)$  de  $\Sigma_3$ . Pour conclure, il reste à le remplir à distance bornée. Or ce 3-cycle est une somme de 3-cycles de diamètre inférieur à  $\pi + 2R(3\pi) \leq D$ . En effet chaque sphère  $S^{j,i}$  intersecte exactement une sphère  $\Sigma^{u(j,i)}$  parmi  $\Sigma^1, \dots, \Sigma^k$ . En regroupant les sphères  $S^{j,i}$  intersectant une sphère  $\Sigma^a$  donnée, on obtient que pour  $a \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\sum_{\{(j,i), u(j,i)=a\}} B^{j,i}$  est de diamètre inférieur à  $\pi + 2R(3\pi) \leq D$  (voir figure page suivante.)





De plus c'est un 3-cycle : on sait que  $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n(j)} B^{j,i}$  est un 3-cycle donc

$$(24) \quad \partial \left[ \sum_{a=1}^k \sum_{\{(j,i), u(j,i)=a\}} B^{j,i} \right] = 0,$$

et s'il existe  $a \in \{1, \dots, k\}$  tel que

$$\partial \left[ \sum_{\{(j,i), u(j,i)=a\}} B^{j,i} \right] \neq 0,$$

alors comme ce bord intersecte  $\Sigma^a$  seulement, il ne peut être annulé par les autres termes dans (24), qui n'intersectent que les  $\Sigma^b$  pour  $b \neq a$ , donc la somme dans (24) n'est pas nulle, ce qui est une contradiction. Il s'ensuit qu'il existe pour  $a \in \{1, \dots, k\}$  des 4-chaînes  $C_4^a$  dans le  $(R(3\pi) + R(D))$ -voisinage de  $\Sigma^a$  telles que

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n(j)} B^{j,i} = \partial \left[ \sum_{a=1}^k C_4^a \right].$$

On conclut que

$$\Sigma_3 = \partial \left( \sum_{j=1}^m B_4^j + \sum_{a=1}^k C_4^a \right)$$

est le bord d'une 4-chaîne  $\beta'_4$  contenue dans son  $L_2$ -voisinage. □

On conclut la preuve de la proposition 3.1 en posant  $\beta_4 = \Omega_4 - \beta'_4$ .

#### 4. CLASSIFICATION DE VARIÉTÉS PSC, $n \in \{4, 5\}$

Le point essentiel pour démontrer le théorème 0.4 est de prouver que  $\pi_1(N)$  est virtuellement libre. Il existe alors un revêtement fini  $\hat{N}$  tel que  $\pi_1(\hat{N})$  est libre de type fini et vérifie  $\pi_2(\hat{N}) = \cdots = \pi_{n-2}(\hat{N}) = 0$ . La conclusion, c'est-à-dire le fait que  $\hat{N}$  est homotopiquement équivalent à  $\mathbf{S}^n$  ou à une somme connexe de  $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^1$ , découle ensuite de Gadgil et Seshadri (2009, Sections 2 et 3). Il reste donc à démontrer :

**THÉORÈME 4.1.** — *Si  $(N, g)$  satisfait les hypothèses du théorème 0.4 alors  $\pi_1(N)$  est virtuellement libre.*

*Démonstration.* — Expliquons la structure de la preuve. Le point de départ est la propriété de remplissage à distance bornée, établie pour des variétés asphériques supposées PSC (Proposition 3.1) et qui reste valable ici (cf. Proposition 4.2 ci-dessous). Cette propriété implique que dans le revêtement universel de  $(N, g)$ , les composantes connexes des sphères géodésiques sont de diamètre  $\leq 20L$  (cf. Proposition 4.4). Cette majoration du diamètre permet de montrer que le nombre de bouts de tout sous-groupe de type fini de  $\pi_1 N$  est différent de 1 (cf. Proposition 4.7). Le théorème d'accessibilité de Dunwoody (1985) et la théorie de Bass-Serre permettent de conclure (cf. Proposition 4.6).

