Rappels d'algèbre linéaire

Arnaud Jehanne

30 novembre 2021

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels, applications linéaires

Dans ce texte, les corps K et les anneaux R seront toujours supposés commutatifs.

1.1. Définitions, premières propriétés

Définition 1.1.1. *Soit K un corps commutatif. Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $+$ de $E \times E$ dans E telle que $(E, +)$ est un groupe abélien. Soit $\cdot$ une loi de composition externe de $K \times E$ dans E. On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur K si pour tout $(\alpha, \beta) \in K^2$ et tout $(x, y) \in E^2$ les propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. $1 \cdot x = x$ *(où 1 désigne l'élément neutre de la multiplication de K)*
2. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
3. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
4. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

Soit $(E, +, \cdot)$ un K-espace vectoriel. On note 0 (ou si l'on veut spécifier 0_E) l'élément neutre de $(E, +)$

Exercice 1.1.2. *On note ici 0 et 0_E les éléments neutres respectifs de $(K, +)$ et $(E, +)$. Soient $\lambda \in K$ et $x \in E$. Montrer les propriétés suivantes.*

1. $0 \cdot x = 0_E$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
2. $-(\lambda \cdot x) = (-\lambda) \cdot x$
3. $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0$ *ou* $x = 0_E$.

Définition 1.1.3. *Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si F est non vide et si pour tout $(x, y) \in F^2$ et tout $(\alpha, \beta) \in K^2$, $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$.*

Proposition 1.1.4. *Soit F une partie de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $(F, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel.*

Proposition 1.1.5. *Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\cap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 1.1.6. *Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors les lois de composition $+$ et $\cdot$ induisent des lois de composition (que l'on note aussi $+$ et $\cdot$) sur E/F qui en font un K-espace vectoriel.*

Démonstration. On sait déjà que $+$ induit une loi de composition interne sur E/F qui en fait un groupe abélien.

Vérifions que $\cdot$ induit une loi de composition externe de $K \times E/F$ dans E/F. Soit x un élément de E. On note $[x]_F$ sa classe modulo F. Pour $\alpha \in K$, on veut pouvoir définir $\alpha \cdot [x]_F$ en posant

$$\alpha \cdot [x]_F = [\alpha \cdot x]_F \tag{1.1}$$

Pour cela, considérons un élément y dans $[x]_F$. Cela veut dire que $(x-y) \in F$. Alors pour tout $\alpha \in K$, $\alpha \cdot x - \alpha \cdot y = \alpha \cdot (x - y) \in F$, donc $[\alpha \cdot x]_F = [\alpha \cdot y]_F$ et l'égalité 1.1 a bien un sens.

Les propriétés de la définition 1.1.1 sont bien vérifiées sur $(E/F, +, \cdot)$ car elles sont vérifiées sur $(E, +, \cdot)$. □

Proposition 1.1.7 (Espaces produits)**.** *Soient n espaces vectoriels $(E_1, +, \cdot)$, ... , $(E_n, +, \cdot)$. On munit le produit cartésien $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe en posant*

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) &= (\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n) \end{aligned}$$

Alors $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Notation. Par la suite, sauf mention contraire, on notera E pour l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ et on écrira αx pour $\alpha \cdot x$ (si $\alpha \in K$ et $x \in E$).

1.2. Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K. Une application linéaire de E dans F est une application compatible avec les structures d'espaces vectoriels de ces ensembles, comme indiqué dans la définition suivante.

Définition 1.2.1. *Une application f de E dans F est linéaire si pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $(\alpha, \beta) \in K^2$,*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Définition 1.2.2. *Une forme linéaire est une application linéaire de E dans K.*

Proposition 1.2.3. *Soit f une application linéaire de E dans F.*

1. *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F*
2. *En particulier, l'ensemble* $\operatorname{im} f = f(E)$ *est un sous-espace vectoriel de F.*
3. *Si F' est un sous-espace vectoriel de F, $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*
4. *En particulier, L'ensemble* $\ker f = \{x \in E \ : \ f(x) = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

Exemples.

1. Dans $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$F = \{f \in E \ : f(0) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E : c'est le noyau de l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ E &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$

2. Dans $E = K^{\mathcal{N}}$, l'ensemble F des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le noyau de l'application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ E &\to E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto (u_{n+2} - u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Proposition 1.2.4. *Une application linéaire f est injective si et seulement si* $\ker f = \{0\}$.

Définition 1.2.5. *Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme. S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont isomorphes.*

Exercice 1.2.6. *Soit u un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Montrer que* $\operatorname{im} u$ *est isomorphe à* $E/\ker u$.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Il est muni d'une loi de composition interne $+$, induite par celle de l'espace vectoriel F, définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pour tout x de E (la somme $f(x)+g(x)$ étant une somme dans F et d'une loi de composition externe $\cdot$, induite par celle de F, définie par $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ pour tout x dans E.

Proposition 1.2.7. *L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ muni des lois définies ci-dessus est un K-espace vectoriel.*

On note aussi $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$. C'est l'ensemble des endomorphismes de E. En plus des lois $+$ et $\cdot$, cet ensemble est muni de la loi interne $\circ$ de composition des applications linéaires. Alors $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau tel que pour tout $(\lambda,f,g) \in K \times \mathcal{L}(E)^2$, $\lambda \cdot (f \circ g) = (\lambda \cdot f) \circ g = f \circ (\lambda \cdot g)$. On dit que $(\mathcal{L}(E),+,\circ,\cdot)$ est une K-algèbre, suivant la définition ci-dessous.

Définition 1.2.8. *Soit $(A,+,\cdot)$ un K-espace vectoriel. Soit $*$ une loi de composition interne sur A telle que $(A,+,*)$ soit un anneau et telle que pour tout $\lambda \in K$ et tout $(a,b) \in A^2$, $\lambda \cdot (a * b) = (\lambda \cdot a) * b = a * (\lambda \cdot b)$. On dit que l'ensemble A muni de ces lois $+,*,\cdot$ est une K-algèbre.*

Exemple. L'ensemble $K[X]$ des polynômes à coefficients dans K muni de ses lois usuelles est une K-algèbre.

Définition 1.2.9. *On appelle groupe linéaire de E le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ pour la loi $\circ$. On le note $GL(E)$.*

1.3. Sous-espaces engendrés par une partie

Soit A une partie de E.

Définition 1.3.1 (Combinaisons linéaires). *On appelle combinaison linéaire des éléments de A tout élément de E de la forme $\sum_{a \in A} \lambda_a a$, où les λ_a sont des éléments de $\mathbb{R}$ presque tous nuls (c'est-à-dire que $\{a \ : \ \lambda_a \neq 0\}$ est fini).*

Théorème 1.3.2. *Il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A. On l'appelle l'espace vectoriel engendré par A et on le note* $\mathrm{Vect}(A)$.

Démonstration. L'intersection F de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A est un sous-espace vectoriel de E. C'est bien le plus petit par construction. $\square$

Proposition 1.3.3. $\mathrm{Vect}(A)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A.*

Démonstration. Soit A' l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A. Comme $\mathrm{Vect}(A)$ est un espace vectoriel qui contient A, il contient aussi les combinaisons linéaires d'éléments de A et $A \subset A' \subset \mathrm{Vect}(A)$. Il suffit donc de montrer que A' est un sous-espace vectoriel de E, car alors $\mathrm{Vect}(A) \subset A'$ puisque $\mathrm{Vect}A$ est le petit espace vectoriel qui contient A. Ceci est laissé en exercice. □

1.4. Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1.4.1. *Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. La somme $E_1 + E_2$ est l'ensemble $\{x_1 + x_2 \ : x_1 \in E_1 \ , x_2 \in E_2\}$.*

Proposition 1.4.2. *L'ensemble $E_1 + E_2$ est égal au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(E_1 \cup E_2)$ de E.*

Si $E_1, \dots, E_n$ sont n sous-espaces vectoriels de E, on définit

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = E_1 + \cdots + E_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \ : x_i \in E_i \ \forall i \in [[1, n]] \right\}$$

qui est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left(\cup_{i=1}^{n} E_i\right)$ de E.

Définition 1.4.3.
1. *On dit que deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont en somme directe si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. L'espace vectoriel $E_1 + E_2$ est alors noté $E_1 \oplus E_2$.*
2. *Si $E = E_1 \oplus E_2$, on dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E. On dit aussi que E est somme directe de E_1 et E_2.*

Proposition 1.4.4. *E est somme directe de E_1 et E_2 si et seulement si pour tout élément x de E, il existe un unique élément (x_1, x_2) de $E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.*

Remarque. On verra plus loin que dans un espace de dimension finie, tout sous-espace admet un supplémentaire. C'est vrai en toute dimension mais ce n'est pas au programme en dimension infinie (la démonstration générale utilise l'axiome du choix).

Exercice 1.4.5. *Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note E_0 (resp. E_1) l'ensemble des applications paires (resp. impaires) de E. Montrer que $E = E_0 \oplus E_1$.*

On généralise cette notion à la somme directe de n sous-espaces.

Proposition 1.4.6. *Soient $E_1 \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Tout élément x de la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i$ où pour tout $i \in [[1, n]]$, $x_i \in E_i$.*
2. *L'application*
$$\begin{aligned} E_1 \times \cdots \times E_n &\to E_1 + \cdots + E_n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto x_1 + \cdots + x_n \end{aligned}$$
est injective (comme elle est surjective, c'est donc alors un isomorphisme).
3. *Si $x_1 + \cdots + x_n = 0$ où $x_i \in E_i$ pour tout i, alors $x_i = 0$ pour tout i.*
4. *Pour tout $i \in [[1, n]]$, $E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j = \{0\}$.*

Dans ce cas, on dit que les sous-espaces $(E_i)_{i \in [[1,n]]}$ sont en somme directe et on écrit
$$\sum_{i=1}^n E_i = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = \bigoplus_{i \in [[1,n]]} E_i$$

Démonstration. 1 $\iff$ 2 : clair.
2 $\iff$ 3 : clair.
1⇒4 : Si
$$x \in E_i \cap \sum_{j \neq i} E_j$$
alors x s'écrit $x = \sum_{j \neq i} x_j$ où pour tout j, $x_j \in E_j$. On a deux écritures de x sous forme d'éléments des E_j où $j \in [[1, n]]$:
$$x = 0 + \cdots + 0 + 0 + x + 0 + \cdots + 0 \ (x \in E_i)$$
et
$$x = x_1 + \cdots + x_{i-1} + 0 + x_{i+1} + \ldots x_n$$
L'unicité de l'écriture montre que $x = 0$.
4⇒1 : Supposons que
$$x_1 + \cdots + x_n = x'_1 + \cdots + x'_n$$
où pour tout i, $x_i \in E_i$. Alors pour $i \in [[1, n]]$
$$x_i - x'_i = \sum_{j \neq i} (x'_j - x_j) \in E_i \cap \left(\sum_{j \neq i} E_j \right) = \{0\}$$
donc $x_i = x'_i$. □

Exercice 1.4.7. *Soit u un élément de $\mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $\ker u$ dans E. Montrer que G est isomorphe à $\operatorname{im} u$.*

1.5. Projecteurs

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors tout élément x de E s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$. Soit p l'application de E dans E qui à x associe sa composante x_1 sur F. Alors p est une application linéaire appelée projection sur F parallèlement à G. Cette application vérifie l'égalité $p \circ p = p$. On dit qu'elle est involutive.

Définition 1.5.1. *Un projecteur sur E tout endomorphisme p de E qui vérifie $p^2 = p \circ p = p$.*

Proposition 1.5.2. *Soit p un projecteur sur E. Alors $E = \ker p \oplus \mathrm{im}\ p$. De plus, p est la projection sur* im p *parallèlement à* $\ker p$.

Démonstration. Soit x un élément de E. Alors x s'écrit

$$x = (x - p(x)) + p(x)$$

or, $x - p(x) \in \ker p$ et $p(x) \in \mathrm{im}\ p$. Donc $E = \ker p + \mathrm{im}\ p$. De plus, si $y \in \ker p \cap \mathrm{im}\ p$, alors il existe x dans E tel que $y = p(x)$. Or $p(y) = 0$, donc $p^2(x) = p(x) = 0$ et par suite $y = 0$. Ainsi, $\ker p \cap \mathrm{im}\ p = \{0\}$. □

Remarque. Si p est un projecteur et si $y \in \mathrm{im}\ p$, alors $p(y) = y$.

Définition 1.5.3. *Une famille $(p_i)_{i \in I}$ de projecteurs est dite orthogonale si pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.*

Proposition 1.5.4. *Soient $p_1, \ldots, p_n$ des projecteurs sur E. Pour tout $i \in [[1, n]]$, on pose $E_i = \mathrm{im}\ p_i$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $E = \bigoplus_{i \in [[1,n]]} E_i$ *et pour tout* $i \in [[1, n]]$, $\ker p_i = \bigoplus_{j \neq i} E_j$
2. *La famille $(p_i)_{i \in [[1,n]]}$ est orthogonale et* $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{id}_E$.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$. On suppose 1 : $E = \bigoplus_{i \in [[1,n]]} E_i$ et pour tout $i \in [[1, n]]$, $\ker p_i = \bigoplus_{j \neq i} E_j$.

On veut montrer 2 : la famille (p_i) est orthogonale et $\sum_i p_i = \mathrm{id}_E$.

Soit $x \in E$ et soient i, j tels que $i \neq j$.

$p_i \circ p_j(x) = 0$ car $p_j(x) \in E_j$ et $\mathrm{Ker}\ p_i = \bigoplus_{k \neq i} E_k$. Donc $(p_i)_{i \in I}$ est orthogonale.

Reste à montrer que $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{id}_E$.

Soit $x \in E$. On décompose $x = \sum_i x_i$ où $x_i \in E_i$ pour tout i.

Alors pour tout i, $p_i(x) = x_i$ donc $x = \sum_i p_i(x)$.

On obtient bien : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{id}_E$.

$2 \Rightarrow 1$. On suppose 2 : la famille $(p_i)_{i\in[[1,n]]}$ est orthogonale et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{id}_E$. On veut montrer 1 : $E = \displaystyle\bigoplus_{i\in[[1,n]]} E_i$ et pour tout $i \in [[1,n]]$, $\ker p_i = \displaystyle\bigoplus_{j\neq i} E_j$.

Pour tout $x \in E$, $x = \sum_i p_i(x)$ où $p_i(x) \in E_i$ donc $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i$.

Soit $x \in E_i \cap \displaystyle\sum_{j\neq i} E_j$, $x = \displaystyle\sum_{j\neq i} x_j = \sum_{j\neq i} p_j(x_j)$.

Alors $x = p_i(x) = p_i\left(\displaystyle\sum_{j\neq i} p_j(x_j)\right) = \displaystyle\sum_{j\neq i} p_i \circ p_j(x_j) = 0$.

