Université Bordeaux 1 **Géométrie différentielle – Licence 3**
Mathématiques Année 2015–2016

CORRIGÉ DE LA FEUILLE n° 5

Géodésiques

Exercice 2 - Il faut comprendre l'énoncé comme suit.

Soit c un arc birégulier tracé sur une surface S. Montrer que c est porté par une géodésique de S si et seulement si son plan osculateur est en tout point perpendiculaire au plan tangent à S c'est-à-dire si et seulement si en tout point, son plan osculateur contient l'orthogonal du plan tangent.

Soit $c : I \to S$ un arc birégulier de vitesse constante, c'est-à-dire tel que la norme $||c'(t)||$ est constante.

Si c est une géodésique, alors par définition $c''(t)$ est orthogonal à $T_{c(t)}S$ pour tout t, donc $(T_{c(t)}S)^{\perp} = \mathrm{Vect}(c''(t))$ et $(T_{c(t)}S)^{\perp}$ est bien inclus dans $\mathrm{Vect}(c'(t), c''(t))$.

Réciproquement, supposons que $(T_{c(t)}S)^{\perp} \subset \mathrm{Vect}(c'(t), c''(t))$. Si l'on dérive l''expression constante $< c'(t), c'(t) >$, on obtient que $2 < c'(t), c''(t) >= 0$, c'est-à-dire $< c'(t), c''(t) >= 0$. Comme $(T_{c(t)}S)^{\perp} \subset \mathrm{Vect}(c'(t), c''(t))$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $(T_{c(t)}S)^{\perp} = \mathrm{Vect}(\alpha c'(t) + \beta c''(t))$ puisque $\dim(T_{c(t)}S)^{\perp} = 1$. Alors pour tout $u \in T_{c(t)}S$,

$$< \alpha c'(t) + \beta c''(t), u >= 0.$$

En particulier, pour $u = c'(t)$, cette égalité devient $< \alpha c'(t) + \beta c''(t), c'(t) >= 0$, ce qui donne $< \alpha c'(t), c'(t) >= 0$ puisque $< c''(t), c'(t) >= 0$. Comme $c(t) \neq 0$, on en déduit que $\alpha = 0$ et donc que $(T_{c(t)}S)^{\perp} = \mathrm{Vect}(c''(t))$, ceci pour tout t. On a donc montré que c est une géodésique.

Remarque - On peut revoir l'exercice 1, question 2 à la lumière de l'exercice 2 : que donne le critère de cet exercice 2 dans le cas d'un grand cercle dessiné sur la sphère S^2 ? Soit c un arc birégulier qui parcourt un grand cercle à vitesse constante. Un grand cercle, c'est l'intersection de la sphère avec un plan P qui passe par 0. Alors l'arc c est inclus dans P, donc P est le plan osculateur de c en tout point $c(t)$: le plan osculateur est constant. Mais si D_t est la droite $(0, c(t))$ (pour t fixé), D_t est une droite orthogonale au plan tangent en $c(t)$. Comme 0 et $c(t)$ appartiennent à P, la droite D_t est incluse dans P. Conclusion : le plan osculateur contient $(T_{c(t)}S)^{\perp}$, donc c est une géodésique.

Exercice 3 - J'indique deux méthodes pour cet exercice.

Méthode 1. On procède comme nous l'avons fait en TD dans l'exercice 1, à partir d'une paramétrisation du tore. Prenons par exemple la paramétrisation donnée dans l'exercice 5 de la feuille 4.

$$\begin{array}{rcl}\Phi & :]0,2\pi[\times]0,2\pi[& \to \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto ((R + r\sin v)\cos u, (R + r\sin v)\sin u, r\cos v)\end{array}$$

