PREUVES EN GÉOMÉTRIE PAR LE CALCUL FORMEL

1. Introduction

Les théorèmes classiques de géométrie, connus et démontrés depuis bien longtemps, peuvent maintenant être démontrés en un instant par le calcul formel. Il suffit en effet de définir quelques procédures de bases, pour calculer des chose comme l'équation d'une droite passant par deux points, ou tangente à un cercle, une conique en un point, l'intersection de deux droites, etc. : toutes ces notions qui interviennent dans les constructions géométriques. Ensuite, on peut aussi définir d'autres procédures qui permettent de vérifier les faits qui interviennent souvent dans les théorèmes : la concourance de trois droites, l'alignement de trois points, l'orthogonalité, le fait qu'un triangle soit rectangle, isocèle, équilatéral, etc.

Il ne reste alors qu'à suivre l'énoncé du théorème choisi, après avoir choisi un repère, construisant les objets selon les hypothèses imposées, puis à vérifier que la conclusion est bien vérifiée.

Nous proposons ici d'illustrer ce fait par des exemples. Bien sûr, d'autres exemples que ceux-ci peuvent être choisis.

On peut également se servir du calcul formel comme aide à la démonstration de certains théorèmes. Nous proposons ici un exemple où le calcul sur machine de résultants donne une solution au problème posé.

Grâce au logiciel Maple, on peut aussi illuster ces théorèmes par des figures.

2. Le théorème de Morley

Théorème 2.1. *Soit ABC un triangle, et soient $3a$, $3b$ et $3c$ les angles en A, B et C de ce triangle. Soient P le point tel que $(\widehat{[AP),[AC)}) = a$ et $(\widehat{[CA),[CP)}) = c$, Q le point tel que $(\widehat{[BQ),[BA)}) = b$ et $(\widehat{[AB),[AQ)}) = a$, et R le point tel que $(\widehat{[CR),[CB)}) = c$ et $(\widehat{[BC),[BR)}) = b$. Alors le triangle BQR est équilatéral.*

Pour montrer cela, on peut choisir un repère orthonormé où A et B ont pour coordonnées respectives $(0,0)$ et $(1,0)$. On peut définir une procédure qui donne l'équation de la droite passant par un point et faisant un angle donné avec l'axe des abscisses, et une procédure calculant le point d'intersection de deux droites dont on connaît les équations. On peut alors calculer les coordonnées de C en fonction des angles a et b, ainsi que les coordonnées de P, Q et R. Il nous faut aussi une procédure calculant le carré de la distance entre deux points, et enfin une dernière procédure testant si un triangle est équilatéral.

Attention, pour les comparaisons, il faut utiliser une fonction qui simplifie les expressions. Dans maple : `simplify`, avec, ici, option `trig`.

3. Le théorème de Brianchon

Théorème 3.1. *Soit E une ellipse. Soient P_i, $i = 0, \dots, 5$ six points deux à deux distincts tels que les droites (P_i, P_{i+1}) et (P_5, P_0) soient tangentes à E. Alors les droites (P_0, P_3), (P_1, P_4) et (P_2, P_5) sont concourantes.*

Pour démontrer ce théorème, on peut utiliser une équation paramétrée d'une ellipse. L'ellipse d'équation

$$\left(\frac{x - c_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{y - c_2}{d_2}\right)^2 = 1$$

a pour équation paramétrée

$$x = c_1 + d_1 \cos t \ , \ y = c_2 + d_2 \sin t,$$

où t parcourt $\mathbb{R}$. On peut aussi utiliser

$$x = c_1 + d_1 \frac{t + 1/t}{2} \ , \ y = c_2 + d_2 \frac{t - 1/t}{2i},$$

où t parcourt le cercle des nombres complexes de module 1. On peut définir une procédure qui calcule la tangente à l'ellipse au point correspondant à une valeur donnée du paramètre t, et appliquer cette procédure à des valeurs indéterminées $t_1, \dots, t_5$. Puis, on calcule les coordonnées des points P_i, grâce à une procédure qui calcule le point d'intersection de deux droites. Une autre fonction permettant de calculer l'équation d'une droite passant par deux points donnés nous donne les droites (P_0, P_3), (P_1, P_4) et (P_2, P_5). Grâce aux équations obtenues, on vérifie la propriété de concourance requise.

4. Le théorème des six cercles

Ici, nous allons donner l'esquisse d'une démonstration pour un théorème de géométrie. Cette démonstration utilise un calcul de résultant.

Théorème 4.1. *Soient xyz un triangle, i le centre du cercle inscrit à xyz, $\mathcal{T}$ l'enveloppe convexe de xyz, $\mathcal{C}_x$ (resp. $\mathcal{C}_y$, $\mathcal{C}_z$ l'ensemble des cercles tangents à (x, y) et (x, z) (resp. (y, z) et (y, x), (z, x) et (z, y)) centrés sur $[x, i)$ (resp. $[y, i)$, $[z, i)$) qui rencontrent $\mathcal{T}$. Soit $C_u \in \mathcal{C}_x$ un cercle de rayon u qui rencontre $\mathcal{T}$. Alors il existe un cercle $C_v \in \mathcal{C}_y$ de rayon v tangent extérieurement à C_u, un cercle $C_w \in \mathcal{C}_z$ de rayon w tangent extérieurement à C_v, et un cercle $C_{u'} \in \mathcal{C}_x$ de rayon u' tangent extérieurement à C_w. De plus, ces cercles étant donnés, il existe un cercle $C_{v'} \in \mathcal{C}_y$ de rayon v' tangent extérieurement à $C_{u'}$ et un cercle $C_{w'} \in \mathcal{C}_y$ de rayon w' tangent extérieurement à $C_{v'}$ tels que $C_{w'}$ est tangent extérieurement à C_u.*

Dans la démonstration, on va supposer que le cercle inscrit est de rayon 1. Soient 2α (resp. 2β, 2γ) la mesure de l'angle en x (resp. y, z) dans $]0,\pi[$.