Soient i et j tels que $i \neq j$ et soit $x \in E_j$. Alors $p_i \circ p_j(x) = p_i(x)$ d'une part et d'autre part $p_i \circ p_j(x) = 0$ donc $p_i(x) = 0$: $\bigoplus_{j\neq i} E_j \subset \mathrm{Ker}\ p_i$.

Enfin, si $x \in \mathrm{Ker}\ p_i$, en utilisant que $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j(x)$, on obtient $x = \displaystyle\sum_{j\neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{j\neq i} E_j$.

□

1.6. Familles libres, génératrices, bases

Définition 1.6.1. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que c'est une famille libre si pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de K presque tous nuls, si $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$, alors $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$. Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.*

Si la famille est libre (resp. liée), on dit aussi que les x_i sont linéairement indépendants (resp. dépendants).

On convient qu'une famille vide est libre.

Définition 1.6.2. *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite génératrice si $E = \mathrm{Vect}(\{x_i \ :\ i \in I\})$.*

Définition 1.6.3. *Une famille libre et génératrice de E est appelée une base de E.*

Définition 1.6.4. *Si une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est libre (resp. génératrice, resp. une base), on dit aussi que l'ensemble $\{x_i\ :\ i \in I\}$ est une partie libre (resp. une partie génératrice, resp. une base) de E.*

Théorème 1.6.5. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors tout élément x de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.*

Démonstration. L'existence de la combinaison linéaire provient facilement du fait que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice. On pose $\mathcal{B} = (b_i)_{i\in I}$. Soit x un élément de E. Supposons que x s'écrive de deux façons $x = \sum_{i\in I} \lambda_i b_i = \sum_{i\in I} \mu_i b_i$. Alors $\sum_{i\in I}(\lambda_i - \mu_i)b_i = 0$, ce qui prouve que pour tout i, $\lambda_i - \mu_i = 0$ puisque la famille est libre, et donc pour tout i, $\lambda_i = \mu_i$. □

Théorème 1.6.6. *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Soit $(b_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de F. Il existe une et une seule application linéaire f de E dans F telle que pour tout $i \in I$, $f(e_i) = b_i$. De plus :*

(i) f est injective si et seulement si $(b_i)_{i\in I}$ est libre

(ii) f est surjective si et seulement si $(b_i)_{i\in I}$ est génératrice

(iii) f est bijective si et seulement si $(b_i)_{i\in I}$ est une base de F.

Démonstration. Exercice. □

Le lemme suivant est un argument simple qu'on retrouve dans plusieurs preuves.

Lemme 1.6.7. *Soit L une partie libre non vide de E. Si x est un élément de E tel que $L \cup \{x\}$ n'est pas libre, alors x s'ecrit comme combinaison linéaire des éléments de L.*

Démonstration. Comme $L \cup \{x\}$ n'est pas libre, il existe une combinaison linéaire des éléments de L et de x à coefficients non tous nuls qui s'annule.

$$\sum_{l\in L} \lambda_l l + \lambda_x x = 0$$

où $\lambda_l \in K$ pour tout $l \in L \cup \{x\}$ et où $\{l \in L \cup \{x\}\ :\ \lambda_l \neq 0\}$ est fini et non vide. Comme L est libre, $\lambda_x \neq 0$, donc

$$x = -\lambda_x^{-1} \sum_{l\in L} \lambda_l l$$

□

Le théorème suivant donne deux caractérisations des bases.

Théorème 1.6.8. *Soit $\mathcal{B}$ une partie non vide de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{B}$ est une base de E.

(ii) $\mathcal{B}$ engendre E et aucune partie stricte de $\mathcal{B}$ n'engendre E.

(iii) $\mathcal{B}$ est libre et aucune partie de E contenant strictement $\mathcal{L}$ n'est libre.

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $b \in \mathcal{B}$. Alors $\mathcal{B} \smallsetminus \{b\}$ n'est pas une partie génératrice de E car si tel était le cas, b s'écrirait comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B} \smallsetminus \{b\}$ et donc $\mathcal{B}$ ne serait pas libre.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit $c \in E \smallsetminus \mathcal{B}$. Alors $\mathcal{B} \cup \{c\}$ n'est pas libre car $c \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$. Montrons maintenant que $\mathcal{B}$ est libre. On suppose que $\sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b b = 0$, où $\lambda_b \in K$ pour tout b et où $\{b \ : \ \lambda_b \neq 0\}$ est fini. S'il existe b tel que $\lambda_b \neq 0$, alors $b \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B} \smallsetminus \{b\})$ et donc $\mathcal{B} \smallsetminus \{b\}$ engendre E : c'est contraire à l'hypothèse.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Montrons que $\mathcal{B}$ engendre E. Soit $x \in E \smallsetminus \mathcal{B}$. Alors $\mathcal{B} \cup \{x\}$ est liée par hypothèse. On en déduit que $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ grace au lemme 1.6.7. $\square$

1.7. Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.7.1. *On dit que E est de dimension fini si E admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.*

On suppose maintenant que E est distinct de $\{0\}$ et de dimension finie.

Proposition 1.7.2. *Soit A une partie génératrice de E. Il existe une partie finie G de A qui est génératrice de E.*

Démonstration. Comme E est de dimension finie, il admet une partie génératrice finie K. Comme A est génératrice, pour tout $k \in K$, k s'écrit comme combinaison linéaire finie d'éléments de A. Soit A_k l'ensemble des éléments de A qui interviennent avec un coefficient non nul dans cette combinaison linéaire. L'ensemble A_k est fini, et $G = \bigcup\limits_{k \in K} A_k$ est fini puisque K est fini. Enfin, comme $\mathrm{Vect}(K) = E$ et comme tout $k \in K$ appartient à $\mathrm{Vect}(G)$, on obtient que $\mathrm{Vect}(G) = E$. $\square$

Corollaire 1.7.3. *Dans un ensemble de dimension finie, toute base est finie.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et soit G une partie finie de $\mathcal{B}$ qui engendre E. Le théorème 1.6.8 montre que $\mathcal{B} = G$ donc $\mathcal{B}$ est finie. $\square$

Théorème 1.7.4. (Théorème de la base incomplète) *Soit $\mathcal{L}$ une partie libre de E et soit $\mathcal{G}$ une partie génératrice de E. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$.*

Démonstration. Soit G une partie génératrice finie de E incluse dans $\mathcal{G}$ (théorème 1.7.2). Comme $E \neq \{0\}$, $G \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties $\mathcal{M}$ de G telles que $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ est une partie libre de E. Comme $\emptyset \in \mathcal{E}$, l'ensemble $\mathcal{E}$ n'est pas vide. Soient alors

$$q = \max\{\mathrm{card}\mathcal{M} \ : \ \mathcal{M} \in \mathcal{E}\}$$

et $\mathcal{M}_0$ un élément de $\mathcal{E}$ de cardinal q. Par définition de $\mathcal{E}$, la partie $\mathcal{B} = \mathcal{L} \cup \mathcal{M}_0$ est libre. Reste à montrer qu'elle est génératrice. Comme G est génératrice, il suffit de voir que $G \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$. Soit $g \in G$. Si $g \in \mathcal{M}_0$, évidemment $g \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$. Sinon, $\mathcal{M}_0 \cup \{g\} \subset G$ et $\mathcal{M}_0 \cup \{g\} \notin \mathcal{E}$ par maximalité de $\mathcal{M}_0$, donc $\mathcal{G} \cup \{g\}$ n'est pas libre. Comme $\mathcal{G}$ l'est, on en déduit que $g \in \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$ grace au lemme 1.6.7. □

Corollaire 1.7.5. *Toute famille libre de E est finie.*

Corollaire 1.7.6. *Tout espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 1.7.4 à $\mathcal{L} = \emptyset$ et $\mathcal{G} = E$. □

Lemme 1.7.7. *Soient $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de E et $\varepsilon_1 \dots, \varepsilon_p$ des vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Si $(\varepsilon_i)_{i \in [[1,p]]}$ est libre, alors $e_1, \dots, e_p$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur p. Si $p = 1$, comme $\varepsilon_1 \neq 0$ et comme ε_1 peut s'écrire $\varepsilon_1 = \lambda_1 e_1$ (où $\lambda_1 \in K$), c'est que $e_1 \neq 0$ et $\lambda_1 \neq 0$. Donc $e_1 = \lambda_1^{-1} \varepsilon_1$.

On suppose maintenant la propriété vraie pour $p - 1$ éléments. On écrit le système

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = a_{1,1} e_1 + \cdots + a_{p,1} e_p \\ \quad \vdots \\ \varepsilon_p = a_{p,1} e_1 + \cdots + a_{p,p} e_p \end{cases}$$

Comme (ε_i) est libre, $\varepsilon_p \neq 0$ donc il existe i tel que $a_{p,i} \neq 0$. Quitte à changer la numérotation des e_i, on peut supposer que $a_{p,p} \neq 0$. On va appliquer la technique du pivot de Gauss en prenant $a_{p,p} e_p$ comme pivot. Si l'on note l_i la ligne i du système, on fait l'opération

$$l_i \leftarrow l_i - a_{p,i} a_{p,p}^{-1} l_p$$

pour i de 1 à $p-1$. Cela donne un système équivalent de la forme

$$\begin{cases} \varepsilon_1 - m_1\varepsilon_p = a'_{1,1}e_1 + \cdots + a'_{p-1,1}e_{p-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{p-1} - m_{p-1}\varepsilon_p = a'_{p-1,1}e_1 + \cdots + a'_{p-1,p-1}e_{p-1} \\ \varepsilon_p = a_{p,1}e_1 + \cdots + a_{p,p-1}e_{p-1} + a_{p,p}e_p \end{cases}$$

Soient $\varepsilon'_i = \varepsilon_i - m_i\varepsilon_p$ pour $i \in [[1, p-1]]$. Alors on vérifie facilement que $(\varepsilon'_i)_{i\in[[1,p-1]]}$ est libre. De plus, en considérant les $p-1$ premières lignes, on voit que $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{p-1}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$. D'après l'hypothèse de récurrence, $e_1, \dots, e_{p-1}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{p-1}) \subset \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. Enfin, comme $a_{p,p} \neq 0$, la dernière ligne donne

$$e_p = a_{p,p}^{-1}(\varepsilon_p - (a_{p,1}e_1 + \cdots + a_{p,p-1}e_{p-1}))$$

donc e_p appartient à $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. □

Théorème 1.7.8. *Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. On appelle ce nombre la dimension de E et on le note $\dim_K(E)$ ou $\dim E$ s'il n'y a pas d'ambiguïté possible.*

Pour compléter la définition de la dimension, on pose $\dim\{0\} = 0$.

Démonstration. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E (il en existe d'après le corollaire 1.7.6). Ces bases sont finies. Comme $E \neq \{0\}$, les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont non vides. Soient $p = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$ et $q = \mathrm{Card}(\mathcal{C})$ leurs cardinaux respectifs. Supposons par exemple que $p \leq q$ et écrivons

$$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_p\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q\}$$

Bien sûr, $\mathcal{C}' = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$ est libre et pour $i \in [[1, p]]$, $\varepsilon_i \in \mathrm{Vect}B = E$. On peut donc appliquer le lemme 1.7.7 et donc pour tout $i \in [[1, p]]$, $e_i \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, on en déduit que $\mathcal{C}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une famille génératrice de E donc d'après la propriété (ii) du théorème 1.6.8, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, c'est-à-dire $p = q$. □

Exemple. K^n est un K- espace vectoriel de dimension n. Soit la famille (e_i) des éléments de K^n définis par

$$(e_i)_j = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$$

Autrement dit $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, où la i-ème coordonnée est égale à 1 et les autres à 0. La famille $(e_i)_{i\in[[1,n]]}$ est une base de K^n, appelée base canonique de K^n.

1.8. Propriétés des espaces de dimension finie

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Théorème 1.8.1. *(i) Toute famille libre de E a au plus n éléments. Elle en a n si et seulement si c'est une base de E.*

(ii) Toute famille génératrice a au moins n éléments. Elle en a n si et seulement si c'est une base de E

Démonstration. Exercice (utiliser le théorème 1.6.8). □

Théorème 1.8.2. *Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E. Alors F est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$. *De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $E = F$.*

Démonstration. Exercice. □

Théorème 1.8.3. (Réécriture du théorème de la base incomplète) *Soient $p \in [[1, n-1]]$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E. Il existe $e_{p+1}, \ldots, e_n$ dans E tels que $(e_i)_{i \in [[1,n]]}$ soit une base de E.*

Démonstration. En appliquant le théorème 1.7.4 à $\mathcal{L} = \{e_1, \ldots, e_p\}$ et à $\mathcal{G} = E$, on obtient une base $\mathcal{B}$ qui contient $\mathcal{L}$. □

Corollaire 1.8.4. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.*

Théorème 1.8.5. *Deux K-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension.*

Démonstration. Exercice. □

Théorème 1.8.6. *Soient $E_1, \ldots, E_r$ des espaces vectoriels de dimension finie.*

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_r) = \sum_{i=1}^{r} \dim E_i$$

On a vu que si $E_1, \ldots, E_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E et s'ils sont en somme directe, alors $E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ est isomorphe à $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Corollaire 1.8.7. *Soient $E_1, \ldots, E_r$ des sous-espaces vectoriels de E. Si ces espaces sont en somme directe, alors*

$$\dim \left(\bigoplus_{i \in [[1,r]]} E_i \right) = \sum_{i=1}^{r} \dim E_i$$

Corollaire 1.8.8. *Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vetoriels de E. Alors*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 1.8.9. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un K-espace vectoriel quelconque et soit f un élément de $\mathcal{L}(E,F)$.*

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$$

On note $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{im} f)$.

Démonstration. Utiliser l'exercice 1.4.7. □

Corollaire 1.8.10. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E,* $\dim(E/F) = \dim E - \dim F$.

Démonstration. On utilise la surjection canonique de E dans E/F et on applique le résultat précédent. □

Corollaire 1.8.11. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est un isomorphisme si et seulement si* $\ker f = \{0\}$.

Exercice 1.8.12. *Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vetoriels de E. En utilisant l'application*

$$\begin{aligned} f \ : F \times G &\to F + G \\ (x,y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

retrouver l'égalité

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

1.9. Exercices

Exercice 1.9.1. *Soient X et Y deux parties finies d'un K-espace vectoriel E telles que $Y \subset X$. On pose $m = \mathrm{Card} X$, $r = \dim \mathrm{Vect}(X)$, $n = \mathrm{Card} Y$ et $s = \dim \mathrm{Vect}(Y)$. Montrer que $n - s \leq m - r$.*

Exercice 1.9.2. *Soient $F_1, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.*

1. *Montrer que si $F_1 + \cdots + F_k = E$ et $\dim F_1 + \cdots + \dim F_k = \dim E$, alors $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$.*

2. *Si l'on suppose que* $F_1 + \cdots + F_k = E$ *et que pour tout* $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0\}$, *peut-on conclure que* $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$ *?*

Exercice 1.9.3. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n. *Soient* f *et* g *deux endomorphismes de* E. *Montrer que*

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - n \leq \mathrm{rg}(f \circ g).$$

Exercice 1.9.4. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimensions finies* m *et* n, *où* $m \geq n > 0$. *Soient* $u \in L(E, F)$ *et* $v \in L(F, E)$ *telles que* $u \circ v = \mathrm{id}_F$. *Montrer que* $v \circ u$ *est un projecteur et déterminer ses noyau et image.*

Exercice 1.9.5. *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie. Soient* u *et* v *deux endomorphismes de* E.