Un méridien correspond à la partie du tore définie par $u = u_0$, où u_0 est fixé (si l'on veut prendre le méridien qui correspond à $u_0 = 0$, on peut penser qu'il y a un problème puisque la paramétrisation choisie exclut ce cas, mais il suffit dans ce cas de changer l'ouvert de départ par exemple par $]-\pi,\pi[\times]0,2\pi[$). Soit c un chemin à vitesse constante sur le méridien ($u = u_0$). Alors il existe une fonction $\mathcal{C}^2$ α d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $]0,2\pi[$ telle que $c(t) = \Phi(u_0, \alpha(t))$. C'est-à-dire

$$c(t) = ((R + r\sin\alpha(t))\cos u_0, (R + r\sin\alpha(t))\sin u_0, r\cos\alpha(t)).$$

Alors

$$c'(t) = \alpha'(t)(r\cos\alpha(t)\cos u_0, r\cos\alpha(t)\sin u_0, -r\sin\alpha(t)).$$

On calcule $||c'(t)|| = |\alpha'(t)|r$, donc $|\alpha'|$ est constante. Comme l'application α' est continue, on en déduit que α est constante. Notons β la valeur constante de α'.

$$c'(t) = \beta(r\cos\alpha(t)\cos u_0, r\cos\alpha(t)\sin u_0, -r\sin\alpha(t)).$$

$$c''(t) = \beta^2 r(-\sin\alpha(t)\cos u_0, r - \sin\alpha(t)\sin u_0, -r\cos\alpha(t)).$$

Calculons la Jacobienne de Φ en (u,v).

$$J_{(u,v)}(\Phi) = \begin{pmatrix} -\sin u(R + r\sin u) & r\cos v\cos u \\ \cos u(R + r\sin v) & r\cos v\sin u \\ 0 & -r\sin v \end{pmatrix}$$

donc

$$J_{(u_0,\alpha(t))}(\Phi) = \begin{pmatrix} -\sin u_0(R + r\sin u_0) & r\cos\alpha(t)\cos u_0 \\ \cos u_0(R + r\sin\alpha(t)) & r\cos\alpha(t)\sin u_0 \\ 0 & -r\sin\alpha(t) \end{pmatrix}.$$

Or $T_{\Phi(u_0,\alpha(t)}S = \mathrm{Vect}(\Phi'_u(u_0,\alpha(t)), \Phi'_v(u_0,\alpha(t)))$. Comme les deux dérivées partielles $\Phi'_u(u_0,\alpha(t))$ et $\Phi'_v(u_0,\alpha(t)))$ sont données par les deux vecteurs colonnes de $J_{(u_0,\alpha(t))}(\Phi)$, il suffit de voir que $c''(t)J_{(u_0,\alpha(t))}(\Phi) = 0$ pour prouver que $c''(t)$ est orthogonal à $T_{\Phi(u_0,\alpha(t)}S$. On fait donc ce calcul $c''(t)J_{(u_0,\alpha(t))}(\Phi) = 0$ (produit d'un vecteur ligne de taille 3 par une matrice $(3,2)$), on trouve $(0,0)$ et on conclut que c est une géodésique.

Remarque. On aurait pu se contenter de traiter le cas du méridien $u = 0$ (en prenant comme ouvert de départ du paramétrage l'ouvert $]-\pi,\pi[\times]0,2\pi[$), et indiquer que les autres cas s'en déduisent par symétrie.

Voyons la parallèle qui passe par le point $(R + r, 0, 0)$. Cette parallèle correspond à $v = \pi/2$. On considère l'arc c défini par $c(t) = ((R + r)\cos\alpha(t), (R + r)\sin\alpha(t), 0)$. On calcule $c'(t) = (R + r)\alpha'(t)(-\sin\alpha(t), \cos\alpha(t), 0)$. On voit que

$||c'(t)|| = |\alpha'(t)|(R+r)$, donc α' est constante. On note β cette constante. $c''(t) = -(R+r)\beta^2(\cos\alpha(t), \sin\alpha(t), 0)$. D'autre part

$$J_{(\alpha(t),\pi/2)}(\Phi) = \begin{pmatrix} -R\sin\alpha(t)) & 0 \\ R\cos\alpha(t)) & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}.$$

On constate que $c''(t)J_{(\alpha(t),0}(\Phi) = (0,0)$, donc c est une géodésique.