**PROPOSITION 4.2** (Remplissage à distance bornée). — *Pour  $n \in \{4, 5\}$ , soit  $(N^n, g)$  une variété riemannienne fermée PSC telle que  $\pi_2(N) = \cdots = \pi_{n-2}(N) = 0$ . Alors il existe  $L = L(n, g) > 0$  tel que toute sous-variété fermée  $M_{n-2} \subset (\tilde{N}, \tilde{g})$  de dimension  $n - 2$  borde dans son  $L$ -voisinage.*

*Démonstration de la proposition.* — Elle est identique à celle de la proposition 3.1, une fois remplacé le lemme 3.4 de contractilité uniforme par le lemme 4.3 ci-dessous. En effet, l'hypothèse topologique sur la variété  $N^n$  implique  $\pi_1(\tilde{N}) = \cdots = \pi_{n-2}(\tilde{N}) = 0$ . Il découle du théorème de Hurewicz<sup>(14)</sup> que  $H_1(\tilde{N}) = \cdots = H_{n-2}(\tilde{N}) = 0$ . On a alors :

**LEMME 4.3.** — *Pour tout  $r > 0$  il existe  $R(r) > 0$  tel que pour tout  $x \in \tilde{N}$  et  $k \in \{0, \dots, n - 2\}$ , l'application canonique  $H_k(B_r(x), \mathbf{Z}) \rightarrow H_k(B_{R(r)}(x), \mathbf{Z})$  est nulle.*

*Preuve du lemme.* — Fixons  $x_0 \in \tilde{N}$ . Soit  $r > 0$ , il existe une sous-variété compacte  $K$  contenant  $B_r(x_0)$ . D'après Hatcher (2002, A8, A9), les groupes d'homologie  $H_k(K)$  sont de génération finie. Fixons un système de générateurs. Comme  $H_k(\tilde{N}) = 0$ , on peut trouver  $R_1 = R_1(r) > 0$  tel que ces générateurs soient nuls dans  $H_k(B_{R_1}(x_0), \mathbf{Z})$ , et par conséquent  $H_k(B_r(x_0), \mathbf{Z}) \rightarrow H_k(B_{R_1}(x_0), \mathbf{Z})$  est nulle. L'uniformité s'obtient comme dans le lemme 3.4 par compacité du domaine fondamental et action des transformations de revêtement.  $\square$

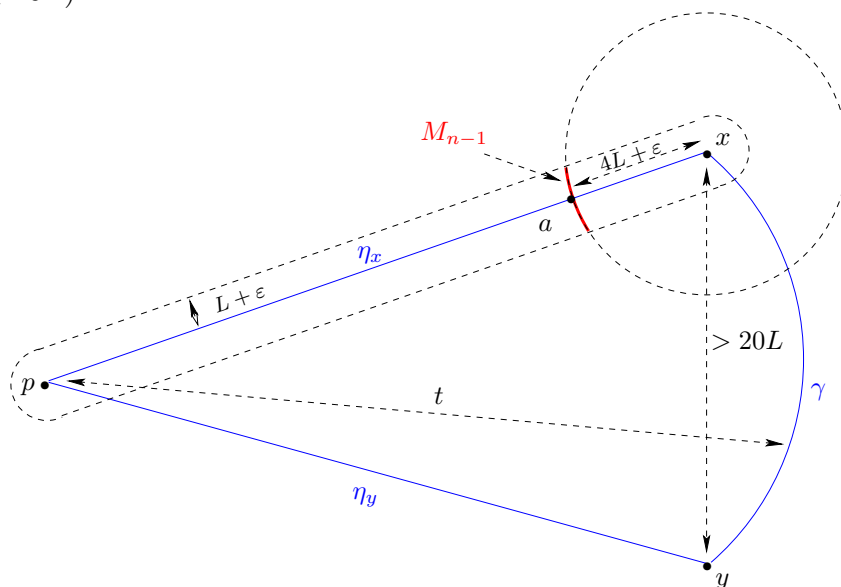
14. Qui affirme : si  $\pi_i(X) = 0$  pour tout  $i < m$  alors  $H_i(X) \approx \pi_i(X)$  pour tout  $i < m$  et  $H_m(X) \approx \pi_m(X)$ .