1. *Montrer que* $\ker u \subset \ker v$ *si et seulement s'il existe* $w \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $v = w \circ u$.
2. *Montrer que* $\mathrm{im}\ u \subset \mathrm{im}\ v$ *si et seulement s'il existe* $w \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $u = v \circ w$.

Exercice 1.9.6. *Soit* E *un* K*-espace vectoriel et soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels de* E.

1. *Montrer que si* F_1 *et* F_2 *ont un suppémentaire commun, alors ils sont isomorphes.*
2. *Montrer que la réciproque est fausse en toute généralité, mais vraie en dimension finie.*

Chapitre 2

Matrices

Soit K un corps commutatif.

2.1. Définitions

Soit R un anneau commutatif

Définition 2.1.1. *Soient p et q deux entiers naturels non nuls. Une matrice de taille (p,q) à coefficients dans R est une famille d'éléments de R indexée par les éléments de $[[1,p]] \times [[1,q]]$, appelés coefficients de la matrice. On note $\mathcal{M}_{p,q}(R)$ l'ensemble de ces matrices. Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(R)$ et soient $m_{i,j}$ ses coefficients. On écrit parfois $M = (m_{i,j})$ ou in extenso sous la forme*

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{p,1} & \dots & m_{p,q} \end{pmatrix}$$

On dit que $m_{i,j}$ est le coefficient (i,j) de M.

On note $\mathcal{M}_p(R) = \mathcal{M}_{p,p}(R)$.

On définit l'addition sur les matrices de et la multiplication par un élément de R coefficient par coefficient. Si $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ appartiennent à $\mathcal{M}_{p,q}(R)$, la somme $M + N$ est définie par $M + N = (m_{i,j} + n_{i,j})$. Si $\lambda \in R$, λM est définie par $\lambda M = (\lambda m_{i,j})$.

On a défini les matrices sur un anneau, mais dans ce chapitre, nous considérons surtout les matrices à coefficients dans le corps K.

Proposition 2.1.2. *L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ muni de la loi de composition interne $+$ et la loi de composition externe $\cdot$ ci-dessus est un K-espace vectoriel de dimension mn. Il admet pour base la famille $(E_{i,j}^{m,n})$ des éléments de*

$\mathcal{M}_{m,n}(K)$ définis de la façon suivante. Tous les coefficients de $(E_{i,j}^{m,n})$ sont nuls sauf le coefficient (i,j) qui est égal à 1.

On définit aussi un produit de matrices. Là encore, on va définir un tel produit sur un anneau commutatif R. Soit r un entier naturel non nul. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(R)$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,r}(R)$. Le produit de A par B est la matrice AB de $\mathcal{M}_{p,r}(K)$ dont le coefficient (i,j) (pour $(i,j) \in [[1,p]] \times [[1,r]]$ est

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$$

Proposition 2.1.3. *1. L'ensemble $(\mathcal{M}_p(K), +, .)$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau.*

2. Le groupe multiplicatif de ses éléments inversibles est noté $GL_n(k)$.

3. Les lois de composition interne $+$ et $.$ de $\mathcal{M}_n(K)$ et la loi de multiplication par un scalaire en font une K-algèbre.

2.2. Matrices et applications linéaires

Le lien avec les applications linéaires entre espaces vectoriels de dimensions finies est un aspect très important des matrices.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies q et p. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soient $e = (e_j)_{j \in [[1,q]]}$ (resp. $f = (f_i)_{i \in [[1,p]]}$) une base de E (resp. F). Alors pour tout $j \in [[1,q]]$, on peut décomposer $u(e_j)$ dans la base f.

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_j$$

où les $a_{i,j}$ appartiennent à K.

Définition 2.2.1. *On appelle matrice de u dans les bases e et f la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$*

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = (a_{i,j})_{(i,j) \in [[1,p]] \times [[1,q]]}$$

Si $E = F$, on note $\mathrm{Mat}_e(u) = \mathrm{Mat}_{e,e}(u)$.

Réciproquement, si $A = (a_{i,j})$ est donnée, on définit l'unique $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = A$. en posant pour tout j

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_j$$

Proposition 2.2.2. *On garde les notations de la définition précédente. L'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(K)$ qui à u associe $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

En particulier, si e et f sont les bases canoniques respectives de K^q et K^p, on obtient un isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(K^q, K^p)$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(K)$.

Si G est un troisième espace vectoriel. On considère $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $w = u \circ v \in \mathcal{L}(E, G)$. Soit g une base de G. On a l'égalité

$$\mathrm{Mat}_{e,g}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{f,g}(u).\mathrm{Mat}_{e,f}(v)$$

Proposition 2.2.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. La donnée d'une base de E founit un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(K)$.*

En particulier, il existe un isomorphisme canonique entre $\mathcal{L}(K^n)$ et $M_n(K)$ (obtenu bien sûr en choisissant la base canonique de K^n).

Cela fournit aussi un isomorphisme canonique de groupes entre $GL(K^n)$ et $GL_n(K)$.

2.3. Rang d'une matrice

Définition 2.3.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. Soit u l'application linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(K^q, K^p)$ canoniquement associée à A. Le rang de A est par définition égal au rang de u. On le note $\mathrm{rg}(A)$.*

Si l'on note colonnes de $A = (a_{i,j})$ les éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(K)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{pmatrix} \ , \ \dots \ , \ A_q = \begin{pmatrix} a_{1,q} \\ \vdots \\ a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Si l'on note e_j le j-ème élément de la base canonique de K^q, alors pour tout j, $u(e_j)$ est l'élément de K^p correspondant canoniquement à A_j, c'est-à-dire $u(e_j) = (a_{1,j}, \dots, a_{p,j})$. On voit alors que le rang de u est la dimension de $\mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_q)$.

Proposition 2.3.2. *Si A est la matrice d'une application linéaire v de E dans F pour des bases fixées de E et F, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(v)$.*

Démonstration. En effet, soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives q et p. On choisit des bases $b = (b_1, \dots, b_q)$ de E et $b' = (b'_1, \dots, b'_p)$ de F. Soient $e = (e_1, \dots, e_q)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_p)$ les bases canoniques respectives de K^q et K^p. Soient $v \in (E, F)$ tel que $\mathrm{Mat}_{b,b'}(v) = A$, alors que u reste l'application linéaire canoniquement associée à A. On considère les isomorphismes $\alpha\ : K^q \to E$ et $\beta\ : K^p \to F$ définis par $\alpha(e_i) = b_i$ et $\beta(e'_i) = b'_i$. Alors on vérifie que $v = \beta \circ u \circ \alpha^{-1}$ (en l'appliquant aux b'_j). Comme α et β sont des isomorphismes, on obtient que $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(M)$. □

2.4. Matrices équivalentes

Définition 2.4.1. *Soit E un espace vectoriel de dimension q et soient $e = (e_i)$ et $e' = (e'_i)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de e à e' la matrice $\mathrm{Mat}_{e',e}(\mathrm{id}_E)$. Autrement dit, c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des e'_j dans la base e.*

Remarque. Soit P la matrice de passage de e à e'. Si $x \in E$, et si le vecteur des coordonnées de x dans e (resp. e') est X (resp. X'), alors $PX' = X$.

Proposition 2.4.2. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives q et p. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $e = (e_i)$ et $e' = (e'_i)$ deux bases de E, et soient $f = (f_i)$ et $f' = (f'_i)$ deux bases de F. Soient $A = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{e',f'}(u)$. On note respectivement Q et P les matrices de passage de e à e' et de f à f'. Alors*

$$A = PBQ^{-1}$$

Démonstration. Cela provient du diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
E_e \arrow[r, "A", "u"'] & F_f \\
E_{e'} \arrow[u, "\mathrm{id}_E", "Q"'] \arrow[r, "u", "B"'] & F_{f'} \arrow[u, "P", "\mathrm{id}_F"']
\end{tikzcd}$$

□

Définition 2.4.3. *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(K)$. On dit que A et B sont équivalentes s'il existe $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_q(K)$ telles que*

$$PAQ = B$$

Théorème 2.4.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ une matrice de rang r. Alors $r \leq \inf(p, q)$ et A est équivalente à la matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(K^p, K^q)$ canoniquement associée à A. Soit F un supplémentaire de $\ker u$ dans K^q. On a vu que u induit un isomorphisme u' de F dans $\mathrm{im}\, u$ donc $\dim F = r$. Soit $e' = (e'_i)$ une base de K^p dont les r premiers termes forment une base de F et les $p - r$ autres une base de

$\ker u$. Pour $i \in [[1,r]]$, on pose $f'_i = u'(e'_i)$. Comme u' est un isomorphisme, $(f'_i)_{i\in[[1,r]]}$ est une base de $u(F)$ que l'on complète en une base $(f'_i)_{i\in[[1,p]]}$ de K^p. Alors $\mathrm{Mat}_{e',f'}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

Corollaire 2.4.5. *Deux matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

Définition 2.4.6. *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. On appelle transposée de A la matrice ${}^tA = (a_{j,i}) \in \mathcal{M}_{q,p}(K)$.*

Proposition 2.4.7. *Soient A et B telles que le produit AB existe. Alors ${}^t(AB) = {}^tB^tA$.*

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 2.4.8. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}A$.*

Remarque. Dans $\mathcal{M}_{p,q}(K)$, la relation "A est équivalente à B" est bien une relation d'équivalence. Les représentants de ses classes d'équivalence sont les matrices $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il y a donc $\inf(p,q)+1$ classes d'équivalence dans $\mathcal{M}_{p,q}(K)$,

2.5. Matrices semblables

Cela concerne les matrices carrées.

Définition 2.5.1. *On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(K)$ sont semblables s'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $P^{-1}AP = B$.*

Proposition 2.5.2. *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$. Soit u l'endomorphisme de K^n canoniquement défini par A. Alors A est semblable à B si et seulement s'il existe une base e' de E telle que $B = \mathrm{Mat}_{e'}(u)$.*

Démonstration. Exercice. On pourra considérer le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} E_e \arrow[r, "A", "u"'] & E_e \\ E_{e'} \arrow[u, "\mathrm{id}_E", "P"'] \arrow[r, "u", "B"'] & E_{e'} \arrow[u, "P", "\mathrm{id}_E"'] \end{tikzcd}$$

□

Remarque. Là encore, la relation "être semblable à" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(K)$. La trace est invariante sur chacune des classes de cette relation (appelées classes de similitude). Rappelons en la définition.

Définition 2.5.3. *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(K)$. La trace de A est l'élément $\mathrm{Tr}(A)$ de K défini par* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Proposition 2.5.4. *Si deux matrices sont semblables, elles ont même trace.*

Proposition 2.5.5. *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$. Un calcul simple montre que* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$*. On en déduit que si P est inversible,* $\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$.

Pour tout endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base e, la trace de la matrice de $\mathrm{Mat}_e(u)$ ne dépend pas de la base choisie. Cela permet de définir la trace de u.

Définition 2.5.6. *La trace de u est la trace de* $\mathrm{Mat}_e(u)$*. On la note* $\mathrm{Tr}(u)$.

2.6. Exercices

Exercice 2.6.1.

1. *Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $f(AB) = f(BA)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace (on pourra considérer la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$).*
2. *Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(K))$ telle que $g(AB) = g(BA)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)$ et telle que $g(I_n) = I_n$. Montrer que g conserve la trace (c'est-à-dire* $\mathrm{Tr}(gA) = \mathrm{Tr}(A)$ *pour tout $A \in \mathcal{M}_n(K)$).*

Exercice 2.6.2. *Soit R un anneau commutatif. Soit $\sigma \in S_n$. On appelle matrice de permutation associée à σ la matrice $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$ de $\mathcal{M}_n(R)$, où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.*

1. *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(R)$. Montrer que $P_\sigma A = (a'_{i,j})$ où pour tout (i, j), $a'_{i,j} = a_{\sigma^{-1}(i),j}$.*
2. *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(R)$. Montrer que $AP_\sigma = (a''_{i,j})$ où pour tout (i, j), $a'_{i,j} = a_{i,\sigma(j)}$.*

Chapitre 3

Déterminants

Soit n un entier naturel non nul.

3.1. Formes multilinéaires

Définition 3.1.1. *Soient $E_1, \ldots, E_n$ des K-espaces vectoriels. Une application f de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans K est appelée forme multilinéaire si elle est linéaire sur chacun de ses facteurs. Plus précisément, f est multilinéaire si elle vérifie la condition suivante.*

Pour tout $i \in [[1, n]]$ et tout

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_n) \in E_i \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$$

l'application

$$\begin{aligned} f_i \ : E_i &\to K \\ x &\mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots a_n) \end{aligned}$$

est linéaire.

On note $\mathrm{ML}(E_1, \ldots, E_n)$ l'ensemble des formes multilinéaires de $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Proposition 3.1.2. $\mathrm{ML}(E_1, \ldots, E_n)$ *est un K-espace vectoriel.*

Définition 3.1.3. *Soit E un K-espace vectoriel. On note $\mathrm{ML}_n(E) = \mathrm{ML}(E, \ldots, E)$ l'ensemble des formes multilinéaires sur n copies de E.*

Dans la suite, E est un K-espace vectoriel.

Remarquons que $\mathrm{ML}_1(E) = E^*$, l'espace dual de E, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires sur E.

3.2. Action de S_n sur $\mathrm{ML}_n(E)$

Pour tout $\sigma \in S_n$ et tout $f \in \mathrm{ML}_n(E)$, on définit

$$\begin{aligned} \sigma * f \ : E \times \cdots \times E &\to K \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto f(x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

Alors $*$ définit une opération à gauche du groupe S_n sur $\mathrm{ML}_n(E)$. Autrement dit, pour tout $(\sigma, \tau) \in S_n^2$ et tout $f \in \mathrm{ML}_n(E)$,

(i) $\sigma * f \in \mathrm{ML}_n(E)$

(ii) $\mathrm{id}_{[[1,n]]} * f = f$

(iii) $\sigma * (\tau * f) = (\sigma \circ \tau) * f$

Cela implique que pour tout $\sigma \in S_n$, l'application suivante est bijective.

$$\begin{aligned} \mathrm{ML}_n(E) &\to \mathrm{ML}_n(E) \\ f &\mapsto \sigma * f \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que c'est une application linéaire.

Définition 3.2.1. *Soit $f \in \mathrm{ML}_n(E)$.*

(i) Si pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma * f = f$, on dit que f est symétrique.