La parallèle qui passe par le point $(R-r, 0, 0)$ correspond à $v = \pi/2$. Les mêmes calculs que les précédents montrent qu'une telle parallèle parcourue à vitesse constante est une géodésique.

Voyons la parallèle qui passe par $(R, 0, r)$. Cette parallèle correspond à $v = 0$. On considère un arc défini par $c(t) = (R\cos\alpha(t), R\sin\alpha(t), r)$. Alors $c'(t) = R\alpha'(t)(-\sin\alpha(t), \cos\alpha(t), 0)$. Comme $||c'(t)|| = R|\alpha'(t)|$ est constante, $\alpha'(t)$ est constante. Soit β cette constante. $c''(t) = -R\beta^2(\cos\alpha(t), \sin\alpha(t), 0)$. D'autre part,

$$J_{(\alpha(t),0)}(\Phi) = \begin{pmatrix} -R\sin\alpha(t)) & r\cos\alpha(t) \\ R\cos\alpha(t)) & r\sin\alpha(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $c''(t)J_{\alpha(t),0}(\Phi) = (0, -rR\beta^2) \neq (0,0)$. Cette parallèle ne supporte pas de géodésique.

Par symétrie, il en va de même pour la parallèle qui passe par le point $(R, 0, -r)$.

Méthode 2. Cette méthode consiste à utiliser le critère de l'exercice 2. Chacun des arcs que nous considérons ici est contenu dans un plan. Ce plan sera donc en tout point $c(t)$ le plan osculateur à $c(t)$: dans chacun de ces cas, le plan osculateur est constant, exactement comme dans le cas des grands cercles sur S^2 (voir la remarque qui suit l'exercice 2).

Un arc tracé sur un méridien est l'intersection d'un demi-plan passant par 0 et délimité par la droite $(0z)$ (c'est-à-dire la “droite des z”), avec le tore. Le plan osculateur de l'arc en tout point est le plan qui contient ce demi-plan.

Comme ce tore est une surface de révolution autour de l'axe $(0z)$, il suffit par symétrie de montrer le résultat pour l'un des méridiens. On choisit l'intersection du tore avec le demi-plan $(0, x, z)$ où $x > 0$, c'est-à-dire le plan d'équation $(y = 0, x > 0)$. Soit $M_0 = (x_0, 0, z_0)$ un point sur ce méridien. Calculons la normale au tore en ce point. Si l'on pose

$$f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 - r^2,$$

cette normale a pour vecteur directeur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right)$. Or

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right),\right.$$
$$\left. 2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right), 2z\right) \tag{1}$$

Appliqué à M_0,cette expression vaut $2(x_0 - R, 0, z_0)$. Donc la normale est incluse dans le plan $(y = 0)$, qui est le plan osculateur de ce méridien (puisque ce plan contient le méridien).

Voyons maintenant la parallèle qui passe par le point $(R+r, 0, 0)$. C'est un cercle inclus dans l'intersection du tore avec le plan affine P d'équation $z = 0$. En effet, l'intersection de ce plan P avec le tore est égal à la réunion du cercle de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon $R + r$ inclus dans P et du cercle de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon $R - r$ inclus dans P. Ainsi, le plan osculateur de cette parallèle est constant et égal à P (considéré comme plan vectoriel). Par symétrie, il suffit de montrer le résultat pour le point $(R + r, 0, 0)$. Appliquons l'égalité 1 à ce point. On trouve

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(r, 0, 0) = 2r(1, 0, 0)$$

donc $(1, 0, 0)$ est normal au tore en $(R+r, 0, 0)$. Comme $(1, 0, 0) \in P$, on en déduit que la parallèle considérée porte une géodésique.

La parallèle qui passe par le point $(R - r, 0, 0)$ se traite de la même manière : elle supporte une géodésique.