Dans la preuve de la proposition 3.1, l'asphéricité n'intervient que pour obtenir cette propriété de remplissage uniforme des  $k$ -cycles, utilisée pour  $k \leq n - 2$  seulement. On peut donc la reproduire *verbatim* pour obtenir la proposition 4.2.  $\square$

On poursuit la démonstration du théorème, la propriété de remplissage à distance bornée étant désormais la seule chose nécessaire. Le second élément essentiel de la preuve est le résultat suivant, inspiré par Gromov et Lawson (1983, Corollaire 10.11) et Alpert, Balitskiy et Guth (2021). Pour  $p \in \tilde{N}$ , on note  $d_p = d_{\tilde{g}}(p, \cdot)$ , la distance à  $p$  dans le revêtement universel.

**PROPOSITION 4.4.** — *Soit  $(N^n, g)$  une variété riemannienne fermée telle que toute sous-variété fermée  $M_{n-2} \subset (\tilde{N}, \tilde{g})$  de dimension  $n - 2$  borde dans son  $L$ -voisinage. Soient  $p \in \tilde{N}$  et  $t > 0$  alors chaque composante connexe de  $d_p^{-1}(t)$  est de diamètre  $\leq 20L$ .*

*Démonstration.* — Par contradiction, on suppose qu'il existe une courbe  $\gamma \subset d_p^{-1}(t)$  joignant  $x, y \in d_p^{-1}(t)$  où  $d_{\tilde{g}}(x, y) > 20L$ . Puisque le diamètre extrinsèque des sphères de rayon  $t$  est  $\leq 2t$ , on a  $t \geq 10L$ . Soient  $\eta_x, \eta_y$  deux géodésiques minimisantes entre  $p$  et  $x, y$  respectivement. Nous allons construire un  $(n - 1)$ -cycle  $C_{n-1}$  intersectant le lacet  $T$  formé de  $\eta_x, \gamma$  et  $\eta_y^{-1}$  en un point unique, ce qui impliquera  $[T] \neq 0 \in \pi_1(\tilde{N}) = 0$ , ce qui est une contradiction. Supposons, pour simplifier, qu'il existe  $0 < \varepsilon < L$  tel que  $\partial B_{4L+\varepsilon}(x)$  et  $\partial B_{L+\varepsilon}(\eta_x)$  soient des hypersurfaces lisses<sup>(15)</sup> d'intersection transverse (possiblement vide). Considérons l'hypersurface  $M_{n-1} := \partial B_{4L+\varepsilon}(x) \cap B_{L+\varepsilon}(\eta_x)$  (non vide car  $t \geq 10L$ ).



L'intersection de l'hypersurface  $M_{n-1}$  avec la géodésique  $\eta_x$  est un point unique  $a \in \eta_x$ . Si le bord  $\partial M_{n-1}$  est non vide, l'hypothèse de remplissage donne une  $(n - 1)$ -chaîne  $\beta_{n-1}$  telle que  $\partial \beta_{n-1} = \partial M_{n-1}$  et  $\beta_{n-1} \subset B_L(\partial M_{n-1})$ . Comme  $d(\partial M_{n-1}, \eta_x) = L + \varepsilon > L$ ,