(ii) Si pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma * f = \varepsilon(\sigma) f$, on dit que f est antisymétrique.

(iii) Si $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dès qu'il existe deux indices i et j distincts tels que $x_i = x_j$, on dit que f est alternée.

On note respectivement $\mathcal{S}_n(E)$, $\mathcal{A}_n(E)$ et $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes multilinéaires symétriques, antisymétriques et alternées. Ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{ML}_n(E)$.

3.3. Formes multilinéaires alternées

Proposition 3.3.1. *Soit $f \in \Lambda_n(E)$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.*

Démonstration. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, on peut écrire l'un des x_i comme combinaison linéaire des autres. On en déduit le résultat en remplaçant cet élément x_i par la combinaison correspondante dans $f(x_1, \ldots, x_n)$ et en développant cette expression. $\square$

Proposition 3.3.2. *1.* $\Lambda_n(E) \subset \mathcal{A}_n(E)$

2. Si $\mathrm{car}(K) \neq 2$, $\Lambda_n(E) = \mathcal{A}_n(E)$.

Démonstration. Exercice. Pour le 1 : soit $i < j$, développer

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i + x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

et utiliser le fait que les transpositions engendrent S_n.

Pour le 2 : soient k et l tels que $x_k = x_l$, soit $\tau = (k, l)$ utiliser le fait que $\tau * f(x_1, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_n)$ d'une part (puisque $\epsilon(\tau) = -1$) et d'autre part $\tau * f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ puisque $x_k = x_l$. □

Théorème 3.3.3. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $e = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ une base de E.*

1. *Pour tout $k > n$, $\Lambda_k(E) = \{0\}$.*
2. *Le K-espace vectoriel $\Lambda_n(E)$ est de dimension 1 engendrée par la fonction*
$$\begin{aligned} \Delta_e \ : \ & E^n \to K \\ & (x_i) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i} \end{aligned}$$
où pour tout j, $x_j = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} e_i$ est la décomposition de x_j suivant la base e.

Démonstration. Le 1 provient du fait que si $k > n$, toute famille $(x_1, \dots, x_k)$ est liée. On peut donc conclure grace à la proposition 3.3.1.

Pour le 2, montrons d'abord que $\Delta_e \in \Lambda_n(E)$. Il est facile de voir que Δ_e est multilinéaire. Voyons pourquoi elle est alternée. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ tel que $x_k = x_l$, où $k \neq l$. Vérifions que $\Delta_e(x_1, \dots, x_n) = 0$. Soit τ la permutation $\tau = (k, l)$. Soit $A_n = \{\sigma \in S_n \ : \ \varepsilon(\sigma) = 1\}$. C'est un sous-groupe d'indice 2 de S_n et donc S_n est la réunion disjointe $S_n = A_n \cup (A_n \circ \tau)$ (puisque $\varepsilon(\tau) = -1$ donc $\sigma \notin A_n$). On déduit de cela que

$$\Delta_e(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma) \sum_{\sigma \in A_n} \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i} + \sum_{\sigma \in A_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma \circ \tau(i),i}$$

or si $i \notin \{k, l\}$, $x_{\sigma \circ \tau(i),i} = x_{\sigma(i),i}$. De plus, $x_{\sigma \circ \tau(k),k} = x_{\sigma(l),k} = x_{\sigma(l),l}$ puisque $x_k = x_l$. De même, $x_{\sigma \circ \tau(l),l} = x_{\sigma(k),k}$. On en déduit que si $\sigma \in A_n$,

$$\prod_{i=1}^{n} x_{\sigma \circ \tau(i),i} = \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i}$$

Comme $\varepsilon(\sigma) = 1$ et $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = -1$, on en déduit que $\Delta_e(x_1, \dots, x_n) = 0$. Donc la forme Δ_e est alternée.

Soit maintenant $f \in \Lambda_n(E)$. Montrons que f est un multiple de Δ_e.

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_{i,1}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n x_{i,n}e_i\right) \\ &= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in[[1,n]]^n} x_{i_1,1}\dots x_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \end{aligned}$$

Lorsque l'application $k \mapsto i_k$ n'est pas injective, $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$. On obtient donc

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n) \\ &= f(e_1, \dots, e_n)\Delta_e(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Pour le passage à l'avant dernière ligne, on a utilisé le fait que f est alternée, donc antisymétrique (proposition 3.3.2). □

Définition 3.3.4. *Soit n la dimension de E et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Soit pour tout j la décomposition de x_j dans la base e :*

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j}e_i$$

On appelle déterminant de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base e l'élément $\det_e(x_1, \dots, x_n)$ *de K suivant.*

$$\begin{aligned} \det_e(x_1, \dots, x_n) &= \Delta_e(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i),i} \end{aligned}$$

On note

$$\det_e(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}$$

Remarque. La fonction $\det_e : E^n \to K$ est l'unique élément de $\Lambda_n(E)$ qui vaut 1 en $e = (e_1, \dots, e_n)$.

Théorème 3.3.5. (Formule de Chasles) *Soient $b = (b_1, \dots, b_n)$ et $c = (c_1, \dots, c_n)$ deux bases de l'espace vectoriel E. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$*

$$\det_b(x_1, \dots, x_n) = \det_b(c_1, \dots, c_n)\det_c(x_1, \dots, x_n)$$

Démonstration. Comme $\Lambda_n(E)$ est de dimension 1, il est engendré par la forme $\det_c$ (qui est non nulle car $\det_c(c) = 1$). Ainsi, il existe $\lambda \in K$ tel que $\det_b = \lambda \det_c$. En évaluant cette égalité en c, on trouve que $\lambda = \det_b(c)$. □

Corollaire 3.3.6. *Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. La famille $(x_i)_{i \in [[1,n]]}$ est linéairement indépendante si et seulement si $\det_e(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Dans ce cas, la famille (x_i) est une base de E.*

Démonstration. Si la famille (x_i) est liée, alors $\det_e(x_1, \ldots, x_n) = 0$ d'après la proposition 3.3.1. On la suppose maintenant libre. C'est donc une base de E que l'on note b. D'après la formule de Chasles, pour tout $(y_1, \ldots, y_n) \in E^n$,

$$\det_b(y_1, \ldots, y_n) = \det_b(e_1, \ldots, e_n) \det_e(y_1, \ldots, y_n)$$

Si l'on évalue cette égalité en $(y_i) = b = (x_i)$, on obtient $\det_b(b) = \det_b(e)\det_e(b)$. Comme $\det_b(b) = 1$, cela donne $\det_b(e)\det_e(b) = 1$ donc $\det_e(b) \neq 0$. □

3.4. Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n.

Théorème 3.4.1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique élément* $\det(u)$ *de K tel que pour tout $f \in \Lambda_n(E)$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$*

$$f(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) f(x_1, \ldots, x_n)$$

Cet élément $\det(u)$ *est appelé le déterminant de u.*

Démonstration. Si $f = 0$, la relation est vraie. Supposons que $f \neq 0$. On pose $f_u(x_1, \ldots, x_n) = f(u(x_1), \ldots, u(x_n))$. Alors $f_u \in \Lambda_n(E)$. Comme cet espace est de dimension 1, il existe $d \in K$ tel que $f_u = df$. Montrons que d ne dépend pas de f. Soit g un autre élément non nul de $\Lambda_n(E)$. Il existe $\lambda \in K$ tel que $g = \lambda f$. Alors $g_u = \lambda f_u = \lambda df = dg$. □

Proposition 3.4.2. *Soient $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

$$\det(u) = \det_e(u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

Démonstration. On applique la définition de $\det(u)$ à $f = \det_e$. □

Corollaire 3.4.3. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$.

Proposition 3.4.4. *Si u et v sont deux endomorphismes de E, alors* $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$. *Ainsi, le déterminant définit un homomorphisme de groupes de $GL(E)$ dans K^*.*

Démonstration. Soient $f \in \Lambda_n(E)$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

$$\begin{aligned} f(u \circ v(x_1), \dots, u \circ v(x_n)) &= \det(u) f(v(x_1), \dots, v(x_n)) \\ &= \det(u)\det(v) f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

Théorème 3.4.5. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est un isomorphisme si et seulement si* $\det(u) \neq 0$.

Démonstration. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. u est un isomorphisme si et seulement si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base de E, c'est-à-dire si et seulement si cette famille est libre. Or d'après le corollaire 3.3.6, c'est le cas si et seulement si $\det_e(u(e_1), \dots, u(e_n)) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\det(u) \neq 0$ d'après la proposition 3.4.2. □

3.5. Déterminant d'une matrice

Définition 3.5.1. *Soit R un anneau commutatif. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(R)$. On appelle déterminant de A l'élément* $\det(A)$ *de R suivant.*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Exercice 3.5.2. *Soient $\sigma \in S_n$ et P_σ la matrice de permutation correspondante. Montrer que* $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$. *En particulier,* $\det(I_n) = 1$.

Exercice 3.5.3. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n-1}(R)$, $l \in \mathcal{M}_{1,n-1}(R)$ (un vecteur ligne), $a \in R$ et B la matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} a & l \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Montrer que* $\det B = a.\det A$.

Exercice 3.5.4. *Soient $A \in \mathcal{M}_p(R)$, $B \in \mathcal{M}_{n-p}(R)$, $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(R)$, et M la matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Montrer que* $\det M = \det A \cdot \det B$.

Cette définition 3.5.1 est donnée sur un anneau R. C'est que nous aurons besoin de calculer des déterminants de la forme $\det(A - XI_n)$, donc des déterminants de matrices de $\mathcal{M}_n(K[X])$.

Revenons aux matrices à coefficients dans un corps commutatif K.

Remarquons que si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ et $A_1, \dots, A_n$ les vecteurs colonnes de A,

$$\det(A) = \det_e(A_1, \dots, A_n)$$

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, soit $A = \mathrm{Mat}_e(u)$. Alors les vecteurs colonnes de A sont les coordonnées des $u(e_j)$ dans la base e. Ainsi,

$$\det(A) = \det_e(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(u)$$

On déduit donc du paragraphe précédent les propriétés suivantes.

Proposition 3.5.5. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$.*

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. *A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$.

Revenons au cas des matrices de $\mathcal{M}_n(R)$ (R étant un anneau commutatif).

Proposition 3.5.6. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(R)$,* $\det({}^tA) = \det(A)$.

Démonstration. Exercice (utiliser la définition du déterminant). □

Proposition 3.5.7. *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(R)$. Alors* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On considère l'anneau à $2n^2$ indéterminées $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[(x_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}, (y_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}]$. On considère les matrices $M = (x_{i,j})$ et $N = (y_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathcal{A})$. Soit $\mathcal{A}' = \mathrm{Fr}(\mathcal{A})$ le corps des fractions de $\mathcal{A}$, qui existe puisque $\mathcal{A}$ est intègre. Les matrices peuvent être vues comme des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathcal{A}')$ et donc on sait que $\det(MN) = \det(M)\det(N)$. Par spécialisation $x_{i,j} \mapsto a_{i,j}$ et $y_{i,j} \mapsto b_{i,j}$, on obtient l'égalité $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. □

3.6. Développement suivant une ligne ou colonne

Soit R un anneau commutatif. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(R)$. Soient $k, l \in [[1, n]]$. On note $A_{k,l}$ la matrice A privée de sa k-ième ligne et l-ième colonne : $A_{k,l} = (a_{i,j})_{(i,j)\in I_k \times J_l}$ où $I_k = [[1, k-1]] \cup [[k+1, n]]$ et $J_l = [[1, l-1]] \cup [[l+1, n]]$.

Théorème 3.6.1. 1. *Pour tous $i, j \in [[1, n]]$, On peut calculer un déterminant par les développements suivants.*

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det A_{k,j} \text{ (suivant la } j\text{-ième colonne)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \det A_{i,k} \text{ (suivant la } i\text{-ième ligne)}\end{aligned}$$

2. Pour $i \neq j$

$$0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,i} \mathrm{det} A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{j,k} \mathrm{det} A_{i,k}$$

Démonstration. Montrons la première égalité du 1 (la seconde se montre de la même façon, ou en utilisant la transposée). La j-ième colonne de A se décompose sous la forme

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

La multilinéarité du déterminant permet d'écrire

$$\mathrm{det} A = \det(d_1) + \cdots + \det(d_n) \tag{3.1}$$

où pour tout i,

$$d_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \dots & & \dots & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \dots & & \dots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Soient les permutations $\sigma = (1, 2, \dots, i)$ et $\sigma' = (1, 2, \dots, j)$ et soient P_σ et $P_{\sigma'}$ les matrices de permutations correspondantes. Le produit $P_\sigma d_i P_{\sigma'^{-1}}$ permet de faire une permutation circulaire sur les lignes et sur les colonnes (voir l'exercice 2.6.2).

$$P_\sigma d_i P_{\sigma'^{-1}} = \begin{pmatrix} a_{i,j} & a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,1} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \dots & & \dots & & \dots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \dots & & \dots & & \dots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

ce que l'on peut écrire par blocs

$$P_\sigma d_i P_{\sigma'^{-1}} = \begin{pmatrix} a_{i,j} & * \\ 0 & A_{i,j} \end{pmatrix}$$

Comme $\det P_\sigma = (-1)^{i-1}$ et $\det P_{\sigma'^{-1}} = (-1)^{j-1}$, $\det(d_i) = (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (voir l'exercice 3.5.3). En reportant dans (**??**), on obtient bien l'égalité annoncée.

Pour la première égalité du **??**, on remarque qu'il s'agit du développement suivant la j-ième colonne du déterminant de la matrice A dans laquelle on a remplacé la colonne j par la colonne i. Cette matrice a deux colonnes identiques donc son déterminant est nul. □

Définition 3.6.2. *1. L'élément* $(-1)^{i+j}\det A_{i,j}$ *de R est appelé cofacteur (i,j) de A. On le note* $\mathrm{cofac}_{i,j}(A)$.

2. La matrice $\mathrm{Com}(A) = (\mathrm{cofac}_{i,j}(A))_{i,j}$ *est appelée la comatrice de A.*

Corollaire 3.6.3. ${}^t\mathrm{Com}(A)A = A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = \det(A)I_n$.

Ainsi, A est inversible si et seulement si $\det A \in R^*$ *(le groupe des éléments inversibles de l'anneau R pour sa loi multiplicative).*

Démonstration. Ce sont les égalités du théorème 3.6.1. □

Remarque. Si R est un corps, on retrouve le fait que A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

3.7. Opérations sur les lignes et les colonnes

En pratique, pour calculer un déterminant, on aura souvent intérêt à faire des opérations sur les lignes et les colonnes de la matrice.

Un échange de deux lignes ou de deux colonnes multiplie le déterminant par -1. De plus, soit E est un espace vectoriel de dimension n, de base e. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Pour un i fixé, on pose $y_j = x_j$ si $j \neq i$ et $y_i = x_i + \sum_{j\neq i} m_j x_j$, où les m_j sont des éléments de R donnés. Alors par multilinéarité, on voit que

$$\det_e(y_1, \ldots, y_n) = \det_e(x_1, \ldots, x_n)$$

Cela montre que dans une matrice, si l'on ajoute à une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes), on ne change pas le déterminant.