Passons à la parallèle qui passe par $(R, 0, r)$. C'est l'intersection du tore avec le plan affine P d'équation $z = r$. Soit $\overrightarrow{P}$ la direction de P. Ce plan $\overrightarrow{P}$ est le plan vectoriel d'équation $z = 0$. Alors $\overrightarrow{P}$ est le plan osculateur de cette parallèle. Là encore, par symétrie, il suffit de considérer le point $(R, 0, r)$. On calcule

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(R, 0, r) = 2(0, 0, r)$$

On en déduit que le vecteur $(0, 0, 1)$ est normal au tore en ce point. Or, $(0, 0, 1) \notin \overrightarrow{P}$ puisque $r \neq 0$. Cela veut dire que la normale au tore n'est pas dans le plan osculateur. La parallèle en question ne supporte donc pas de géodésique.

La parallèle qui passe par le point $(R, 0, -r)$ se traite de la même manière : elle ne supporte pas de géodésique.

Formes différentielles

Exercice 7 - On note k_1 et k_2 les degré respectifs de ω_1 et ω_2. Autrement dit, $\omega_1 \in \Omega^{k_1}(U)$ et $\omega_2 \in \Omega^{k_2}(U)$.

1. Comme ω_1 et ω_2 sont fermés, $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$. Alors $d\omega_1 \wedge \omega 2 = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1}\omega_1 \wedge d\omega_2 = 0$.

2. On suppose que ω_1 est exacte. Cela revient à dire qu'il existe $\alpha \in \Omega^{k_1-1}(U)$ telle que $\omega_1 = d\alpha$. Alors $d(\alpha \wedge \omega_2) = d\alpha \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1-1}\alpha \wedge d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ puisque $d\omega_2 = 0$. On en déduit que $\omega_1 \wedge \omega_2$ est exacte.

Exercice 8 -

1. ω est de la forme $\omega = Adx + Bdy + Bdz$. On calcule

$$\begin{aligned} d\omega &= d(Adx + Bdy + Cdz) \\ &= \frac{\partial A}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial A}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial B}{\partial z}dz \wedge dy + \frac{\partial C}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial C}{\partial y}dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé le fait que $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$. En tenant compte du fait que par exemple $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$, on obtient donc

$$d\omega = \left(-\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\right) dx \wedge dy + \left(-\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial x}\right) dx \wedge dz + \left(-\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial C}{\partial y}\right) dy \wedge dz.$$

En remplaçant A, B, C par leurs valeurs, on trouve que $d\omega = 0$.

Comme ω est fermée, et comme elle est définie sur $\mathbb{R}^3$, qui est un ouvert convexe, donc étoilé, on en déduit que ω est exacte. Ainsi, il existe une fonction différentiable f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que $df = \omega$.

2. Résolvons l'équation $\omega = df$, c'est-à-dire

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

C'est équivalent au système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 12x^3z + 2xy^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 3x^4 \end{cases}$$

En intégrant chacune de ces équations, on obtient

$$\begin{cases} f = 3x^4z + x^2y^3 + c_1(y, z) \\ f = x^2y^3 + c_2(x, z) \\ f = 3x^4z + c_3(x, y) \end{cases}$$

où c_1, c_2, c_3 sont des fonctions $\mathcal{C}_1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Ce sont les constantes d'intégration. Par exemple, si l'on intègre par rapport à x, on obtient en "constante" une fonction qui ne dépend plus de x, mais qui peut dépendre de y et z.

On déduit de ce dernier système que

$$f(x, y, z) = 3x^4z + x^2y^3 + c.$$

où $c \in \mathbb{R}$. Réciproquement, on vérifie qu'une telle fonction vérifie $df = \omega$.

Exercice 9 -

1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $\omega = df$, où $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. Alors $dg = \omega$ si et seulement si $dg = df$, c'est-à-dire $d(g - f) = 0$, ce qui est équivalent à l'existence d'une constante K de $\mathbb{R}$ telle que $g - f = K$. Donc $\omega = dg$ si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $g = f + K$.

