ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018

Examen première session

PARCOURS : LIMA 5032 **Code UE : N1MA5032**

Epreuve : Mathématiques

Date : 18/12/2017 **Heure : 14h30** **Durée : 3h**

Documents : Non autorisés.

Corrigé

Collège Sciences et technologies

Exercice 1

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $X = {}^t x \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit

$$q(x) = {}^t XSX.$$

q est donc une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice de Gram dans la base canonique est S.

1. *Appliquer l'algorithme de décomposition de Gauss à q. En déduire que q est définie positive et donner la décomposition de Cholesky $S = {}^t RR$ de S.*

Écrivons ci-dessous l'expression de $q(x)$.

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + nx_n^2 - 2x_n(x_1 + \cdots + x_{n-1}).$$

Pour tout $i \in [[1, n-1]]$, $x_i^2 - 2x_i x_n = (x_i - x_n)^2 - x_n^2$. L'algorithme de décomposition de Gauss donne donc l'expression suivante de q en somme de n carrés.

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n)^2 + x_n^2.$$

On en déduit que q est définie positive. Cette expression donne immédiatement la décomposition $S = {}^t RR$ où

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Calculer R^{-1} et en déduire S^{-1}.*

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad S^{-1} = (R^{-1})^t R^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ 1 & & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Soit $D = \mathrm{Diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$. On souhaite appliquer la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution d'une équation $AX = B$.

1. *Soit $i \in [[1, n]]$, et soit e_i le i-ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. En considérant ${}^te_iAe_i$, montrer que $a_{i,i} > 0$.*

Comme A est définie positive, ${}^te_iAe_i > 0$. Comme ${}^te_iAe_i = a_{i,i}$, on obtient $a_{i,i} > 0$

2. *Montrer que pour toute matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et tout $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul, ${}^t\overline{x}Sx \in \mathbb{R}_+^*$ (on pourra par exemple utiliser la décomposition de Cholesky de S).*

Soit $S = {}^tRR$ la décomposition de Cholesky de S. Alors ${}^t\overline{x}Sx = {}^t\overline{x}{}^tRRx = {}^t(R\overline{x})Rx = {}^t(\overline{Rx})Rx$ puisque la matrice R est réelle. Comme R est inversible, si $x \neq 0$, $Rx \neq 0$ et ${}^t(\overline{Rx})Rx > 0$.

Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{i,j} = a_{i,j}$ si $i > j$ et $m_{i,j} = 0$ si $i \leq j$. Alors $A = M + D + {}^tM$ et la matrice d'itération de la méthode est

$$G = -(D + M)^{-1}({}^tM).$$

3. *Soient $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{a_{1,1}}, \ldots, \sqrt{a_{n,n}})$, $M_1 = \Delta^{-1}M\Delta^{-1}$ et $G_1 = \Delta G\Delta^{-1}$. Montrer que*

$$G_1 = -(I_n + M_1)^{-1}({}^tM_1).$$

$$G_1 = -\Delta(D + M)^{-1}({}^tM)\Delta^{-1} = -\Delta(D + M)^{-1}\Delta\Delta^{-1}({}^tM)\Delta^{-1} = (\Delta^{-1}(D + M)\Delta^{-1})^{-1}\left({}^t(\Delta^{-1}M\Delta^{-1})\right)$$

Comme $\Delta^{-1}D\Delta^{-1} = I_n$, on trouve bien le résultat.