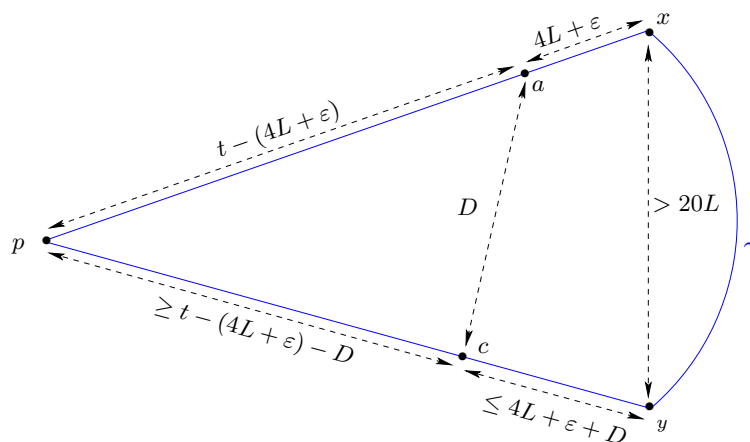
15. Pour le cas général faudrait travailler des régularisations des fonctions distances.

on en déduit que  $\beta_{n-1}$  est disjoint de  $\eta_x$ . Le cycle  $C_{n-1} := M_{n-1} - \beta_{n-1}$  intersecte donc  $\eta_x$  au point  $a$  uniquement. Si le bord  $\partial M_{n-1}$  est vide, on pose  $C_{n-1} = M_{n-1}$  de sorte que  $C_{n-1} \cap \eta_x = \{a\}$  également. Il reste à montrer que  $C_{n-1}$  est disjoint de  $\gamma \cup \eta_y$  pour conclure. Comme  $\beta_{n-1} \subset B_L(M_{n-1})$ , il suffit de prouver que  $d(M_{n-1}, \gamma \cup \eta_y) > L$ .

Pour cela on montre que  $M_{n-1}$  est dans le  $2(L+\varepsilon)$ -voisinage de  $a$  puis que  $d(a, \gamma \cup \eta_y) \geq 4L + \varepsilon$ .

Soit  $b \in M_{n-1}$ . Puisque  $b \in B_{L+\varepsilon}(\eta_x)$  il existe  $b' \in \eta_x$  tel que  $d(b, b') < L + \varepsilon$ . Et comme  $d(b, x) = 4L + \varepsilon$ , il vient  $d(b', x) \in [-(L + \varepsilon), L + \varepsilon] + 4L + \varepsilon$ . Comme  $a \in \eta_x$  et  $d(a, x) = 4L + \varepsilon$ , il vient  $d(a, b') \leq L + \varepsilon$  et finalement  $d(a, b) \leq 2(L + \varepsilon)$  comme voulu.

Il reste à montrer que  $d(a, \gamma \cup \eta_y) \geq 4L + \varepsilon$ .



Comme  $a$  appartient à la sphère géodésique centrée en  $p$  de rayon  $t - (4L + \varepsilon)$ , il est à distance  $\geq 4L + \varepsilon$  de  $\gamma \subset d_p^{-1}(t)$ , i.e.  $d(a, \gamma) \geq 4L + \varepsilon$ .

Soit  $c \in \eta_y$  et notons  $D := d(a, c)$ . De  $d(p, c) \geq d(p, a) - d(a, c) \geq t - (4L + \varepsilon) - d$  et  $d(p, y) = t$  il vient  $d(c, y) \leq 4L + \varepsilon + D$ . Mais alors

$$20L < d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, c) + d(c, y) \leq 4L + \varepsilon + D + 4L + \varepsilon + D$$

ce qui implique  $D \geq 5L$  donc  $d(a, \eta_y) \geq 4L + \varepsilon$  comme voulu.  $\square$

*Remarque 4.5.* — La proposition 4.4 implique que la 1-largeur d’Urysohn de  $(\tilde{N}, \tilde{g})$  est inférieure à  $20L$ , prouvant le théorème 0.7. En effet on obtient un graphe métrique en écrasant chaque composante connexe de  $d_p^{-1}(t)$  sur un point (après régularisation), cf. Gromov et Lawson (1983, Corollaire 10.11).

**PROPOSITION 4.6.** — Soit  $(N^n, g)$  une variété riemannienne fermée vérifiant la conclusion de la proposition 4.4. Alors  $\pi_1(N)$  est virtuellement libre.