2. Soit α une 1-forme différentielle fermée sur $U_1 \cap U_2$. Donc $d\alpha = 0$. Comme U_1 et U_2 sont étoilés, α est exacte sur U_1 et sur U_2. Ainsi, il existe des applications lisses f_1 de U_1 dans $\mathbb{R}$ et f_2 de U_2 dans $\mathbb{R}$ telles que $\alpha|_{U_1} = df_1$ et $\alpha|_{U_2} = df_2$. Sur $U_1 \cap U_2$, comme $df_1 = df_2$, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $f_2 = f_1 + K$. Si l'on remplace f_2 par $f_2 - K$, alors f_1 et f_2 coïncident sur $U_1 \cap U_2$, et on a toujours $df_2 = \alpha|_{U_2}$. On peut alors définir une appication lisse f de $U_1 \cup U_2$ dans $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = f_1(x)$ si $x \in U_1$ et $f(x) = f_2(x)$ si $x \in U_2$. Alors $\alpha = df$.

3. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit

$$U_1 = \mathbb{R}^n \smallsetminus ((-1, 0, 0, \ldots, 0) + (\mathbb{R}_+)e_1) \quad \text{et} \quad U_2 = \mathbb{R}^n \smallsetminus ((0, -1, 0, \ldots, 0) + (\mathbb{R}_+)e_2)\,.$$

Alors U_1 et U_2 sont étoilés, et $U_1 \cap U_2$ est connexe dès que $n \geqslant 3$. Comme $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$, la question **2** montre que si $n \geqslant 3$, toute 1-forme différentielle fermée sur $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ est exacte.

4. Voir l'exercice 12.

Exercice 10 - Soit $\sigma \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ définie par

$$\sigma(p)(u, v) = \det(p, u, v)$$

où $p \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ et $u, v \in \mathbb{R}^3$.

1. Posons $p = (x, y, z)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$. Alors

$$\begin{aligned}
\sigma(p)(u, v) &= \det \begin{pmatrix} x & u_1 & v_1 \\ y & u_2 & v_2 \\ z & u_3 & v_3 \end{pmatrix} \\
&= x(u_2 v_3 - u_3 v_2) - y(u_1 v_3 - u_3 v_1) + z(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\
&= (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)(u, v)
\end{aligned}$$

On écrit donc

$$\sigma = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

2. Calculons $d\sigma$.

$$\begin{aligned}
d\sigma &= dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy \\
&= 3 dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

(pour le détail du calcul : par exemple $dy \wedge dz \wedge dx = -dy \wedge dx \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$: à chaque transposition, on change le signe.) Donc $d\sigma \neq 0$, autrement dit, σ n'est pas fermée.

Soit $f(p) =< p, p >^{1/2}$. C'est-à-dire

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Calculons df.

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ &= \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{xdx + ydy + zdz}{f} \end{aligned}$$

Calculons maintenant $d(f^\alpha \sigma)$.

$$\begin{aligned} d(f^\alpha \sigma) &= d(f^\alpha)\sigma + f^\alpha d\sigma \\ &= \alpha f^{\alpha-1} df \wedge \sigma + f^\alpha d\sigma \\ &= f^{\alpha-1}(\alpha df \wedge \sigma + f d\sigma) \end{aligned}$$

Nous avons besoin de développer $df \wedge \sigma$.

$$\begin{aligned} df \wedge \sigma &= \frac{xdx + ydy + zdz}{f} \wedge (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \\ &= \frac{x^2 dx \wedge dy \wedge dz + y^2 dx \wedge dy \wedge dz + z^2 dx \wedge dy \wedge dz}{f} \\ &= f dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

puisque $x^2 + y^2 + z^2 = f^2$. On déduit de tout cela l'égalité

$$d(f^\alpha \sigma) = f^{\alpha-1}(\alpha f + 3f) dx \wedge dy \wedge dz$$

puisqu'on avait déjà établi plus haut que $d\sigma = 3dx \wedge dy \wedge dz$. Ainsi, il existe un unique α dans $\mathbb{R}$ tel que $f^\alpha \sigma$ est fermé : c'est le réel α qui annule l'expression ci-dessus, c'est-à-dire $\alpha = -3$.