Au chapitre suivant, on interprètera ces opérations comme des multiplications à gauche (resp. droite) par certaines matrices appelées matrices de transvection. On rappellera aussi l'algorithme du pivot de Gauss qui systématise de tels calculs.

Exemple. Calculer le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ -1 & X & 2 \\ 1 & 0 & X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}[X])$$

On note l_1, l_2, l_3 les lignes de A et c_1, c_2, c_3 ses colonnes.

Première méthode. On développe suivant la troisième ligne.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ X & 2 \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} X-1 & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = 2 - X + X(X^2 - X + 1) \\ &= X^3 - X^2 + 2 = (X+1)(X^2 - 2X + 2) \end{aligned}$$

Seconde méthode. On commence par des opérations sur les lignes et colonnes.

	$c_1 \longleftarrow c_1 + c_2 + c_3$	$l_2 \longleftarrow l_2 - l_1$ $l_3 \longleftarrow l_3 - l_1$
$\begin{pmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ -1 & X & 2 \\ 1 & 0 & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ X+1 & X & 2 \\ X+1 & 0 & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 1 \\ 0 & -1 & X-1 \end{pmatrix}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ 0 & X-1 & 1 \\ 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} X-1 & 1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)(X^2 - 2X + 2) \end{aligned}$$

3.8. Exercices

Exercice 3.8.1. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables (resp. équivalentes) sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles sont semblables (resp. equivalentes) sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 3.8.2 (Déterminant de Vandermonde)**.** *Soient $x_1, \ldots, x_{n-1} \in K$. Montrer que*

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Exercice 3.8.3. *Dans* $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$*, Calculer*

$$\Delta_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & \ldots & \ldots & x_1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{vmatrix}$$

Pour tout $i \in [[1, n]]$*, on note* $s_i = \sum_{j=0}^{i} j$*. Calculer* $\Delta(s_1, \ldots, s_n)$*.*

Exercice 3.8.4. *Soit* $A_n = (|i-j|)_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$*. Calculer* $\det(A_n)$*.*

Exercice 3.8.5. *Soit* q *une puissance d'un nombre premier. Montrer que* $\mathrm{Card}(GL_n(\mathbb{F}_q)) = (q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-1})$*. Montrer que* $\mathrm{Card}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)) = \mathrm{Card}(GL_n(\mathbb{F}_q))/(q-1)$*.*

Chapitre 4

Systèmes d'équations linéaires

4.1. Description du problème

4.1.1 Les systèmes d'équations et leur écriture matricielle

Soient K un corps commutatif, $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\left(E_{ij}^{(m)}\right)_{(i,j)\in[[1,m]]\times[[1,m]]}$, $(e_i)_{i\in[[1,n]]}$, $(\varepsilon_i)_{i\in[[1,m]]}$ les bases canoniques respectives de $\mathcal{M}_m(K)$, $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ et $\mathcal{M}_{m,1}(K)$.

Ce texte porte sur les systèmes d'équations à coefficients dans K. Un tel système s'écrit

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

On peut aussi l'écrire sous forme matricielle :

$$AX = B$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ appartient à l'espace $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans K et où $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{M}_{m,1}(K)$.

On appelle alors système homogène associé à $\mathcal{S}$ le système suivant

$$(\mathcal{S}_H) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire $AX = 0$.

Définition 4.1.1. *Le système est dit compatible s'il admet au moins une solution.*

Exemples. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ est compatible. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_2 = 3 \end{cases}$ n'est pas compatible.

4.1.2 Interprétation vectorielle

Soient $c_1, \dots, c_n$ les colonnes de A. Alors $(\mathcal{S})$ est équivalent à $\sum_{i=1}^{n} x_i c_i = b$. Le système est donc compatible si et seulement si $b \in \mathrm{Vect}(c_1, \dots, c_n)$. Cela signifie que le rang de la matrice obtenue en concaténant A et B est de même rang que A.

4.1.3 Applications linéaires

L'application de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ dans $\mathcal{M}_{m,1}(K)$ qui à X associe AX est une application linéaire. L'ensemble F_H des solution de $\mathcal{S}_H$ est le noyau de cette application linéaire, qu'on appelle aussi noyau de A. C'est un K-espace vectoriel de dimension $n - \mathrm{rg}(A)$. Si l'ensemble F des solutions de $\mathcal{S}$ est non vide, c'est un espace affine de direction F_H.

Cela s'applique aussi dans un cadre plus général. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et m. Soit u une application linéaire de E dans F. Le choix d'une base μ de E et d'une base ν de F permet d'écrire la matrice de u dans ces bases. Le calcul de $\ker u$ et de $u^{-1}(b)$ (où $b \in F$) se ramène à la résolution d'un système linéaire.

4.1.4 Dualité

Soit pour tout i l'application l_i définie par $l_i(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}x_j$. Chaque l_i définit une forme linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$. Le système $(\mathcal{S})$ s'écrit $(l_i(x) =$

$b_i)_{i\in[[1,m]]}$ et résoudre $\mathcal{S}_H$ revient à calculer $\mathrm{Vect}(l_1\dots,l_n)^0 = \{M \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$: $l_i(M) = 0\ \forall i \in [[1,n]]$.

Encore une fois, cela s'applique à tout espace vectoriel de dimension finie par le choix de bases. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Soit μ une base de E. Soient $l_1,\dots,l_m$ des éléments de l'espace dual E^* de E et $b_1,\dots,b_m$ des éléments de K. Supposons que l'on cherche l'ensemble des $x \in E$ tels que $l_i(x) = b_i$ pour tout i, où x est défini par son écriture dans la base μ. L'écriture des l_i dans la base duale de μ permet de se ramener à un système d'équations linéaires. En particulier, le calcul de $\mathrm{Vect}(l_1,\dots,l_m)^0$ se ramène à la résolution d'un système homogène.

4.2. Système de Cramer

Soient $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$. On cherche donc à résoudre l'équation $AX = B$. Un tel système s'appelle système de Cramer.

Pour résoudre cette équation, on peut se souvenir du corollaire **??** qui permet d'écrire

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\mathrm{Com}(A).$$

On en déduit les les formules de Cramer

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

où A_i est la matrice A dans laquelle la i-ème colonne a été remplacée par B (exercice : s'inspirer de la preuve du théorème 3.6.1). Mais ces méthodes sont coûteuses : le calcul de $\det A$ par l'égalité

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1),1}\dots A_{\sigma(n),n}.$$

Mais ce calcul demande $n(n+1)! - 1$ opérations dans K.

Nous utiliserons d'autres méthodes. La méthode du pivot de Gauss utilise des opérations sur les lignes du système. Ces opérations sont l'objet du paragraphe suivant.

4.3. Opérations élémentaires

On définit les matrices de $\mathcal{M}_m(K)$ suivantes.

Matrices de transvection. $B_{i,j}^{(m)}(\lambda) = I_m + \lambda E_{i,j}^{(m)}$ $(\lambda \in K^*)$.

Matrices de dilatation. $D_i^{(m)}(\mu) = I_m + (\mu - 1)E_{i,i}^{(m)}$ $(\mu \in K \setminus \{0,1\})$.

Matrices de permutation. $P_\sigma^{(m)} = (\delta_{i,\sigma(j)})$ $(\sigma \in S_m)$.

La multiplication à gauche de l'une de ces matrice par A correspond à une opération élémentaire sur les lignes $l_1, \ldots, l_m$ de A. Cette correspondance est décrite ci-dessous.

M	Multiplication à gauche par M $A \longleftarrow MA$
$B_{i,j}^{(m)}(\lambda)$	$l_i \longleftarrow l_i + \lambda l_j$
$P_{(i,j)}^{(m)}$	$l_i \longleftrightarrow l_j$
$P_\sigma^{(m)}$	$l_i \longleftarrow l_{\sigma^{-1}(i)}\ \forall i$
$D_i^{(m)}(\mu)$	$l_i \longleftarrow \mu l_i$

De même, la multiplication à droite par de telles matrices induisent des opérations sur les colonnes.

M	Multiplication à droite par M $A \longleftarrow AM$
$B_{i,j}^{(n)}(\lambda)$	$c_j \longleftarrow c_j + \lambda c_i$
$P_{(i,j)}^{(n)}$	$c_i \longleftrightarrow c_j$
$P_\sigma^{(n)}$	$c_i \longleftarrow c_{\sigma(i)}\ \forall i$
$D_i^{(n)}(\mu)$	$c_i \longleftarrow \mu c_i$

Proposition 4.3.1. *Pour $i \neq j$, l'application $\lambda \mapsto B_{i,j}^{(m)}(\lambda)$ (resp. $\mu \mapsto D_i^{(m)}(\mu)$, $\sigma \mapsto P_\sigma^{(m)}$) est un homomorphisme de groupes de $(K, +)$ dans $SL_m(K)$ (resp. de $(K^*, *)$ dans $GL_m(K)$, de S_m dans $GL_m(K)$. De plus $B_{i,j}^{(m)}(\lambda)^{-1} = B_{i,j}^{(m)}(-\lambda)$, $\quad D_i^{(m)}(\mu)^{-1} = D_i^{(m)}(\mu^{-1})$, $\quad \left(P_\sigma^{(m)}\right)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}^{(m)} = {}^tP_\sigma^{(m)}$, $\quad \det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$*

4.4. Pivot de Gauss (exemples)

4.4.1 Exemple 1

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Q})$$

Résoudre l'équation $AX = B$ équivaut à résoudre le système

$$(S) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y + 3z = 4 \\ 6x + 5y + 2z = 2 \end{cases}$$

Appelons respectivement l_1, l_2, l_3 les lignes $1, 2$ et 3 de ce système.

On considère le pivot $a_{1,1} = 2$ de la première ligne et on fait les transformations

$$l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1$$
$$l_3 \longleftarrow l_3 - 3l_1$$

on obtient le système équivalent

$$(S') \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \end{cases}$$

On fait ensuite la transformation

$$l_3 \longleftarrow l_3 + 2l_2$$

pour obtenir

$$(S'') \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -y + z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Finalement

$$z = 3 \quad , \quad y = 3 - 2 = 1 \quad , \quad x = \frac{1}{2}(1 - 1 - 3) = \frac{-3}{2}$$

La solution de l'équation est donc $X = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

L'algorithme suivi dans cet exemple s'appelle l'algorithme du pivot de Gauss : on rend le système triangulaire par des opérations sur les lignes du système.

Remarquons que l'on obtient l'égalité

$$L_2 L_1 A = U$$

où

$$L_1 = B_{2,1}^{(3)}(-2) B_{3,1}^{(3)}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$L_2 = B_{3,2}^{(3)}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\det A = \det U - 2$

Dans l'exemple suivant, on est aussi amené à faire des échanges de lignes, ce qui revient à multiplier à gauche par une matrice de permutation.

4.4.2 Exemple 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ On va résoudre $AX = B$ et calculer $\det A$ en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss. C'est bien sûr donné à titre d'exemple : il serait très facile dans ce cas de faire ces calculs autrement.

Appliquons la méthode du pivot de Gauss à la matrice concaténée $(A|B)$. Les transformations sont décrites dans le tableau ci-dessous.

	$l_1 \longleftrightarrow l_2$	$l_3 \longleftarrow l_3 - l_1$	$l_2 \longleftrightarrow l_3$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le système à résoudre est donc devenu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où l'unique solution $(x, y, z) = (0, -1/4, 1)$.

On obtient aussi l'égalité

$$P^{(3)}_{(2,3)} L_1 P^{(3)}_{(1,2)} A = U$$

où $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $\det P_{(2,3)} = \det P_{(1,2)} = -1$, $\det A = 4$.

4.5. Calcul de l'inverse

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Pour calculer l'inverse de A, on peut concaténer A et I_n. On obtient $(A|I_n)$. On applique l'algorithme décrit ci-dessus pour obtenir une matrice $B = (T|A')$ où T est triangulaire supérieure. Alors $A'A = T$.

Comme $T = (t_{i,j})$ est triangulaire supérieure et inversible, son coefficient $t_{n,n}$ est non nul. On s'en sert comme pivot pour obtenir des 0 sur les coefficients de la dernière colonne de $(1, n)$ à $(n-1, n)$ en faisant

$$l_i \longleftarrow l_i - t_{i,n} t_{n,n}^{-1} \text{ pour } i \in [[1, n-1]]$$

Ensuite, en multipliant à gauche par la matrice de dilatation $D_n(t_{n,n})^{-1}$, on fait l'opération

$$l_n \longleftarrow t_{n,n}^{-1} l_n$$

ce qui fait que B est transformée en une matrice de la forme $(T'|A'')$ où T' est de la forme

$$T' = \begin{pmatrix} T'' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$T'' \in \mathcal{M}_{n-1}$ étant triangulaire supérieure. On itère le procédé.

Finalement, on obtient une matrice de la forme $C = (I_n|A''')$. Alors $A'''A = I_n$ donc $A^{-1} = A'''$.

Remarque. Cela revient à résoudre simultanément les équations $AX = e_i$ pour $i \in [[1, n]]$, où les e_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.

Pour illustrer cela sur un exemple simple, reprenons l'exemple 2 où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. On part donc de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après les opérations décrites ci-dessus, on arrive à

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on fait $l_1 \leftarrow l_1 - l_3$ puis $l_2 \leftarrow l_2/4$ pour obtenir

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4.5.1. *Calculer de cette manière l'inverse A^{-1} de la matrice A de l'exemple 1.*

4.6. Complexité

Nous allons compter le nombre d'opérations sur les éléments de K nécessaires dans l'algorithme du pivot de Gauss. Un échange de lignes revient à un changement d'indices. Nous ne compterons pas ces échanges. On peut donc supposer que les pivots rencontrés sont tous non nuls. On note $A = (a_{i,j})$. On note aussi $A_1 = A$.

Étape 1. La détermination de L'_1

$$\begin{aligned} L'_1 &= I_n - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} E_{i,1}^{(n)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ -a_{n,1}/a_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

demande $n-1$ divisions. Dans le calcul de

$$\begin{aligned} L'_1 A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{2,1}/a_{1,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ -a_{n,1}/a_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a'_{2,2} & \dots & a'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n,2} & \dots & a'_{n,n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

on sait que les coefficients sous le $a_{1,1}$ de la première colonne sont nuls. Il ne faut donc pas les calculer. D'abord dans un souci d'économie, mais aussi, dans le cas où les calculs sont approchés (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), un calcul mènerait à une approximation de 0, donc à une valeur non nulle.

Ce calcul demande $(n-1)^2$ multiplications et $(n-1)^2$ additions.