4. *Soient $\lambda \in \mathrm{Spec}(G_1)$ et $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $G_1x = \lambda x$ et ${}^t\overline{x}x = 1$. On pose ${}^t\overline{x}M_1x = a+ib$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer les égalités suivantes.*

$${}^t\overline{x}({}^tM_1)x = a - ib \quad , \quad -{}^t\overline{x}({}^tM_1)x = \lambda(1 + {}^t\overline{x}M_1x) \quad , \quad |\lambda|^2 = \frac{a^2 + b^2}{1 + 2a + a^2 + b^2}.$$

Comme ${}^t\overline{x}({}^tM_1)x$ est un nombre complexe, il est égal à sa transposée.

$${}^t\overline{x}({}^tM_1)x = {}^txM_1\overline{x} = \overline{{}^t\overline{x}M_1x} = a - ib.$$

Comme $G_1x = \lambda x$, $-(I_n + M_1)^{-1}({}^tM_1x = \lambda x$ donc $-{}^tM_1x = \lambda(I_n + M_1)x$. En multipliant à gauche par ${}^t\overline{x}$, on obtient

$$-{}^t\overline{x}({}^tM_1)x = \lambda{}^t\overline{x}(I_n + M_1)x.$$

Comme ${}^t\overline{x}x = 1$, on arrive à la seconde égalité. Cette égalité donne immédiatement $-a+ib = \lambda(1+a+ib)$. Si l'on multiplie chaque terme de cette égalité par son conjugué, on obtient $a^2 + b^2 = |\lambda|^2((1 + a)^2 + b^2)$, ce qui conduit bien à l'égalité souhaitée.

5. *Montrer que $\Delta^{-1}A\Delta^{-1}$ est symétrique définie positive.*

Comme Δ^{-1} est diagonale, elle est symétrique. Donc ${}^t\left(\Delta^{-1}A\Delta^{-1}\right) = \left(\Delta^{-1}A\Delta^{-1}\right)$. La matrice $\Delta^{-1}A\Delta^{-1}$ est donc bien symétrique. Soit $v \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. Comme Δ^{-1} est inversible, $\Delta^{-1}v \neq 0$. Alors ${}^tv\Delta^{-1}A\Delta^{-1}v = {}^t\left(\Delta^{-1}v\right)A\left(\Delta^{-1}v\right) > 0$. La matrice $\Delta^{-1}A\Delta^{-1}$ est donc bien symétrique définie positive.

6. *En considérant ${}^t\overline{x}\Delta^{-1}A\Delta^{-1}x$, montrer que $1 + 2a > 0$. Conclure que $|\lambda| < 1$ et que $\rho(G_1) < 1$.*

$${}^t\overline{x}\Delta^{-1}A\Delta^{-1}x = {}^t\overline{x}\Delta^{-1}(D + M + {}^tM)\Delta^{-1}x = 1 + {}^t\overline{x}M_1x + {}^t\overline{x}({}^tM_1)x = 1 + 2a$$

donc comme $\Delta^{-1}A\Delta^{-1}$ est définie positive, $1 + 2a > 0$. On en déduit d'après la question 4 que $|\lambda| < 1$. Comme c'est vrai pour toute valeur propre de G_1, $\rho(G_1) < 1$.

7. *En déduire que la méthode converge quelque soit le vecteur initial choisi.*

Comme $G_1 = \Delta G\Delta^{-1}$, G et G_1 son semblables donc $\rho(G) = \rho(G_1) < 1$. On en déduit que la méthode converge quelque soit le choix du vecteur initial.

Exercice 3

Soient m et n deux entiers naturels non nuls. On munit $M_{m,1}(\mathbb{R})$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $(X|Y) = {}^tXY$. Dans ces deux espaces, on note $||.||_2$ la norme associée : $||X||_2 = \sqrt{(X|X)}$. Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que* $\ker A = \ker({}^tAA)$. *En déduire que* $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}({}^tAA)$.

Si $AX = 0$, ${}^tAAX = 0$. Réciproquement, si ${}^tAAX = 0$, alors ${}^tX{}^tAAX = 0$, donc ${}^t(AX)(AX) = 0$, ce qui montre que $AX = 0$. On utilise la formule du rang : $\mathrm{rg}{}^tAA = n - \dim\ker{}^tAA = n - \dim\ker A = \mathrm{rg}A$.