3. Soit h une homothétie de rapport $\lambda > 0$. On va montrer que

$$h^*(f^{-3}) = f^{-3}\sigma$$

où $h^*(f^{-3})$ est le tiré en arrière de f^{-3} par h. Soient $u, v \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} (h^*(f^{-3}\sigma))_p(u, v) &= (f^{-3}\sigma)_{h(p)}(d_p h(u), d_p h(v)) \\ &= \frac{\lambda x dy \wedge dz + \lambda y dz \wedge dx + \lambda z dx \wedge dy}{f^3(\lambda p)}(\lambda u, \lambda v) \\ &= \lambda^2 \frac{\lambda(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)}{\lambda^3 f^3(p)}(u, v) \\ &= \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{f^3(p)}(u, v) \\ &= (f^{-3}\sigma)_p, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité souhaitée. Dans ce calcul, on a utilisé la bilinéarité de la forme appliquée à $(\lambda u, \lambda v)$ pour mettre λ^2 en facteur, et aussi le fait que $f(\lambda p) = \lambda f(p)$ puisque $\lambda > 0$.

4. On définit

$$\begin{aligned} \psi \ :]0, 2\pi[\times] - \pi/2, \pi/2[&\to \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) \qquad &\mapsto (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi) \end{aligned}$$

Alors ψ est un paramétrage de S^2. Comme $\psi^*(\sigma) \in \Omega^2(U)$, c'est donc que $d\psi^*(\sigma) \in \Omega^3(U)$. Or $U \subset \mathbb{R}^2$ donc $\Omega^3(U) = \{0\}$, et donc $d\psi^*(\sigma) = 0$, ce qui revient à dire que $\psi^*(\sigma)$ est fermée.

5. Explicitons $(\psi^*(\sigma))_{(\theta,\varphi)}$, où $(\theta, \varphi) \in U$.

$$\begin{aligned} (\psi^*(\sigma))_{(\theta,\varphi)} =& \sigma(\psi(\theta, \varphi)) \\ =& \cos\theta\cos\varphi(\cos\theta\cos\varphi d\theta - \sin\theta\sin\varphi d\varphi) \wedge (\cos\varphi d\varphi) \\ &+ \sin\theta\cos\varphi(\cos\varphi d\varphi \wedge (-\sin\theta\cos\varphi d\theta - \cos\theta\sin\varphi d\varphi)) \\ &+ \sin\varphi(-\sin\theta\cos\varphi d\theta - \cos\theta\sin\varphi d\varphi) \wedge (\cos\theta\cos\varphi d\theta - \sin\theta\sin\varphi d\varphi) \\ =& \cos^2\theta\cos^3\varphi d\theta \wedge d\varphi + \sin^2\theta\cos^3\varphi d\theta \wedge d\varphi \\ &+ (\sin^2\varphi\cos\varphi\sin^2\theta + \cos^2\theta\sin^2\varphi\cos\varphi) d\theta \wedge d\varphi \\ =& (\cos^3\varphi + \sin^2\varphi\cos\varphi) d\theta \wedge d\varphi \\ =& \cos\varphi d\theta \wedge d\varphi \end{aligned}$$

Reste le calcule de l'intégrale.

$$\begin{aligned} \int_U g(\theta, \varphi) d\theta d\varphi &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \\ &= 2\pi [\sin\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

6. Explicitons d'abord $f^*(dt/t)$.

$$f^*(dt/t) = \frac{df}{f} = \frac{xdx + ydy + zdz}{f^2}$$

on peut alors calculer le produit extérieur.

$$\begin{aligned} f^*\frac{dt}{t} \wedge \sigma &= \frac{xdx + ydy + zdz}{f^2} \wedge (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \\ &= \frac{1}{f^2}(x^2 + y^2 + z^2) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Exercice 12. - Soit $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par

$$\omega(x,y) = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

1. Écrivons

$$\omega(x,y) = \frac{xdy}{x^2+y^2} - \frac{ydx}{x^2+y^2}$$

et calculons

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} dx\wedge dy - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \wedge dx \\ &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} dx\wedge dy + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Notons γ_1 et γ_2 les deux composantes de γ, c'est-à-dire écrivons $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Alors

$$\begin{aligned} {\gamma'}^*(\omega)_t &= \omega(\gamma')_t \\ &= \frac{\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1''}{||\gamma'||^2}(t)dt \\ &= \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{||\gamma'||^2}(t)dt \end{aligned}$$

