Université Bordeaux 1 **Algèbre et calcul formel – Master**
Mathématiques Année 2018–2019

**FEUILLE D'EXERCICES n° 13**

**Corrigé**

**Exercice 11** - *Dans $k[x, y, z]$, soient $f_1 = x - z^4$, $f_2 = y - z^5$ et $I =< f_1, f_2 >$.*
**1)** *Calculer la base de Gröbner réduite de $I$ pour l'ordre lexicographique avec $x > y > z$. Quels sont les monomes standards correspondants ?*

Sage répond que $(f_1, f_2)$ est la base de Gröbner réduite.

Les monômes dominants respectifs de $f_1$ et $f_2$ sont$x$ et $y$. Les monômes standards sont donc les monômes de $k[x, y, z]$ qui ne sont divisibles ni par $x$ ni par $y$. L'ensemble des monômes standards est donc

$$\mathcal{M}_{\text{lex}} = \{z^i \ : \ i \in \mathbb{N}\}.$$

**2)** *Calculer la base de Gröbner réduite de $I$ pour l'ordre lexicographique gradué avec $x > y > z$. Quels sont les monomes standards correspondants ?*

On demande à nouveau la base de Gröbner réduite à sage, qui donne

$$(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$$

où $g_1 = x^4 - y^3 z$, $g_2 = y^2 z^2 - x^3$, $g_3 = yz^3 - x^2$, $g_4 = z^4 - x$ et $g_5 = xz - y$.

Les monômes dominants respectifs de $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$ sont $x^4$, $y^2 z^2$, $yz^3$, $z^4$ et $xz$. Cherchons les monômes standards. Ceux qui ne dépendent que de $x$ et de $y$ sont les $x^i y^j$ qui ne sont pas divisibles par $x^4$. Ce sont donc les $x^i y^j$ tels que $i \in [[0, 3]]$. Un monôme standard qui dépend de $z$ ne dépend pas de $x$, car si c'était le cas, il serait divisible par $xz$. Les monomes standards qui dépendent de $z$ sont les $y^i z^j$ qui ne sont divisibles ni par $y^2 z^2$, ni par $yz^3$ ni par $z^4$ tels que $j \geqslant 1$. Ce sont donc les monômes $z$, $z^2$, $z^3$,$yz$, $yz^2$, $yz^3$ et $y^2 z$. On obtient donc comme ensemble des monômes standards

$$\mathcal{M}_{\text{glex}} = \{x^i y^j \ : \ (i, j) \in [[0, 3]] \times \mathbb{N}\} \cup \{z, z^2, z^3, yz, yz^2, yz^3, y^2 z\}.$$