*Démonstration.* — La preuve suit la stratégie de Ramachandran et Wolfson (2010). Elle repose sur la théorie de Bass-Serre et la notion de *nombre de bouts* d’un groupe. Si  $G$  est un groupe, son nombre de bouts,  $e(G)$ , est le nombre de bouts topologiques de  $\bar{K}$ , où  $\bar{K} \rightarrow K$  est un revêtement régulier d’un complexe simplicial fini, tel que  $G$  soit

le groupe de transformations de revêtement <sup>(16)</sup>. Un groupe de type fini a 0, 1, 2 ou une infinité de bouts (Epstein, 1962) ou (Geoghegan, 2008, Proposition 13.5.7). Le nombre de bouts est nul si et seulement si le groupe est fini. Le point essentiel à montrer est le suivant.

**PROPOSITION 4.7.** — *Soit  $(N^n, g)$  une variété riemannienne fermée vérifiant la conclusion de la proposition 4.4. Si  $G$  est un sous-groupe de type fini de  $\pi_1(N)$  alors  $e(G) \neq 1$ .*

Terminons la preuve de la proposition 4.6 avant de démontrer la proposition 4.7. D’après Dunwoody (1985), tout groupe  $G$  de type fini est *accessible* : il existe une action de  $G$  sur un arbre  $T$  telle que tout stabilisateur d’arête  $G_e$  est fini et tout stabilisateur de sommets  $G_v$  est de type fini et vérifie  $e(G_v) \in \{0, 1\}$ . Le résultat de Dunwoody s’applique à  $\pi_1(N)$  et en y ajoutant la proposition 4.7 on conclut que  $e(G_v) = 0$ , *i.e.*  $G_v$  est fini pour tout sommet  $v$  <sup>(17)</sup>. Il suit alors de Serre (1977, Proposition 11, Section 2.6) que  $\pi_1 N$  est virtuellement libre. □

*Preuve de la proposition 4.7.* — On raisonne par l’absurde. On suppose qu’il existe un sous-groupe  $G$  de  $\pi_1(N)$  de type fini tel que  $e(G) = 1$ . Le groupe  $G$  est infini sinon  $e(G) = 0$ . On commence par construire un revêtement  $j : \bar{K} \rightarrow K$  d’un complexe simplicial fini dont le groupe de transformation de revêtement est  $G$ . On part d’un revêtement  $p : N_0 \rightarrow N$  tel que  $p_\#(\pi_1(N_0)) = G$ , alors  $\pi_1(N_0)$  est isomorphe à  $G$ . Comme  $G$  est de type fini, il existe une sous-variété compacte  $K \subset N_0$  contenant les générateurs de  $\pi_1(N_0)$ . Soit  $i : K \rightarrow N_0$  l’inclusion. On a l’isomorphisme  $\pi_1(K)/\ker i_\# \approx \pi_1(N_0) \approx G$ . On choisit un revêtement  $j : \bar{K} \rightarrow K$  tel que  $j_\#(\pi_1(\bar{K})) = \ker i_\#$ . Comme  $\ker i_\#$  est distingué, le revêtement est régulier et son groupe de transformations est isomorphe à  $\pi_1(K)/\ker i_\# \approx G$ . Par conséquent  $\bar{K}$  est non compact. On peut relever  $i$  en  $\tilde{i} : \bar{K} \rightarrow \tilde{N}$ , où  $\tilde{N}$  est le revêtement universel, puisque  $i_\# \circ j_\#$  est nulle.

$$\begin{array}{ccc} \bar{K} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{N} \\ j \downarrow & & \downarrow \tilde{p} \\ K & \xrightarrow{i} & N_0 \\ & & \downarrow p \\ & & N \end{array}$$