Lemme 4.2. *Le cercle C_u (resp. C_v, C_w) rencontre $\mathcal{T}$ si et seulement si $u \leq \frac{1}{\tan\beta\tan\gamma}$ (resp. $v \leq \frac{1}{\tan\gamma\tan\alpha}$, $w \leq \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta}$).*

Preuve. Soit j le centre du cercle exinscrit en x, c'est à dire le cercle extérieur au triangle tangent aux droites (x,y), (x,z) et (z,y) tel que le point de tangence avec cette dernière droite soit dans le segment $[y,z]$. Alors le cercle C_u rencontre $\mathcal{T}$ si et seulement si son centre appartient à $[x,j]$. En considérant des triangles rectangles bien choisis, on peut montrer que si C_u est de centre j, alors $\frac{u}{\tan\alpha} = xy + u\tan\beta$, et que $xy = \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}$. Cela donne : $\frac{u}{\tan\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} + u\tan\beta$, et par suite $u = \frac{1}{\tan\beta\tan\gamma}$. □

Lemme 4.3. *Si les cercles C_u, C_v, C_w et $C_{u'}$ sont comme dans le théorème, on a les relations*

$$\left(\frac{1}{\tan\alpha}(1-u) + \frac{1}{\tan\beta}(1-v)\right)^2 = 4uv,$$

$$\left(\frac{1}{\tan\beta}(1-v) + \frac{1}{\tan\gamma}(1-w)\right)^2 = 4vw,$$

$$\left(\frac{1}{\tan\gamma}(1-w) + \frac{1}{\tan\alpha}(1-u')\right)^2 = 4wu'.$$

Preuve. Soient s et t les centre des cercles C_u et C_v, on démontre que

$$st^2 = (u+v)^2 = (u-v)^2 + \left(\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} - \frac{u}{\tan\alpha} - \frac{v}{\tan\beta}\right)^2,$$

ce qui donne la formule désirée. □

On change maintenant de notations, en posant $a = \frac{1}{\tan\alpha}$, $b = \frac{1}{\tan\beta}$, $c = \frac{1}{\tan\gamma}$. Alors $a+b+c = abc$, $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. De plus, les relations du lemme 4.3 s'écrivent

$$(a(1-u) + b(1-v))^2 - 4uv = 0 \tag{1}$$

$$(b(1-v) + c(1-w))^2 - 4vw = 0 \tag{2}$$

$$\big(c(1-w) + a(1-u')\big)^2 - 4wu' = 0 \tag{3}$$

Par ailleurs, les conditions du lemme 4.2 s'écrivent $0 \leq u \leq bc$, $0 \leq v \leq ca$, $0 \leq w \leq ab$.

Lemme 4.4. *Si $u \leq bc$, alors les éléments v définis par l'équation (1) sont réels positifs ou nuls et satisfont $v \leq ca$.*

Preuve. L'équation (1), vu comme polynôme en v, a pour discriminant $\Delta = 4(ab-1)(bc-u)u$. Par hypothèse, $bc-u \geq 0$, et les conditions sur a, b et c montrent que $ab-1>0$ et $bc-1>0$. Ainsi, $\Delta \geq 0$ et les racines en v sont réelles. Comme le terme constant $(a(1-u)+b)^2$ est positif ou nul et que le coefficient de v est négatif ou nul, les racines sont toutes deux positives ou nulles. Il reste à montrer que si v est une racine, alors $v \leq ca$, ce qui se fait en utilisant les formules donnant les racines d'un polynôme de degré 2. $\square$

Soient les polynômes de $\mathbb{Z}[U,V,W,U',A,B,C]$ définis par

$$P(U,V,A,B,C) = (A(1-U)+B(1-V))^2 - 4UV = 0,$$
$$Q(V,W,A,B,C) = (B(1-V)+C(1-W))^2 - 4VW = 0,$$
$$R(W,U',A,B,C) = \big(C(1-W)+A(1-U')\big)^2 - 4WU' = 0.$$

Soient les résultants

$$S(V,U',A,B,C) = Res_W(Q(V,W,A,B,C), R(W,U',A,B,C)),$$
$$T(U,U',A,B,C) = Res_V(S(V,U',A,B,C), P(U,V,A,B,C)).$$

Soient u, v, w, u', a, b, c satisfaisant les relations (1), (2) et (3). Alors $S(v,u',a,b,c)=0$, et $T(u,u',a,b,c)=0$. Or, on peut factoriser le polynôme $T(U,U',A,B,C) - T(U',U,A,B,C)$ en $(A+B+C-ABC)\Theta$, où $\Theta \in \mathbb{Z}[U,U',A,B,C]$. Comme $a+b+c = abc$, il suit que $T(u,u',a,b,c) = T(u',u,a,b,c)$, et donc que $T(u',u,a,b,c) = 0$. De là, on peut déduire l'existence de v' et w' convenables tels que

$$P(u',v',a,b,c) = Q(v',w',a,b,c) = R(w',u,a,b,c) = 0,$$

et démontrer le théorème.

Références.

Méthodes modernes en géométrie, par Jean Fresnel.

Le théorème des six cercles et sa démonstration m'ont été communiqués par Jean Fresnel.

Le théorème des sept cercles, par Evelyne, Money-Coutts et Tyrrell.

Le site web de Doron Zeilberger http://www.math.rutgers.edu/ zeilberg/ (Ekhad's Geometry WebBook)