Étape k. Après la $(k-1)$-ème étape, on arrive à une matrice A_k de la forme

$$A_k = \begin{pmatrix} T_k & B_k \\ 0 & A'_k \end{pmatrix}$$

où $T_k \in \mathcal{T}_{\sup,k-1}(K)$, $B_k \in \mathcal{M}_{k-1,n-k+1}(K)$ et $A'_k \in \mathcal{M}_{n-k+1}(K)$. Le calcul de A_{k+1} se ramène à un calcul sur A'_k. Cela demande $n-k$ divisions pour le calcul de L'_k, puis de $(n-k)^2$ multiplications et $(n-k)^2$ additions pour le calcul de $A_{k+1} = L'_k A_k$.

En tout, le nombre d'opérations est égal à

$$\begin{aligned} C &= 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{2}{3}n^3 + O(n^2) \end{aligned}$$

Théorème 4.6.1. *Le nombre d'opérations dans K nécessaires à l'exécution de l'algorithme du pivot de Gauss sur une matrice de $GL_n(K)$ est au plus équivalent à $2/3n^3$.*

Voyons maintenant le coût de la résolution d'un système triangulaire. Soit

$$(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ \qquad a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

où les $a_{i,i}$ sont non nuls. Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x_n = a_{n,n}^{-1} b_n \\ x_{n-1} = a_{n-1,n-1}^{-1}\left(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n\right) \\ \vdots \\ x_1 = a_{1,1}^{-1}\left(b_1 - \displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{1,j}x_j\right) \end{cases}$$

On calcule dans l'ordre $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$. On peut donc se servir des valeurs de $x_n, \ldots, x_{k+1}$ pour le calcul de

$$x_k = a_{k,k}^{-1}\left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{k,j}x_j\right).$$

Ce calcul demande au plus une division, $n-k$ additions et $n-k$ multiplications. En tout, le nombre maximal d'opérations est

$$\begin{aligned} C &= 2\sum_{k=1}^{n-1} k + n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Théorème 4.6.2. *La résolution d'un système triangulaire de taille n demande au plus n^2 opérations dans K.*

Enfin, pour calculer l'inverse de A, on résout simultanément les équations $AX = e_i$ pour $i \in [[1,n]]$ (où les e_i sont les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$). Le nombre d'opérations dans K nécessaires est donc au plus équivalent à $5/3n^3$.

4.7. Matrices échelonnées

Dans le cas d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ on peut appliquer la méthode du pivot de Gauss comme on l'a fait ci-dessus dans le cas où $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Au lieu d'obtenir une matrice U triangulaire supérieure, on obtient une *matrice échelonnée*, dont nous donnons la définition ci-dessous.

Définition 4.7.1. *Une matrice $U = (u_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K) \smallsetminus \{0\}$ est dite échelonnée s'il existe $r \in [[0, \inf(m,n)]]$ et des entiers $j_1, \ldots, j_r$ tels que $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$ de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées.*

(1) Pour tout $i \in [[1,r]]$ et tout $j \in [[1, j_i - 1]]$, $u_{ij} = 0$.

(2) Pour tout $i \in [[1,r]]$, $u_{ij_i} \neq 0$.

(3) Pour tout $i > r$, pour tout j, $u_{ij} = 0$.

Alors r est le rang de U.

Exemple. La matrice échelonnée U suivante est de rang 3 (les $\bullet$ sont non nuls). Dans cet exemple, $j_1 = 3, j_2 = 5, j_3 = 8$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \bullet & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si l'on veut résoudre un système $AX = B$, on peut concaténer A et B. On obtient $A' = (A|B)$. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, on obtient une matrice $V = (U|C)$ échelonnée.

Le système a des solutions si et seulement si $C \in \mathrm{Vect}(U_1, \ldots, U_n)$, où les U_j sont les colonnes de U. Cela veut dire que $\mathrm{rg}U = \mathrm{rg}V$. Cela veut-dire aussi que le nombre de lignes non nulles sont les mêmes dans U et V.

Soit alors $r = \mathrm{rg}U = \mathrm{rg}V$. Soient (c_i) et $(u_{i,j})$ les coefficients respectifs de C et U. Alors $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ est solution si et seulement si

$$\begin{cases} x_{j_r} = u_{rj_r}^{-1}\left(b_r - \displaystyle\sum_{j=j_r+1}^{n} u_{ij}x_j\right) \\ \quad\vdots \\ x_{j_1} = u_{1j_1}^{-1}\left(b_1 - \displaystyle\sum_{j=j_1+1}^{n} u_{ij}x_j\right) \end{cases} \tag{4.1}$$

Pour chaque i allant de r à 1, on remplace x_{j_i} par sa valeur décrite ci-dessus. On obtient donc X en fonction des paramètres de l'ensemble

$$\{x_i \ : \ i \in [[1, n]]\} \setminus \{x_{j_k} \ : \ k \in [[1, r]]\}\,.$$

Il y a donc $n - r$ paramètres, ce qui correspond bien au fait que l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension $n - r$.

4.8. Action de $\mathbf{SL}_m(K)$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(K)$

Pour cette partie, voir par exemple [Fresnel, algèbre des matrices, p. 47 à 54].

Ici, on modifie les règles du jeu : on joue toujours avec le pivot de Gauss, mais en n'utilisant que des matrices de $\mathrm{SL}_m(K)$ pour nos opérations élémentaires. Ainsi, les matrices de permutation qui échangent deux lignes ne sont plus permises. En fait, on se contentera des multiplications par les matrices de transvection.

Nous trouverons ainsi un système de représentants de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ sous l'action de $\mathrm{SL}_m(K)$ et nous montrerons que $\mathrm{SL}_n(K)$ est engendré par les transvections.

Définition 4.8.1. *Une matrice échelonnée $U = (u_{ij})$ est dite normalisée si elle vérifie les propriétés suivantes, avec les notations de la définition* **??**.

(4) Pour tout $i \in [[1, r]]$ et tout $k \neq i$, $u_{kj_i} = 0$.

(5) Pour tout $i \in [[1, r-1]]$, $u_{ij_i} = 1$.

(6) Si $m > r$, $u_{rj_r} = 1$.

Remarque. Si U est échelonnée normalisée et si l'on note ses colonnes $U_1 \dots, U_n$, alors pour tout $k \in [[1, r-1]]$, $U_{j_k} = \varepsilon_k$. De plus, si $r < m$, $U_{j_r} = \varepsilon_r$ et si $r = m$, $U_{j_r} = u_{rj_r}\varepsilon_r$.

Exemples.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \times & 0 & \times & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \times & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \times & 0 & \times & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \times & \times & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \times \end{pmatrix}$$

Théorème 4.8.2. *Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(K) \smallsetminus \{0\}$. Il existe $S \in SL_m(K)$, produit de matrices $B_{ij}(\lambda)$ telle que $U = SM$ soit échelonnée normalisée. De plus, cette matrice U est unique.*

Démonstration. Soit $U = M$. On appellera toujours U les transformées successives de cette matrice par les opérations élémentaires que nous effectuerons. On note $U = (u_{i,j})$.

Si $m = 1$, la matrice U est échelonnée normalisée. On suppose $m \geq 2$.

On note $l_1, \dots, l_m$ les lignes de U et $c_1, \dots, c_n$ ses colonnes. Soit j_1 le plus petit entier tel que $c_{j_1} \neq 0$. S'il existe $i \geq 2$ tel que $u_{ij_1} \neq 0$, l'opération

$$l_1 \longleftarrow l_1 + \frac{1 - u_{1j_1}}{u_{ij_1}} l_i \tag{4.2}$$

donne une nouvelle matrice U telle que $u_{1j_1} = 1$.

Sinon, comme $c_{j_1} \neq 0$, $u_{1,j_1} \neq 0$. En faisant

$$l_2 \longleftarrow l_2 + l_1 \tag{4.3}$$

on se retrouve au cas précédent. On effectue l'opération (**??**) pour obtenir $u_{1j_1} = 1$.

Pour $i \in [[2, m]]$, on effectue alors l'opération

$$l_i \longleftarrow l_i - u_{ij_1} l_1 \tag{4.4}$$

ce qui a pour effet d'annuler les coefficients u_{ij_1}. On obtient une matrice de la forme

$$U = \begin{pmatrix} 0_{1,j_1-1} & 1 & v \\ 0_{m-1,j_1-1} & 0_{m-1,1} & U_2 \end{pmatrix}$$

où $0_{k,l}$ est la matrice nulle de $M_{k,l}(K)$, $v \in M_{1,n-j_1}(K)$ et $U_2 \in M_{m-1,n-j_1}(K)$.

On applique ensuite le même procédé à U_2, et l'on construit ainsi des matrices $U_k \in M_{m-k+1,n-j_{k-1}}(K)$, pour $k \in [[2,r]]$. Pour $k \leq m-1$ le nombre de lignes est $m-k+1 \geq 2$, donc le procédé s'applique. Si par contre $m = r$, la matrice U_r a une seule ligne et on ne peut pas modifier u_{r,j_r} de cette façon.

On obtient une matrice échelonnée U telle que pour tout $k \in [[1, r-1]]$, $u_{k,j_k} = 1$ et telle que $u_{r,j_r} = 1$ si $r < m$. Pour terminer, on place des 0 au dessus de chaque u_{k,j_k} en faisant les opérations suivantes.

$$l_i \longleftarrow l_i - u_{i,j_k} l_k \tag{4.5}$$

pour tout $k \in [[1, r-1]]$ (resp. $[[1, r]]$ si $r < m$) et tout $i \in [[1, k-1]]$ et

$$l_i \longleftarrow l_i - \frac{u_{i,j_r}}{u_{r,j_r}} l_r \tag{4.6}$$

pour $i \in [[1, r-1]]$ si $r = m$.

Reste à montrer l'unicité.

Soit $M \in M_{m,n}(K)$. Soit $U \in M_{m,n}(K)$ échelonnée normalisée et $S \in \mathrm{SL}_n(K)$ telles que $SM = U$. Montrons que U est unique pour cette propriété.

On note maintenant $M_1 \ldots, M_n$ (resp. $U_1, \ldots, U_n$) les colonnes de M (resp. de U). En particulier, si $k \in [[1, r-1]]$ (resp. $k \in [[1, r]]$ si $r < m$), $U_{j_k} = \varepsilon_k$ et si $r = m$, $U_{j_r} = u_{r,j_r} \varepsilon_r$.

La preuve réside dans le fait suivant. pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$,

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i\right) = 0 \iff U\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_i\right) = 0$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i = 0$$

En particulier, comme la famille $(U_{j_1}, \ldots, U_{j_r})$ est libre, la famille $(M_{j_1}, \ldots, M_{j_r})$ est libre.

Pour tout $j \in [[1, j_1 - 1]]$, $U_j = 0$. Donc l'entier j_1 est uniquement déterminé par M : c'est le plus petit indice tel que $M_{j_1} \neq 0$.

Soit $k \in [[2, r]]$. Pour $j \in [[j_{k-1}+1, j_k - 1]]$, on a la relation

$$U_j = \sum_{l=1}^{k-1} u_{l,j} \varepsilon_l = \sum_{l=1}^{k-1} u_{l,j} U_{j_l}$$

et $U_{j_k} \notin \mathrm{Vect}(U_{j_1}, \ldots, U_{j_{k-1}})$. Donc l'entier j_k est le plus petit indice tel que $M_{j_k} \notin \mathrm{Vect}(M_{j_1}, \ldots, M_{j_{k-1}})$. De plus, les coefficients $u_{l,k}$ pour $l \in [[1, k-1]]$ sont uniquement déterminés par la relation

$$M_j = \sum_{l=1}^{k-1} u_{l,j} M_{j_l}.$$

Il reste à traiter les colonnes U_j pour $j \geq j_r$. Si $r < m$, ces colonnes se traitent de la même façon que les précédentes.

Supposons que $r = m$. Soit $M' = (M_{j_1}| \ldots |M_{j_r})$. Alors $SM' = (U_{j_1}| \ldots |U_{j_r})$. Ces deux matrices appartiennent à $M_n(K)$ et $\det M' = \det SM' = u_{r,j_r}$. Le coefficient u_{r,j_r} est donc uniquement déterminé. Les colonnes U_j pour $j > j_r$ sont elles aussi uniquement déterminées par le raisonnement déjà utilisé pour les autres colonnes U_j.

□

Corollaire 4.8.3. 1. *Le groupe $SL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvections.*

2. *$GL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvections et les matrices de dilatation. Plus précisément, toute matrice M de $GL_n(K)$ peut se décomposer sous la forme suivante. $M = D_n(\det M)T_1 \ldots T_k$ où les T_i sont des matrices de transvection.*

L'application de $\mathrm{SL}_m(K) \times \mathcal{M}_{m,n}(K)$ dans $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ qui à (S, M) associe SM définit une action du groupe $\mathrm{SL}_m(K)$ sur l'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Corollaire 4.8.4. *La réunion de l'ensemble des matrices échelonnées normalisées avec l'ensemble $\{0\}$ constitue un système de représentants des orbites pour cette action de $SL_m(K)$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.*

On peut déduire du corollaire **??** des résultats de nature topologique. En effet, si par exemple $T = B_{ij}(\lambda) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, alors l'application f qui à $t \in [0, 1]$ associe $B_{i,j}(t\lambda)$ est une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(0) = I_n$ et $f(1) = T$. De même, si $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, l'application g qui à $t \in [0, 1]$ associe $D_n(t\mu)$ est une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $g(0) = I_n$ et $g(1) = D_n(\mu)$. En utilisant ce genre d'argument, on montre le corollaire suivant.

Corollaire 4.8.5. *Les groupes $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs. Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs. L'une contient I_n et l'autre contient $D_n(-1)$.*

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E.

5.1. Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 5.1.1. *Soit λ un élément de K. On dit que λ est une valeur propre de u s'il existe un élément x de $E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel élément x est appelé un vecteur propre associé à λ. On dit aussi que λ est la valeur propre associée à x.*

Définition 5.1.2. *Soit λ une valeur propre de u. On appelle espace propre associé à λ le sous-espace vectoriel de E*

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$$

Définition 5.1.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit u l'élément de $\mathcal{L}(K^n)$ canoniquement associé à A. Les valeurs propres, vecteurs propres et espaces propres de A sont les valeurs propres, vecteurs propres et espaces propres de u.*

Définition 5.1.4. *Le polynôme caractéristique de A est le polynôme de $K[X]$ défini par*

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

Ce polynôme est un polynôme de degré n. Dans l'écriture

$$\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$

on a $a_{n-1} = -\mathrm{Tr}(A)$ et $a_0 = (-1)^n \det(A)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient b une base de E et $A = \mathrm{Mat}_b(u)$. Alors le polynôme χ_A ne dépend pas de la base choisie.

Définition 5.1.5. *Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u = \chi_A$.*

Proposition 5.1.6. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble des valeurs propres de u est l'ensemble des racines dans K du polynôme χ_u. Cet ensemble est appelé le spectre de u et noté* $\mathrm{Spec}(u)$.