Donc la fonction f du texte est égale à

$$f(t) = \frac{\det(\gamma',\gamma'')}{||\gamma'||^2}(t).$$

On se souvient que si K est la courbure de γ,

$$K(t) = \frac{|\det(\gamma',\gamma'')|}{||\gamma'||^3}(t)$$

donc $|f|$ est le produit de la courbure de γ par sa vitesse.

3. L'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs. Donc si ω est exacte, pour tout lacet γ lisse,

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

Calculons cette intégrale dans le cas où $\gamma(t) = e^{it}$, où t parcourt $[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \gamma^*\omega \\
&= \int_0^{2\pi} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\det(\gamma, \gamma')}{||\gamma||^2}(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

C'est non nul, donc ω n'est pas exacte.

4. On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ en posant $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$. Le même calcul que celui du **2** appliqué à Φ au lieu de φ' donne

$$\begin{aligned}
\Phi^*(\omega)_\theta &= \omega(\Phi)_\theta \\
&= \frac{\Phi_1\Phi_2' - \Phi_2\Phi_1'}{||\Phi||^2}(\theta)d\theta \\
&= \frac{\det(\Phi, \Phi')}{||\Phi||^2}(\theta)d\theta \\
&= d\theta
\end{aligned}$$

puisque $\det(\Phi, \Phi') = \det \begin{pmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho^2$ et $||\Phi||^2 = \rho^2$.

5-a. L'application Φ définit une bijection de $]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \smallsetminus (] - \infty, 0] \times \{0\})$. C'est le passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes. La Jacobienne de Φ est égale à

$J(\Phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$, de déterminant ρ qui est non nul. L'application inverse peut s'écrire comme suit.

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1} \ &: \ \mathbb{R}^2 \smallsetminus (] - \infty, 0] \times \{0\}) \to]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[\\
&(x, y) \mapsto \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right) & \text{si } y \geqslant 0 \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}, -\arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right) & \text{si } y < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Cette application est continue car quand (x, y) tend vers un point $(x_0, 0)$ où $x_0 > 0$, alors $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ tend vers 1. Comme $\arccos 1 = 0$, les deux morceaux de la fonction se recollent bien sur la demi-droite $(y = 0, x > 0)$.

Ainsi, Φ est bijective, continue, et son application réciproque est continue, donc c'est un homéomorphisme. Comme de plus elle est différentiable et comme sa différentielle est un isomorphisme en tout point, c'est un difféomorphisme.

Si l'on pose $(r, \varphi) = \Phi^{-1} \circ \gamma$, on obtient alors que $\gamma(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$.

Remarque. L'application réciproque de Φ peut aussi être écrite sans "coupure", c'est-à-dire en une seule formule :

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \left(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)\right)\\ &= \left(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\right)\end{aligned}$$

qui s'obtient en utilisant l'égalité trigonométrique suivante.

$$\tan(2\theta) = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

5-b. Rappelons que

$$\int_{\gamma|_{[a,b]}} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt.$$

Calculons d'abord

$$\begin{aligned}\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) &= \frac{1}{r(t)^2}\big(r(t)\cos\varphi(t)(r'(t)\sin\varphi(t)dt + r(t)\cos\varphi(t)\varphi'(t)dt)\\ &\qquad - r(t)\sin\varphi(t)(r'(t)\cos\varphi(t)dt - r\sin\varphi(t)\varphi'(t)dt\big)\\ &= \varphi'(t)dt\end{aligned}$$

Reste à intégrer.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma|_{[a,b]}} \omega &= \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt = \int_a^b \varphi'(t)dt\\ &= \varphi(b) - \varphi(a) = \arg\gamma(b) - \arg\gamma(a)\end{aligned}$$

C'est donc l'angle entre le point de départ et le point d'arrivée.