**LEMME 4.8.** —  *$\tilde{i}$  est un plongement propre.*

*Démonstration.* — Pour prouver l’injectivité supposons que  $\tilde{i}(a) = \tilde{i}(b)$ . Soit  $\gamma \subset \bar{K}$  un chemin joignant  $a$  et  $b$ . Alors  $\tilde{i}(\gamma) \subset \tilde{N}$  est un lacet homotopiquement trivial envoyé

16. C’est aussi le nombre de bouts du graphe de Cayley de  $G$ , *cf.* Geoghegan (2008, Propositions 13.5.1 et 13.5.12).

17. Dans la terminologie de la théorie de Bass-Serre,  $\pi_1(N)$  est le groupe fondamental d’un graphe fini de groupes finis.

par  $\tilde{p}$  sur  $i \circ j(\gamma)$ . Il s'ensuit que  $j(\gamma)$  est un lacet et que  $j_{\#}[\gamma] \in \ker i_{\#}$  donc que  $j(\gamma)$  se relève en un lacet dans  $\bar{K}$ , *i.e.*  $a = b$ .

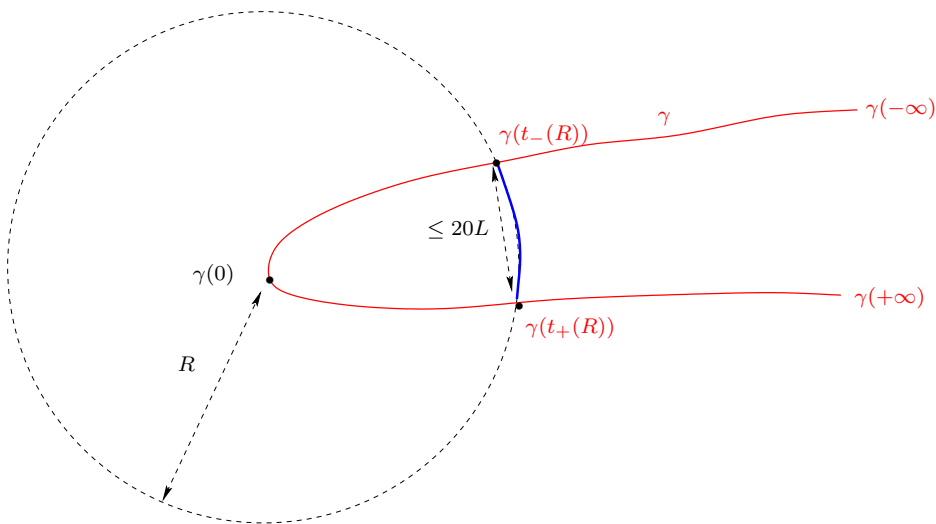
Montrons que  $\tilde{i}$  est fermée. Soit  $\tilde{i}(a_n)$  convergeant vers  $y \in \tilde{N}$ . On peut supposer par compacité de  $K$  que  $j(a_n)$  converge vers  $a \in K$ . On a alors  $\tilde{p}(y) = a$ . Soit  $V \subset N_0$  un voisinage de  $a$  tel qu'il existe un relvé  $\tilde{V} \subset \tilde{N}$  contenant  $y$  tel que  $\tilde{p} : \tilde{V} \rightarrow V$  soit un homéomorphisme. Soit  $W \subset K \cap V$  un voisinage de  $a$  tel que  $j^{-1}(W) = \cup_{k \in \mathbf{N}} W_k$  et  $j : W_k \rightarrow W$  est un homéomorphisme. Dès que  $j(a_n) \in W_k$ , il existe un relevé  $\bar{a} \in W_k$  de  $a$  vérifiant  $\tilde{i}(\bar{a}) = y$ . Ceci montre que  $\tilde{i}$  est fermée, et en utilisant l'injectivité qu'elle est propre.  $\square$

De la compacité de  $K$  et de la propriété de  $\tilde{i}$  on déduit facilement que :  
*Pour tout  $r > 0$  il existe  $R(r) > 0$  tel que pour tout  $a, b \in \bar{K}$  avec  $d_{\tilde{N}}(a, b) \leq r$  on a  $d_{\bar{K}}(a, b) \leq R(r)$ .*