De même, si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, l'ensemble des valeurs propres de A est l'ensemble des racines de χ_A. Cet ensemble est appelé le spectre de A et noté $\mathrm{Spec}(A)$.

Définition 5.1.7. *On dit qu'une valeur propre de u (resp. A) est de multiplicité a si c'est une racine d'ordre a de χ_u (resp. χ_A).*

Soit u un endomorphisme de E

Définition 5.1.8. *On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u*

Soient e une base de E et $A = \mathrm{Mat}_e(u)$. On suppose que u est diagonalisable. Soit alors $b = (b_i)_{i \in [[1,n]]}$ une base de E formées de vecteurs propres de u. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes : pour tout i, $u(b_i) = \lambda_i b_i$. Soient $D = \mathrm{Mat}_b(u)$ et P la matrice de passage de (e) à (b) (c'est-à-dire la matrice dont les colonnes P_j sont les coordonnées des b_j écrits dans la base (e). Alors

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On note aussi $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Définition 5.1.9. *On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. C'est-à-dire s'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.*

5.2. Endomorphismes diagonalisables

Soit u un endomorphisme de E.

Définition 5.2.1. *On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si $u(F) \subset F$*

Proposition 5.2.2. *Les espaces propres de u sont stables par u.*

Démonstration. Exercice. □

Le résultat suivant est un cas particulier du lemme des noyaux que l'on verra plus tard (lemme **??**).

Proposition 5.2.3. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u. Alors $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ sont en somme directe.*

Démonstration. Si $r = 1$, il n'y a rien à démontrer. On suppose le résultat vrai pour $r-1$ valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$. Soit λ_r une r-ème valeur propre. Soit $x \in (E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_{r-1}}) \cap E_{\lambda_r}$. On écrit $x = x_1 + \cdots + x_{r-1}$ en somme d'éléments x_i de E_{λ_i} pour $i \in [[1, r-1]]$ ($x \in E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_{r-1}}$). Alors $u(x) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{r-1} x_{r-1}$. D'autre part, comme $x \in E_{\lambda_r}$, $u(x) = \lambda_r x = \lambda_r x_1 + \cdots + \lambda_r x_{r-1}$. D'après l'unicité de la décomposition dans une somme directe, on obtient que $(\lambda_r - \lambda_i)x_i = 0$ pour tout $i \in [[1, r]]$. Comme $\lambda_r \neq \lambda_i$ si $i \neq r$, c'est que $x_i = 0$ pour tout $i \in [[1, r-1]]$ donc $x = 0$. □

Il est clair que u est diagonalisable si et seulement si E est somme de ses espaces propres. Cette proposition indique que cette somme est directe.

Corollaire 5.2.4. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de u. Alors u est diagonalisable si et seulement si*

$$\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_r}$$

Proposition 5.2.5. *Soit λ une valeur propre de u de multiplicité a. Alors $\dim E_\lambda \leq a$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\dim E_\lambda \geq a + 1$. Soit alors une base $(b_1, \dots, b_{a+1})$ de E_λ. On complète cette famille libre en une base $b = (b_1, \dots, b_n)$ de E. La matrice $A = \mathrm{Mat}_b(u)$ est de la forme (par blocs)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I_{a+1} & A' \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$$

et alors $\chi_A(X) = (X - \lambda)^{a+1} \chi_{A''}(X)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

On en déduit une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

Théorème 5.2.6. *L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.*

(i) χ_u *est scindé dans* K.

(ii) *Pour toute valeur propre* λ *de* u, *la multiplicité de* λ *comme racine de* χ_u *est égale à* $\dim E_\lambda$.

Corollaire 5.2.7. *Si* χ_u *est scindé et n'admet que des racines simples, alors* u *est diagonalisable.*

5.3. Triangulation

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 5.3.1. *Soit* $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}(K)$. *On dit que* T *est triangulaire supérieurs (resp. inférieure) si* $t_{i,j} = 0$ *pour tout* $i > j$ *(resp.* $i < j$*).*

Définition 5.3.2. *On dit que* u *est triangulable s'il existe une base* b *de* E *telle que* $\mathrm{Mat}_b(u)$ *soit triangulaire.*

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *est triangulable si elle est semblable à une matrice triangulaire.*

Exercice 5.3.3. *Montrer que toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Théorème 5.3.4. u *est triangulable si et seulement si* χ_u *est scindé dans* K.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *Alors* A *est triangulable si et seulement si* χ_A *est scindé dans* K.

Démonstration. On suppose que u est triangulable. Soit b une base de E telle que $T = \mathrm{Mat}_b(u)$ est triangulaire supérieure. On note $T = (t_{i,j})$. Alors $\chi_T = (X - t_{1,1}) \dots (X - t_{n,n})$ est scindé.

Réciproquement, supposons que χ_u soit scindé. On procède par récurrence sur la dimension n de E. Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. On suppose le résultat vrai si $\dim E = n - 1$. Montrons le quand $\dim E = n$. Soit λ une valeur propre de u. Soit b_1 un vecteur propre associé à λ. On complète b_1 en une base $(b_1, \dots, b_n)$ de E. Alors $\mathrm{Mat}_b(u)$ est de la forme

$$\mathrm{Mat}_b(u) = \begin{pmatrix} \lambda & l \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$. $\chi_u(X) = (X - \lambda)\chi_A(X)$ donc χ_A est scindé dans K. D'après l'hypothèse de récurrence, la matrice A est triangulable. On en déduit que u est triangulable. □

Bien sûr, si dans une base b donnée, u a pour matrice une matrice triangulaire T, les valeurs propres de u sont les coefficients diagonaux de T.

Si K est algébriquement clos, alors toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ sont triangulables. C'est le cas par exemple quand $K = \mathbb{C}$.

5.4. Polynômes d'endomorphismes

Soit E un K-espace vectoriel non nul. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ de $K[X]$, on note

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k = a_d u^d + \cdots + a_1 u + a_0 \mathrm{id}_E$$

où $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$ pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $u^0 = \mathrm{id}_E$.

Définition 5.4.1. *On note $K[u] = \{P(u) \;:\; P \in K[X]\}$.*

La loi de composition $\circ$ des endomorphismes n'est pas commutative dans $\mathcal{L}(E)$. Cependant, les puissances de u commutent entre elles. Soient P et Q deux polynômes de $K[u]$, quand on développe la composée $P(u) \circ Q(u)$, on obtient $P \circ Q(u) = PQ(u)$. Ainsi,

$$P \circ Q(u) = PQ(u) = QP(u) = Q(u) \circ P(u)$$

L'application

$$\begin{aligned} \Phi \;:\; K[X] &\to \mathcal{L}(E) \\ P &\mapsto P(u) \end{aligned}$$

est un homomorphisme d'algèbres. C'est-à-dire que c'est une application linéaire de K espaces vectoriels, que

$$\Phi(PQ) = \Phi(P) \circ \Phi(Q) \quad \text{et que} \quad \Phi(1) = \mathrm{id}_E$$

pour tout $(P, Q) \in K[X]^2$.

L'image de Φ est $\mathrm{im}\,\Phi = K[u]$. L'homomorphisme Φ induit un isomorphisme d'algèbres

$$K[X]/\ker \Phi \simeq K[u]$$

Supposons E de dimension finie n. Comme $K[X]$ est un espace vectoriel de dimension infinie et $K[u] \subset \mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie, $\ker \Phi$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Ce noyau $\ker \Phi$ est un idéal de $K[X]$. Comme cet anneau est euclidien, il est principal. Il existe dont un polynôme unitaire $m_u \in K[X]$ tel que $\ker \Phi = m_u K[X]$. De plus, ce polynôme est uniquement défini.

Définition 5.4.2. *Ce polynôme m_u est appelé polynôme minimal de u.*

On a donc un isomorphisme d'algèbres

$$K[X]/(m_u) \simeq K[u]$$

Définition 5.4.3. *On appelle polynôme annulateur de u tout polynôme P qui vérifie $P(u) = 0$. Les polynômes annulateurs sont les éléments de $\ker \Phi = m_u K[X]$.*

Ainsi, m_u est le polynôme annulateur unitaire de plus petit degré. Nous démontrerons au paragraphe suivant que $\chi_u(u) = 0$ (théorème **??** de Cayley-Hamilton). Ainsi, m_u divise χ_u.

Lemme 5.4.4. (Lemme des noyaux) *Soit E un K-espace vectoriel. Soient $P_1, \ldots, P_r$ des éléments de $K[X]$ deux à deux premiers entre eux. Soit $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$. Pour tout i, on note $\ker P_i(u) = N_i$. On suppose que $P(u) = 0$. Alors*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$$

De plus, il existe des polynômes $\pi_1, \ldots, \pi_r$ de $K[X]$ tels que pour tout i, $\pi_i(u)$ est la projection p_i sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$.

Remarque. Si on ne suppose plus que $P(u) = 0$, on obtient

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$$

De plus, le reste du lemme est vrai en remplaçant E par $F = \ker P(u)$ (qui est stable par u).

Démonstration. Pour tout i, on note $Q_i = \prod_{j \neq i} P_i$. Alors $\operatorname{pgcd}(Q_1, \ldots, Q_r) = 1$ (on dit que les Q_i sont premiers entre eux dans leur ensemble). Donc il existe $U_1, \ldots, U_r$ dans $K[X]$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} U_i Q_i = 1$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{r} U_i(u) \circ Q_i(u) = \mathrm{id}_E \tag{5.1}$$

Pour tout $i \in [[1, r]]$, on note $\pi_i = U_i Q_i$ et $p_i = \pi_i(u)$. Alors $\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{id}_E$. On va appliquer la proposition 1.5.4. Pour cela, il suffit de montrer que les p_i sont des projecteurs et que si $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

$$p_i \circ p_j = U_i(u) \circ Q_i(u) \circ U_j(u) \circ Q_j(u) = U_i(u) \circ U_j(u) \circ Q_i(u) \circ Q_j(u) = 0$$

puisque P_i divise Q_j et $P_i(u) \circ Q_i(u) = 0$. Enfin, comme $\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{id}_E$,

$$p_i = p_i \circ \sum_{j=1}^{r} p_j = p_i^2$$

Cela montre bien que p_i est un projecteur. On conclut que

$$E = \bigoplus_{i \in [[1,r]]} \mathrm{im}\ p_i \text{ et pour tout } i,\ \ker p_i = \bigoplus_{j \neq i} \mathrm{im}\ p_j$$

Reste à montrer que im $p_i = N_i$. L'inclusion im $p_i \subset N_i$ est claire car $P_i(u) \circ \pi_i(u) = U_i Q_i P_i(u) = U_i P(u) = 0$. Montrons que $N_i \subset$ im p_i. Soit $x \in N_i$. Cela veut dire que $P_i(u)(x) = 0$ donc pour tout j distinct de i, $Q_j(u)(x) = 0$. La relation (**??**) donne alors

$$x = \sum_{j=1}^{r} U_j(u) \circ Q_j(u)(x) = U_i(u) \circ Q_i(u)(x) \in N_i$$

□

Cela s'applique en particulier au polynôme minimal.

Corollaire 5.4.5. *(i) u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.*

(ii) En particulier, u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Définition 5.4.6. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On appelle endomorphisme de F induit par u l'application*

$$u_F : \begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{array}$$

Exercice 5.4.7. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient u un endomorphisme diagonalisable de E et F un sous-espace de E stable par u. Montrer que l'endomorphisme u_F de F induit par u est diagonalisable.*

Toutes les notions et tous les résultats évoqués pour un endomorphisme u dans ce paragraphe se transposent aux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$.

5.5. Théorème de Cayley-Hamilton

Soit R un anneau commutatif. Dans ce paragraphe, on montre que le polynôme caractéristique d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(R)$ est un polynôme annulateur de A (mais on n'utilisera ici que le cas où R est un corps). On en tire ensuite des conséquence pour les endomorphismes du K-espace vectoriel E de dimension finie.

Théorème 5.5.1. (Cayley-Hamilton) *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(R)$, $\chi_A(A) = 0$.*

Démonstration. On note $A = (a_{i,j})$. Soit $B = XI_n - A \in \mathcal{M}_n(R[X])$. Soit $\mathrm{Com}(B)$ la comatrice de B, ou matrice des cofacteurs de B (voir la définition **??**). Soit $C = {}^t\mathrm{Com}(B)$. Alors

$$BC = CB = (\det B)I_n = \chi_A(X)I_n$$

Écrivons $\chi_A(X) = a_0 + \cdots + a_nX^n$.

Chaque cofacteur de B est au signe près le déterminant d'une matrice de taille $(n-1, n-1)$ où chaque ligne ne contient au plus qu'un coefficient de la forme $X - a_{i,i}$. Chacun de ces coefficients est donc au plus de degré $n-1$ en X. On peut donc écrire C de façon unique sous la forme

$$C = C_0 + C_1X + \cdots + C_{n-1}X^{n-1}$$

où pour tout $k \in [[0, n-1]]$, $C_k \in \mathcal{M}_n(R)$. On développe maintenant CB

$$CB = -C_0A + \sum_{k=1}^{n-1}(-C_kA + C_{k-1})X^k + C_{n-1}X^n$$

Comme $CB = \chi_A(X)I_n$, on obtient pour $k \in [[1, n-1]]$

$$a_0I_n = -C_0A \quad , \quad a_kI_n = -C_kA + C_{k-1} \quad , \quad a_nI_n = C_{n-1}$$

En remplaçant les a_kI_n par ces valeurs dans $\chi_A(A)$, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_A(A) &= a_0I_n + \cdots + a_nA^n \\ &= -C_0A + \sum_{k=1}^{n-1}(-C_kA + C_{k-1})A^k + C_{n-1}A^n \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Revenons au K-espace vectoriel E, que nous supposons de dimension finie.

Corollaire 5.5.2. *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0$.*

Corollaire 5.5.3. *Le polynôme minimal m_u de u divise χ_u.*

Proposition 5.5.4. *χ_u et m_u ont les mêmes racines dans K.*

Démonstration. Comme m_u divise χ_u, il est clair que les racines de m_u sont des racines de χ_u. Soit donc λ une racine de χ_u. Il existe un élément non nul x de E tel que $u(x) = \lambda x$. Or, $0 = m_u(u)(x) = m_u(\lambda)x$. □

5.6. Diagonalisation simultanée

Définition 5.6.1. *Soit U un ensemble d'éléments de $\mathcal{L}(E)$. On dit que les éléments de U sont simultanément diagonalisables s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de tous les éléments de U.*

Proposition 5.6.2. *Soient u et v deux endomorphismes de E. Si u et v commutent, alors les espaces propres de u sont stables par v*

Démonstration. Exercice. □

Proposition 5.6.3. *Soit U un ensemble d'endomorphismes diagonalisables de $\mathcal{L}(E)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout $(u, v) \in U^2$, $u \circ v = v \circ u$.

(ii) Les éléments de U sont simultanément diagonalisables.

Démonstration. **??** $\Longrightarrow$ **??**. Exercice.