2. *Justifier l'existence de réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et d'une matrice $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que*

$$ {}^tV{}^tAAV = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad et \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n. $$

Comme $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, ${}^tAA \in M_n(\mathbb{R})$. De plus, ${}^t({}^tAA) = {}^tAA$, donc ${}^tAA$ est une matrice réelle symétrique. Elle est donc diagonalisable et on peut choisir la matrice de passage correspondante dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^tAA$ ordonnées de telle sorte que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, soit $V_1, \dots, V_n$ la base orthonormée de E telle que pour tout j, V_j est un vecteur propre associé à λ_i et soit V la matrice $V = (V_1|\dots|V_n)$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a bien l'égalité ${}^tV{}^tAAV = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

3. *Pour tout $j \in [[1, n]]$, on note V_j la j-ème colonne de V et $Y_j = AV_j \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. Soient $i, j \in [[1, n]]$ tels que $i \neq j$, montrer que*

$$ {}^tY_iY_j = 0 \quad et \quad {}^tY_iY_i = \lambda_i. $$

En déduire que pour tout $i \in [[1, n]]$, $\lambda_i \geq 0$

On sait que ${}^t(AV)(AV) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ donc ${}^tY_iY_j = {}^t(AV_i)AV_j$: c'est le coefficient (i, j) de ${}^t(AV)(AV)$, donc ${}^tY_iY_j = \lambda_i$ si $i = j$ et 0 sinon.

4. *Soit $r = \mathrm{rg}A$. Expliquer pourquoi $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in [[1, r]]$ et $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [[r + 1, n]]$.*

Comme $\mathrm{rg}{}^tAA = r$, cette matrice a r valeurs propres non nulles, donc strictement supérieures à 0. Ces valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ car les λ_i sont numérotés dans l'ordre décroissant.

5. *Pour $j \in [[1, r]]$, on pose*

$$ \mu_j = \sqrt{\lambda_j} \quad et \quad U_j = \frac{1}{\mu_j}Y_j. $$

Montrer que $(U_1, \dots, U_r)$ est une famille orthonormale de $M_{m,1}(\mathbb{R})$.

On complète cette base en une base orthonormale $(U_1, \dots, U_m)$ de $M_{m,1}(\mathbb{R})$. Alors la matrice $U = (U_1|\dots|U_m)$ de $M_m(\mathbb{R})$ dont les vecteurs colonnes sont les U_j est orthogonale : $U \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$.

Soit $(i, j) \in [[1, r]]^2$. ${}^tU_iU_j = \dfrac{1}{\mu_i\mu_j}{}^tY_iY_j = 0$ si $i \neq j$ et ${}^tU_iU_i = \dfrac{1}{\mu_i^2}{}^tY_iY_i = 1$ puisque ${}^tY_iY_i = \lambda_i = \mu_i^2$.

6. *Soit $D = {}^tUAV$. Montrer que D peut s'écrire par blocs sous la forme*

$$ D = \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) $$

où $D_0 = Diag(\mu_1, \dots, \mu_r) \in M_r(\mathbb{R})$.

Pour tout $(i, j) \in [[1, m]] \times [[1, n]]$, on note $d_{i,j}$ le coefficient (i, j) de ${}^tUAV$. Alors $d_{i,j} = {}^tU_iY_j$. Si $j > r$, $Y_j = 0$ donc $c_{i,j} = 0$. Si $j \leq r$, $c_{i,j} = \mu_j{}^tU_iU_j = \mu_i$ si $i = j$ et 0 sinon. Cela prouve le résultat.

7. *Nous étudions ici une méthode de résolution du problème des moindres carrés qui utilise le résultat précédent. Soit $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. On cherche $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme minimale tel que $||AX_0 - B||_2$ soit minimale, c'est-à-dire tel que $||AX_0 - B||_2 \leq ||AX - B||_2$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.*

a) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $Z = {}^tVX = {}^t(z_1, \dots, z_n)$ et $C = {}^tUB = {}^t(c_1, \dots, c_m)$ Montrer que

$$ ||AX - B||_2^2 = \sum_{i=1}^{r}(\mu_iz_i - c_i)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} c_i^2. $$