En argumentant comme dans le lemme 3.5 on montre que  $\bar{K}$  contient une droite  $\sigma$ . Soit  $\gamma = \tilde{i} \circ \sigma$ . D'après le lemme 4.8,  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \tilde{N}$  est propre. Pour  $R > 0$ , on considère la boule géodésique  $B_R(\gamma(0)) \subset \tilde{N}$  et on définit

$$\begin{aligned} t_-(R) &= \max\{t : \gamma(-\infty, t) \cap B_R(\gamma(0)) = \emptyset\} \\ t_+(R) &= \min\{t : \gamma(t, +\infty) \cap B_R(\gamma(0)) = \emptyset\} \end{aligned}$$

On a  $t_{\pm}(R) \rightarrow \pm\infty$  quant  $R \rightarrow \infty$ . Puisque  $e(G) = 1$ ,  $\gamma(t_-(R))$  et  $\gamma(t_+(R))$  sont dans la même composante connexe de  $\bar{K} \setminus B_R(\gamma(0))$ . Et comme  $\tilde{N}$  est simplement connexe, on peut trouver un chemin dans  $\partial B_R(\gamma(0)) \subset \tilde{N}$  les reliant.



Par l'hypothèse sur  $(\tilde{N}, \tilde{g})$  on a alors

$$d_{\tilde{N}}(\gamma(t_{\pm}(R)), \gamma(t_{\pm}(R))) \leq 20L$$

d'où

$$d_{\bar{K}}(\gamma(t_{\pm}(R)), \gamma(t_{\pm}(R))) \leq R(20L)$$

ce qui contredit

$$d_{\bar{K}}(\gamma(t_-(R)), \gamma(t_+(R))) = |t_-(R) - t_+(R)| \rightarrow \infty.$$

□

Ceci conclut la preuve du théorème 4.1. □

## RÉFÉRENCES

- Hannah Alpert, Alexey Balitskiy et Larry Guth (2021). *Macroscopic scalar curvature and codimension 2 width*. arXiv : [2112.04594](https://arxiv.org/abs/2112.04594) [[math.DG](#)].
- Hubert Bray, Simon Brendle et Andre Neves (2010). « Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds », *Comm. Anal. Geom.* **18** (4), p. 821-830.
- Jeff Cheeger et Detlef Gromoll (1971/72). « The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature », *J. Differential Geometry* **6**, p. 119-128.
- Otis Chodosh (2021). *Stable minimal surfaces and positive scalar curvature*. eprint : <https://web.stanford.edu/~ochodosh/Math258-min-surf.pdf>.
- Otis Chodosh et Chao Li (2023a). *Generalized soap bubbles and the topology of manifolds with positive scalar curvature*. arXiv : [2008.11888](https://arxiv.org/abs/2008.11888) [[math.DG](#)].
- (2023b). « Recent results concerning topological obstructions to positive scalar curvature », in : *Perspectives in scalar curvature. Vol. 2*. Singapore : World Scientific, p. 215-230.
- Otis Chodosh, Chao Li et Yevgeny Liokumovich (2023). « Classifying sufficiently connected PSC manifolds in 4 and 5 dimensions », *Geom. Topol.* **27** (4), p. 1635-1655.
- Martin J. Dunwoody (1985). « The accessibility of finitely presented groups », *Invent. Math.* **81**, p. 449-457.
- David B. A. Epstein (1962). « Ends », in : *Topology of 3-manifolds and related topics. Proceedings of the University of Georgia Institute 1961*. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, Inc., p. 110-117.
- Doris Fischer-Colbrie et Richard Schoen (1980). « The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature », *Commun. Pure Appl. Math.* **33**, p. 199-211.
- Siddhartha Gadgil et Harish Seshadri (2009). « On the topology of manifolds with positive isotropic curvature », *Proc. Am. Math. Soc.* **137** (5), p. 1807-1811.
- Ross Geoghegan (2008). *Topological methods in group theory*. T. 243. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, p. xiv+473.

