Algèbre effective
utilisation de WIMS en L3 MFA

Le cours : groupes abéliens de type fini

On démontre dans le cours le théorème sur la structure des groupes abéliens finis. On est amené à calculer **le nombre de sous-groupes d'ordre donné** ou **d'éléments d'ordre donné**.

Les TD

On pose la question : combien y a-t-il d'éléments d'ordre p dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Peu de réponses satisfaisantes.

Des exercices WIMS

Voici alors des exercices WIMS qui permettent de faire le point :

Nombre d'éléments d'ordre donné

Exercice.

Combien le groupe

$$\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/56\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/45\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/70\mathbb{Z}$$

a-t-il d'éléments d'ordre 4 ?

Envoyer la réponse

Recommencer l'exercice

Exercice.

Combien y a-t-il de sous-groupes d'ordre 3^3 dans

$$\mathbb{Z}/11\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/33\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/21\,\mathbb{Z}$$

D'autres exercices sur le même sujet

Exercice.

Soient

$$A = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$$
$$B = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

Soit Hom(A, B) le groupe des morphismes de groupes abéliens de A dans B. Donner la suite des facteurs invariants de Hom(A, B).

( )

On donnera la suite des facteurs invariants sous la forme (d_1, ..., d_n) avec avec d_i des entiers nuls ou strictement supérieurs à 1 et vérifiant $d_i | d_{i-1}$.

OEF Groupes abéliens

--- Introduction ---

Ce module regroupe pour l'instant 16 exercices sur les groupes abéliens de type fini. D'autres exercices de même type mais utilisant le vocabulaire des $\mathbb{Z}$-modules se trouvent dans le module OEF $\mathbb{Z}$-modules.

Choisissez les exercices :
Construction d'un homomorphisme
Exposant
Groupe abélien avec propriétés
Invariants de sous-groupes abéliens
Nombre d'éléments d'ordre donné
Nombre de classes d'isomorphismes

Des QCM sur les groupes opérant sur un ensemble

Exercice.

Soit G un groupe opérant sur un ensemble. Indiquer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

Tout sous-groupe est le stabilisateur d'un point. ○ Vrai ○ Faux

Les stabilisateurs des éléments d'une même orbite ne sont pas toujours conjugués. ○ Vrai ○ Faux

Orbites dans Z/nZ

Exercice.

Le groupe multiplicatif $G = (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z})^\times$ agit sur l'ensemble $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ par multiplication

$(x, a) \mapsto ax$.

Combien y a-t-il d'orbites pour cette action : .

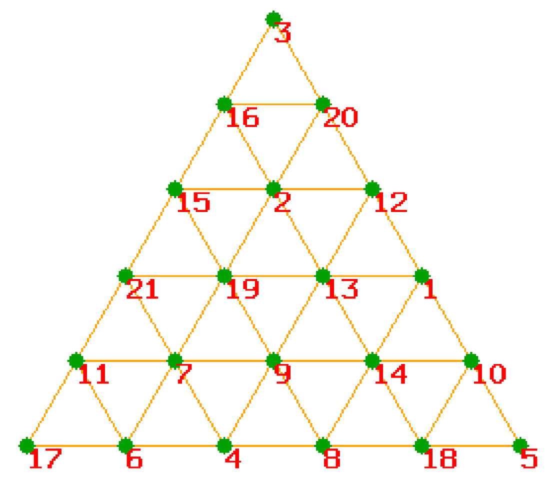
Donner les cardinaux de ces orbites dans l'ordre croissant.

( ).

Des questions géométriques

Exercice.

On dispose l'ensemble X des entiers entre 1 et 21 dans un triangle équilatéral :



On fait agir le groupe de symétrie du triangle équilatéral G sur X à travers le triangle. Donner l'orbite de 1.

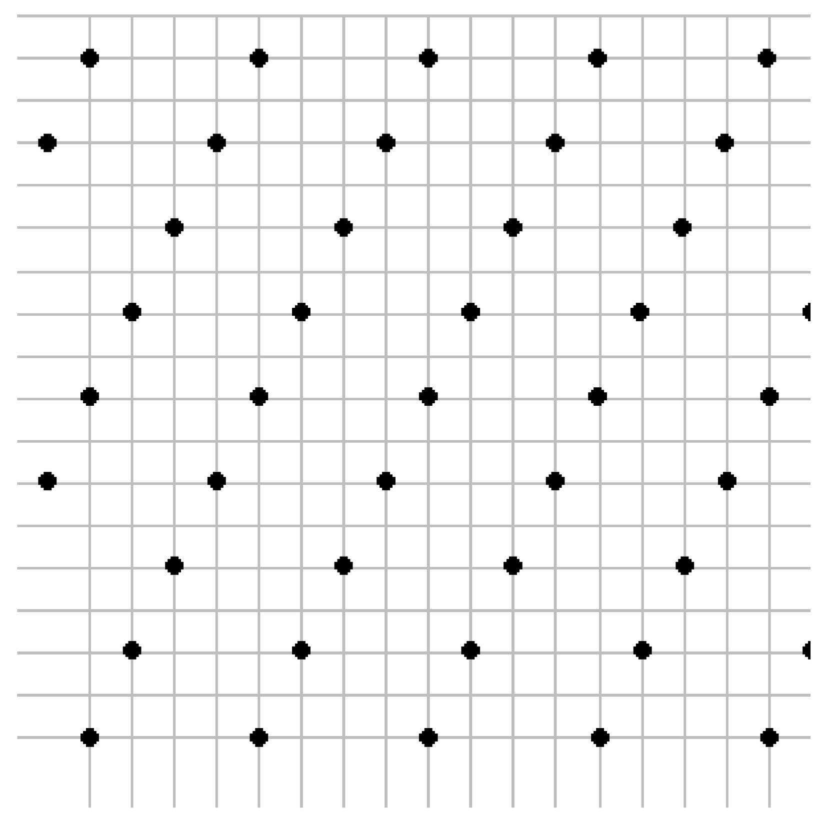
{ }

Ecrire l'équation des classes de cette action en donnant les cardinaux des orbites (dans l'ordre croissant et avec répétition si nécessaire).

( )

Exercice.

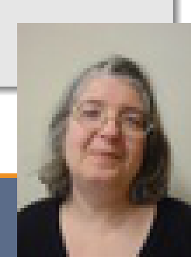
Voici un réseau dessiné :



Donner la matrice d'Hermite (échelonnée en colonnes, triangulaire inférieure) qui lui est associée :

Quelques modules d'exercices

- OEF Introduction aux groupes
- OEF Groupes de permutation
- OEF Groupes abéliens
- OEF Groupes opérant sur un ensemble
- Doc Modules sur l'anneau des entiers
- OEF Z-modules



Bernadette Perrin-Riou