Comme ${}^tU \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$, $||{}^tUW||_2 = ||W||_2$ pour tout $W \in M_n(\mathbb{R})$ donc

$$ ||AX - B||_2^2 = ||{}^tUAX - {}^tUB||_2^2 = ||{}^tUAVZ - C||_2^2 $$

en remplaçant X par VZ. On obtient

$$||AX-B||_2^2 = ||DZ-C||_2^2 = \sum_{i=1}^{r}(\mu_i z_i - c_i)^2 + \sum_{i=r+1}^{n} c_i^2$$

puisque $DZ - C = {}^t(\mu_1 z_1 - c_1 \ldots, \mu_r z_r - c_r, -c_{r+1} \ldots, -c_m)$.

b) Soient

$$X_0 = \sum_{j=1}^{r} \mu_j^{-1} c_j V_j \quad \textit{et} \quad \mathcal{S} = X_0 + \textit{Vect}(V_{r+1}, \ldots, V_n).$$

Montrer que $||AX-B||_2$ est minimale si et seulement si $X \in \mathcal{S}$.

Grace à la question précédente, $||AX-B||_2^2$ est minimale si et seulement si $\mu_i z_i - c_i = 0$ pour tout $i \in [[1, r]]$. Comme $X = VZ$, c'est-à-dire $X = \sum_{j=1}^{n} z_j V_j$, c'est équivalent à :

$$X = \sum_{j=1}^{r} \mu_j^{-1} c_j V_j + \sum_{j=r+1}^{n} z_j V_j$$

où $z_{r+1}, \ldots, z_n$ varient dans $\mathbb{R}$. Cela montre le résultat.

c) Pour tout $X \in \mathcal{S} \setminus \{X_0\}$, montrer que $||X_0||_2 < ||X||_2$.

Dans ce cas, $X - X_0 \in \mathrm{Vect}(V_{r+1}, \ldots, V_n)$ donc $X - X_0$ est orthogonal à X_0 puisque le vecteur X_0 appartient à $\mathrm{Vect}(V_1, \ldots, V_r)$ et puisque la base (V_i) de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est orthonormale. On en déduit que

$$||X||_2^2 = ||X_0||_2^2 + ||X - X_0||_2^2 > ||X_0||_2^2$$

puisque $X - X_0 \neq 0$.

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En utilisant les questions précédentes, calculer l'ensemble des $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $||AX-B||_2$ soit minimale.

Comme le rang de A est égal à son nombre de colonnes, on sait que la solution est unique (c'est l'unique solution de ${}^tAAX = {}^tAB$). Ici, on utilise la méthode indiquée par les questions précédentes. On trouve ${}^tAA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont 3 et 1. Soit $V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Alors ${}^tVAV = \mathrm{Diag}(3, 1)$. On trouve donc $\mu_1 = \sqrt{3}$ et $\mu_2 = 1$.

$$AV_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AV_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

donc

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$C = {}^tUB = (c_1, c_2, c_3)$. On a seulement besoin de c_1 et c_2, il est donc inutile de calculer U_3. On trouve $c_1 = {}^tU_1B = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et $c_2 = {}^tU_1B = \sqrt{2}$. Finalement,

$$X_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

ce qui donne $AX_0 = {}^t(4/3, 2/3, 2/3)$ donc $||AX_0 - B||_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Comme $r = 2$, la solution est unique : l'ensemble cherché est égal à $\{X_0\}$.

Remarque 1. La décomposition obtenue $A = UD^tV$ est appelée décomposition en valeurs singulières. Les valeurs singulières sont les μ_i. Les matrices U et V ne sont pas uniques, mais les valeurs singulières le sont.

Remarque 2. On sait que le calcul de ${}^tAA$ est instable numériquement. Pour calculer une décomposition en valeurs singulières, on n'effectue pas ce produit. Les algorithmes utilisés procèdent plutôt par multiplications de A à gauche et à droite par des matrices orthogonales correspondant à des symétries orthogonales (Householder) ou des rotations (Givens).