- Mikhael Gromov (1996). « Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures », in : *Functional analysis on the eve of the 21st century. Volume II. In honor of the eightieth birthday of I. M. Gelfand. Proceedings of a conference, held at Rutgers University, New Brunswick, NJ, USA, October 24-27, 1993*. Boston, MA : Birkhäuser, p. 1-213.
- (2018). « Metric inequalities with scalar curvature », *Geom. Funct. Anal.* **28** (3), p. 645-726.
- (2020). *No metrics with Positive Scalar Curvatures on Aspherical 5-Manifolds*. arXiv : [2009.05332](https://arxiv.org/abs/2009.05332) [[math.DG](#)].
- (2021). *Four Lectures on Scalar Curvature*. arXiv : [1908.10612](https://arxiv.org/abs/1908.10612) [[math.DG](#)].
- Mikhael Gromov et H. Blaine Lawson Jr. (1980). « The classification of simply connected manifolds of positive scalar curvature », *Ann. of Math. (2)* **111** (3), p. 423-434.
- (1983). « Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (58), p. 83-196.
- Allen Hatcher (2002). *Algebraic topology*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Jerry L. Kazdan et F. W. Warner (1975). « Prescribing curvatures », in : *Differential geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVII, Part 2, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1973)*. T. Vol. XXVII, Part 2. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 309-319.
- Mohan Ramachandran et Jon Wolfson (2010). « Fill radius and the fundamental group », *J. Topol. Anal.* **2** (1), p. 99-107.
- Richard Schoen et Shing-Tung Yau (1979a). « Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with nonnegative scalar curvature », *Ann. of Math. (2)* **110** (1), p. 127-142.
- (1979b). « On the structure of manifolds with positive scalar curvature », *Manuscripta Math.* **28** (1-3), p. 159-183.
- (1982). *Complete three dimensional manifolds with positive Ricci curvature and scalar curvature*. Semin. differential geometry, Ann. Math. Stud. 102, 209-228 (1982).
- (1983). « The existence of a black hole due to condensation of matter », *Comm. Math. Phys.* **90** (4), p. 575-579.
- (1987). « The structure of manifolds with positive scalar curvature », in : *Directions in partial differential equations (Madison, WI, 1985)*. T. 54. Publ. Math. Res. Center Univ. Wisconsin. Academic Press, Boston, MA, p. 235-242.
- (2022). « Positive scalar curvature and minimal hypersurface singularities », in : *Surveys in differential geometry 2019. Differential geometry, Calabi-Yau theory, and general relativity. Part 2*. T. 24. Surv. Differ. Geom. Int. Press, Boston, MA, p. 441-480.
- Jean-Pierre Serre (1977). *Arbres, amalgames,  $SL_2$* . T. 46. Astérisque. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass. Société Mathématique de France, Paris, p. 189.



- Leon Simon (1983). *Lectures on geometric measure theory*. T. 3. Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ. Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, Canberra.
- Italo Tamanini (1984). *Regularity results for almost minimal oriented hypersurfaces in  $\mathbb{R}^n$* . Lecce : Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce.
- Jian Wang (2023). « Topological characterization of contractible 3-manifolds with positive scalar curvature », in : *Perspectives in scalar curvature. Vol. 2*. Singapore : World Scientific, p. 313-321.
- Xin Zhou et Jonathan Zhu (2020). « Existence of hypersurfaces with prescribed mean curvature I—generic min-max », *Camb. J. Math.* **8** (2), p. 311-362.
- Jintian Zhu (2021). « Width estimate and doubly warped product », *Trans. Amer. Math. Soc.* **374** (2), p. 1497-1511.

Laurent Bessières

Université de Bordeaux

Institut de Mathématiques de Bordeaux

351 Cours de La Libération

33405 Talence

*E-mail* :

laurent.bessieres@math.u-bordeaux.fr