?? $\Longrightarrow$ **??**. Procédons par récurrence sur la dimension de E. Si $\dim E = 1$, il n'y a rien à démontrer. On suppose la propriété vraie si $\dim E < n$. Soit E de dimension n. Si tout $u \in U$ est de la forme $u = \lambda \mathrm{id}_E$ (c'est-à-dire si tout les éléments de U sont des homothéties), toutes les bases de E diagonalisent tous les éléments de U. Supposons donc qu'il existe u qui n'est pas une homothétie. Alors u a au moins deux valeurs propres. Soit $\mathrm{Spec}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Pour tout i, on note E_i l'espace propre associé à λ_i. Alors $\dim E_i < n$. Comme u est diagonalisable,

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

Pour tout $i \in [[1, n]]$ et tout $v \in U$, E_i est stable par v. On note v_i l'endomorphisme de E_i induit par v. Comme v est diagonalisable, v_i l'est aussi. Comme $\dim E_i < n$, l'hypothèse de récurrence s'applique et les v_i sont simultanément diagonalisable. On note $\mathcal{B}_i$ la base obtenue. Alors $\bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$ est une base de E formée de vecteurs propres de tous les éléments de U. □

5.7. Sous-espaces caractéristiques

Définition 5.7.1. *Soit λ une valeur propre de u et soit a la multiplicité de λ comme racine de χ_u. Le sous-espace caractéristique associé à λ est le sous-espace vectoriel $E_\lambda = \ker((u - \lambda \mathrm{id}_E)^a)$ de E.*

Proposition 5.7.2. *Si λ est une valeur propre de u, alors le sous-espace caractéristique associé E_λ est stable par u.*

Démonstration. Exercice. □

Supposons que χ_u soit scindé dans K :

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{e_i}$$

Alors par le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux,

$$E = \bigoplus_{i \in [[1,r]]} E_i$$

où pour tout i, $E_i = \ker((u - \lambda_i)^{e_i})$. Pour tout i, on note u_i l'endomorphisme induit par u sur E_i.

Alors le polynôme minimal m_i de u_i divise $(X - \lambda_i)^{e_i}$ puisque ce polynôme annule u_i. Ainsi, le polynôme caractéristique χ_i de u_i est de la forme $(X - \lambda_i)^{f_i}$ où $f_i = \dim E_i$, puisque m_i et χ_i ont les mêmes racines.

Comme χ_i est scindé, u_i est triangulable. Soit pour tout i une base $\mathcal{B}_i$ qui triangule i, on note

$$T_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & t_{1,2} & \dots & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \lambda_i & t_{2,3} & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$. Alors la matrice

$T = \mathrm{Mat}_b(u)$ peut s'écrire par blocs

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & T_r \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

On voit que $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} \chi_i$ donc $e_i = f_i = \dim E_i$ pour tout i.

5.8. Décomposition de Dunford

Ici, on note différemment la dimension de E : $\dim E = p$

Définition 5.8.1. *On dit qu'un endomorphisme n de $\mathcal{L}(E)$ (resp. une matrice N de $\mathcal{M}_p(K)$) est nilpotent (resp. nilpotente) s'il existe un entier naturel non nul e tel que $n^e = 0$ (resp. $N^e = 0$). Le plus petit de ces entiers est appelé indice de nilpotence de n (resp. N).*

Proposition 5.8.2. *Soit $n \in \mathcal{L}(E)$. Alors n est nilpotent si et seulement si $\chi_n(X) = X^p$ (où $p = \dim E$)*

Démonstration. Exercice. □

Exercice 5.8.3. *Soient n et n' deux endomorphismes nilpotents de E.*

1. *Montrer que si $n \circ n' = n' \circ n$, alors $n + n'$ est nilpotent.*
2. *Est-ce encore vrai si $n \circ n' \neq n' \circ n$?*

Exercice 5.8.4. *Montrer qu'un endomorphisme diagonalisable et nilpotent est nul.*

Théorème 5.8.5. *Soit u un endomorphisme de E tel que χ_u est scindé dans K. Alors il existe $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ unique vérifiant les propriétés suivantes.*

(i) *d est diagonalisable.*

(ii) *n est nilpotent.*

(iii) *$u = d + n$*

(iv) *$d \circ n = n \circ d$.*

De plus, il existe des polynômes D et N de $K[X]$ tels que $d = D(u)$ et $n = N(u)$.

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité. Soient d, n comme dans l'énoncé du théorème, et soient D et N les polynômes correspondants. Soit $(d', n') \in \mathcal{L}(E)$ tel que $d' \circ n' = n' \circ d'$, d' est diagonalisable, n' est nilpotent, $u = d' + n'$. Alors d' et n' commutent avec u. Comme d et n sont des polynômes en u, d' commute avec d et n' commute avec n. Ainsi, $d - d' = n' - n$ est à la fois diagonalisable et nilpotent. On en déduit que $d = d'$ et $n = n'$.

Montrons maintenant l'existence. On reprend la notation

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{e_i}$$

et on note $E_i = \ker((u - \lambda_i)^{e_i})$ l'espace caractéristique associé à λ_i. D'après le lemme **??** des noyaux,

$$E = \bigoplus_{i \in [[1,r]]} E_i$$

et il existe des polynômes $\pi_i \in K[X]$ pour $i \in [[1, r]]$ tels que pour tout $i \in [[1, r]]$, $p_i = \pi_i(u)$ est la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$. Soient

$$D(X) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i(X) \quad \text{et} \quad N = X - D(X)$$

Alors $d = D(u)$ est diagonalisable car sur chaque E_i, il induit l'endomorphisme $\lambda_i \mathrm{id}_{E_i}$. De plus, $n = N(u)$ est nilpotent cal sur chaque E_i, il induit l'endomorphisme $u - \lambda_i \mathrm{id}_{E_i}$ qui est nilpotent d'indice de nilpotence inférieur ou égal à e_i. Il est clair que $d + n = u$ et enfin, d et n commutent car ce sont des polynômes en u. □

Remarque. On déduit facilement de ce théorème un résultat similaire pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(K)$. On parle alors de décomposition de Dunford de A.

Exemple. Soient T_i (pour $i \in [[1, r]]$) et T les matrices des égalités (**??**) et (**??**) ci-dessus. Soit pour $i \in [[1, r]]$ $N_i = T_j - \lambda_i I_{e_i}$ (ici, e_i est la taille de T_i). Alors N_i commute avec $D_i = \lambda_i I_{e_i}$. De plus, $N_i^{e_i} = 0$.

Soient les matrices

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D_r \end{pmatrix}$$

et

$$N = T - D = \begin{pmatrix} T_1 - D_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & T_2 - D_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & T_r - D_r \end{pmatrix}$$

Alors D et N commutent, $T = D + N$, D est diagonalisable (car diagonale) et N est nilpotente.

5.9. Exercices

Exercice 5.9.1. *1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.*

2. Montrer que cette égalité reste vraie si B n'est pas inversible.

Exercice 5.9.2. *Soient R un anneau commutatif et $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$. Montrer que*

$$\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ B & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n - AB & -A \\ 0_n & XI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XI_n & -A \\ 0_n & XI_n - BA \end{pmatrix}.$$

En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 5.9.3. *1. Soit K un corps commutatif de caractéristique distincte de 3. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)$.*

2. Si $\mathrm{Car}(K) = 3$, montrer que A n'est pas diagonalisable. Trianguler A.

Remarque. *Plaçons nous dans le cas où $K = \mathbb{R}$. Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on trouve $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si l'on utilise la théorie des espaces vectoriels euclidiens, on se souvient que comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est symétrique,* *il existe une matrice U orthogonale (c'est-à-dire d'inverse $U^{-1} = {}^tU$) telle que ${}^tUAU = D$. En utilisant par exemple un procédé d'orthonormalisation de Gram-schmidt sur une base de l'espace propre associé à la valeur propre 0 et en normalisant le vecteur propre associé à la valeur propre 3 choisi, on obtient* $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Exercice 5.9.4. *Soit K un corps commutatif de caractéristique nulle. Soit n un entier naturel non nul. Diagonaliser la matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

Exercice 5.9.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.*

Exercice 5.9.6. *Donner la décomposition de Dunford de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.9.7. *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Définir l'endomorphisme de E/F induit par u.*

Exercice 5.9.8. *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et m_u son polynôme minimal.*

1. *Soit $P \in K[X]$. Montrer que $P(u)$ est inversible si et seulement si P est premier à m_u.*
2. *Dans ce cas, montrer qu'il existe un polynôme $Q \in K[X]$ unique tel que $P(u)^{-1} = Q(u)$ et $\deg Q < \deg m_u$.*

Exercice 5.9.9. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $x \in E$, on note $K[u](x) = \{P(u)(x) \ : \ P \in K[X]\}$. On fixe un élément x de E.*

1. *Montrer que $K[u](x)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u.*

   On suppose maintenant que $K[u](x) = E$.
2. *Soit m_u le polynôme minimal de u et soit $d = \deg m_u$. Montrer que $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ est une base de E (donc $\dim E = d$).*
3. *En utilisant le théorème **??**, montrer que $\chi_u = (-1)^d m_u$.*

4. *On pose* $m_u = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$. *Montrer que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est appelée matrice compagnon du polynôme m_u.

5. *Sans utiliser le théorème* **??**, *retrouver le fait que* $\chi_u = (-1)^d m_u$.

Exercice 5.9.10 (Théorème de Cayley-Hamilton, version forte)**.** *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On a déjà démontré au paragraphe* **??** *que* m_u *divise* χ_u. *On donne une autre preuve de ce fait et on démontre en plus que* m_u *et* χ_u *ont les mêmes facteurs irréductibles.*

On fera appel au résultat de l'exercice **??**, *question 5 (que l'on obtient sans utiliser le paragraphe* **??***).*

1. *Montrer le résultat dans le cas où il existe* $x \in E$ *tel que* $E = K[u](x)$ *(voir l'exercice* **??**, *question 5). En déduire le résultat dans le cas où* $\dim E = 1$.

   On suppose le résultat vérifié si $\dim E < n$. *Soit* E *de dimension* n.

2. *Soit* $x \neq 0$. *Soit* $F = K[u](x)$. *On suppose que* $F \neq E$. *On note* v *l'endomorphisme de* F *induit par* u *et* w *l'endomorphisme de* E/F *induit par* u *(voir l'exercice* **??***).*
3. *Montrer que* $\chi_u = \chi_v\chi_w$ *et que* $\mathrm{ppcm}(m_v, m_w)|m_u|m_v m_w$.
4. *Montrer que* m_u *divise* χ_u.
5. *Soit* P *un polynôme irréductible divisant* χ_u. *Montrer que* P *divise* m_u.

Exercice 5.9.11 (À propos d'endomorphismes simultanément diagonalisables)**.** *Soit* E *un* K*-espace vectoriel de dimension finie. Soient* u *et* v *deux endomorphismes de* E *simultanément diagonalisables.*

1. *Existe-t-il un polynôme* R *tel que* $v = R(u)$ *? (Réponse : non, penser par exemple au cas où* $u = \mathrm{id}_E$, *ou bien où* $u = 0$, *et où* v *n'est pas une homothétie).*
2. *On suppose* K *infini. Existe-t-il un endomorphisme* w *et deux polynômes* P *et* Q *de* $K[X]$ *tels que* $u = P(w)$ *et* $v = Q(w)$ *? (Réponse : oui, utiliser une interpolation de Lagrange).*

3. *Montrer que ce résultat est faux en général si K est fini.*

Exercice 5.9.12 (Une application du théorème de Dunford)**.** *Soient K un corps commutatif, $P \in K[X]$, $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et B la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(K)$ définie par blocs de la manière suivante.*

$$B = \begin{pmatrix} A & P(A) \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

On note respectivement m_A et m_B les polynômes minimaux de A et B.

On veut montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $P(A) = 0$.

1. *Montrer que si A est diagonalisable et si $P(A) = 0$, alors B est diagonalisable.*
2. *Montrer que m_A divise m_B.*
3. *On suppose B diagonalisable. Déduire de la question précédente que A et diagonalisable. Montrer ensuite que $P(A) = 0$ (on pourra utiliser l'unicité de la décomposition de Dunford).*
4. *Montrer que $C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.*
5. *Soit A' une matrice qui commute avec A. Soit $B = \begin{pmatrix} A & A' \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Vérifier que là encore, B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisble et $A' = 0$.*
6. *Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} A & A' \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Vérifier que $AA' \neq A'A$. La matrice B est elle diagonalisable ?*

Exercice 5.9.13 (Preuve constructive du théorème de Dunford en caractéristique nulle)**.** *On suppose K de caractéristique nulle. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On suppose que χ_A est scindé dans K. On rappelle la formule de Taylor sur les polynômes. Si $P \in K[X]$ de degré d, alors pour tout $a \in K$*

$$P(a + X) = \sum_{i=0}^{d} \frac{P^{(i)}(a)}{i!} X^i$$

Cette égalité s'obtient en utilisant la formule du binôme sur chaque terme $(a + X)^k$. Ainsi, elle est également vérifiée si $a \in K[X]$.

1. *Soit* $P = \chi_A / \mathrm{pgcd}(\chi_A, \chi'_A)$. *Montrer que* P *n'a que des racines simples et que* $P(A)^n = 0$.
2. *Montrer qu'il existe* U *et* V *dans* $K[X]$ *tel que* $UP' + VP = 1$.
3. *On pose* $h_0(X) = X$. *Montrer que* $P(h_0) \equiv 0 \mod P$.
4. *Soit* $k \geq 0$. *On suppose qu'il existe un polynôme* $h_k \in K[X]$ *tel que* $P(h_k) \equiv 0 \mod P^{2^k}$. *Soit* $R \in K[X]$. *En utilisant la formule de Taylor sur les polynômes, montrer que*
$$P(h_k + RP(h_k)) \equiv P(h_k)(1 + RP'(h_k)) \mod P(h_k)^2$$
5. *En déduire que*
$$P(h_k - U(h_k)P(h_k)) \equiv 0 \mod P^{2^{k+1}}$$
On pose $h_{k+1} = h_k - U(h_k)P(h_k)$.
On a donc défini par récurrence une suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que pour tout* k,
$$P(h_k) \equiv 0 \mod P^{2^k}$$
6. *Soient* k *un entier tel que* $2^k \geq n$, $D = h_k$ *et* $N = X - D$. *Montrer que* $(D(A), N(A))$ *est la décomposition de Dunford de* A.

Remarque. *Cet algorithme s'étend au cas où* K *est un corps parfait. En particulier, cela fonctionne si* K *est un corps fini mais dans ce cas, il faut aménager la question* **??** *: il est un peu plus difficile de trouver le polynôme* P.

Bibliographie

[A-F] J.-M. Arnaudiès, H. Fraysse. *Algèbre* Dunod Université (1987)

[F] J. Fresnel. *L'algèbre des matrices* Hermann (1997)