

SORBONNE UNIVERSITÉ · CAMPUS PIERRE ET MARIE  
CURIE

---

Master Mathématiques et Applications

# Valeurs des fonctions Zêta des corps quadratiques réels aux entiers négatifs

Travail d'étude et de recherche

Directeur

Monsieur Pierre Charollois

Présenté par :

Afonso Li

Semestre 2

Année universitaire 2021-2022

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Généralités</b>	<b>2</b>
3.1	Notations . . . . .	2
3.1.1	Le symbole de Legendre . . . . .	3
3.1.2	Le symbole de Jacobi . . . . .	3
3.2	Formes quadratiques binaires entières . . . . .	3
3.3	Finitude du nombre des classes d'idéaux d'un anneau de nombres . . . . .	4
3.4	Résultats et définitions classiques . . . . .	4
3.5	Caractère de Dirichlet . . . . .	6
3.6	Fonctions $L(s, \chi)$ de Dirichlet . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Une méthode particulière pour s'approcher de la fonction zêta de Dedekind</b>	<b>8</b>
4.1	La décomposition de $\zeta(M, s)$ . . . . .	8
4.2	Forme quadratique primitive . . . . .	9
4.3	Calculer $\zeta(M, s)$ . . . . .	14
4.4	Conséquences du théorème . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Connection entre fonction zêta et nombres de classes et fractions continues</b>	<b>21</b>
5.1	Sommes de Dedekind . . . . .	21
5.2	Formule limite de Kronecker . . . . .	22
5.3	Théorème de Meyer . . . . .	24
5.4	Théorème de Kronecker . . . . .	26
5.5	Fractions continues . . . . .	30
5.6	Liens entre $\zeta(M, s)$ et $L_{M,V}(s)$ . . . . .	32

# 1 Remerciements

Je souhaiterais remercier Pierre Charollois pour avoir accepté d'encadrer mon TER, pour ses conseils et sa disponibilité.

## 2 Introduction

Dans ce travail, on se propose de calculer les valeurs des fonctions de Dedekind aux entiers négatifs. La fonction zêta de Dedekind joue un rôle important en théorie des nombres surtout dans l'étude des nombres premiers. Nous allons essayer de montrer une version affaiblie du théorème de Klingen-Siegel. Une grande partie de ce TER consiste à réaliser des expérimentations numériques pour des valeurs négatifs petits.

Le travail se repose principalement sur deux articles de Don Zagier [3] et [4]. Dans le premier, on étudiera la construction de fonction zêta à partir des "cônes" dans  $\mathbb{R}^2$ . On se focalisera sur les cônes en deux-dimensions car le corps  $K$  est quadratique réel. Dans le second article, nous allons faire des liens avec le premier, avec des L-fonctions spéciales, qui utilisera des propriétés de somme de Dedekind. Les expérimentations numériques sont codées en Java et en langage C (PARI/GP). Nous terminerons en étudiant le lien entre les corps quadratiques et imaginaires ayant des discriminants associés que l'on va définir.

## 3 Généralités

### 3.1 Notations

Si  $X$  est un ensemble fini,  $\text{Card}(X)$  désigne le cardinal de  $X$ .

On notera  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  l'ensemble des entiers, entiers positifs, rationnels, réels, complexes.

Le groupe des éléments inversibles d'un anneau  $A$  est noté  $A^\times$  et nous supposons que tous les anneaux que nous considérons sont commutatifs.

En général, nous notons  $K$  pour un corps.

### 3.1.1 Le symbole de Legendre

Soit  $p$  un nombre premier impair. Etant donné un entier  $n$ , le symbole de Legendre  $\left(\frac{n}{p}\right)$  est défini par

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ divise } n \\ 1 & \text{si } n \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_p^\times \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 3.1.2 Le symbole de Jacobi

Soit  $n > 1$  un entier  $r$  impair et considérons sa factorisation  $n = \prod_p p^{e_p}$ , Etant donné un entier  $m$ , le symbole de Jacobi  $\left(\frac{m}{n}\right)$  est défini par

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_p \left(\frac{m}{p}\right)^{e_p}$$

Le symbole de Jacobi  $\left(\frac{m}{n}\right)$  ne dépend que de l'image de  $m$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et on a les identités

$$\left(\frac{uv}{n}\right) = \left(\frac{u}{n}\right) \left(\frac{v}{n}\right) \text{ et } \left(\frac{u}{mn}\right) = \left(\frac{u}{m}\right) \left(\frac{u}{n}\right)$$

## 3.2 Formes quadratiques binaires entières

**Définition .1.** Une forme quadratique binaire entière est une fonction  $Q : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ , telle qu'il existe  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  vérifiant :  $Q(p, q) = ap^2 + bpq + cy^2, \forall p, q \in \mathbb{Z}$ .

**Remarque .2.** La forme  $Q$  est uniquement déterminée par le triplet  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ , par la suite, on peut désigner la forme  $Q$  par le symbole  $(a, b, c)$ .

**Définition .3.** Le discriminant de la forme  $Q=(a, b, c)$  est l'entier  $\text{disc}(Q)=b^2 - 4ac$ .

**Exemple 1.** Le discriminant de  $x^2 + dy^2$  est  $-4d$ . Remarquons qu'il s'agit de l'équation de Pell-Fermat.

**Définition .4.** La forme  $(a, b, c)$  est dite primitive si  $a, b, c$  sont premiers entre eux dans leur ensemble.

**Remarque .5.** On notera parfois  $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}^2)$  l'ensemble des formes, qui est un groupe abélien pour l'addition des fonctions.

**Proposition .6.** Si  $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{Z}^2)$  et  $M \in M_2(\mathbb{Z})$ , on note  $q \cdot M$  la forme quadratique  $(x, y) \mapsto q \left( M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$ . Pour tout  $M, N \in M_2(\mathbb{Z})$  et tout  $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{Z}^2) : (q \cdot M) \cdot N = q \cdot (MN)$  et  $q \cdot I_2 = q$ .

Le changement de coordonnées est particulièrement important lorsque  $M = \text{Mat}(u, v)$  qui est la matrice des vecteurs  $u$  et  $v$  dans la base canonique et que  $(u, v)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathbb{Z}^2$  i.e.  $P \in GL_2(\mathbb{Z})$ .

Rappelons que

$$SL_2(\mathbb{Z}) := \{P \in GL_2(\mathbb{Z}) \mid \det(P) = 1\}$$

**Définition .7.** Deux formes quadratiques  $q$  et  $q'$  sont dites équivalentes (resp. proprement équivalentes) s'il existe une  $\mathbb{Z}$ -base  $u, v$  de  $\mathbb{Z}^2$  (resp. une  $\mathbb{Z}$ -base directe) telle que  $q'(x, y) = q(xu + vy)$  pour tout  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Ce qui revient à dire qu'il existe  $P \in GL_2(\mathbb{Z})$  (resp.  $P \in SL_2(\mathbb{Z})$ ) tel que  $q' = q \cdot P$ .

### 3.3 Finitude du nombre des classes d'idéaux d'un anneau de nombres

Nous allons rappeler quelques notions classiques.

**Définition .8.** Deux idéaux  $I$  et  $J$  de  $A$  sont dits équivalents, et l'on note  $I \sim J$ , s'il existe  $x, y \in A$  non nuls tels que  $xI = yJ$ , ou ce qui revient au même s'il existe  $z \in K^\times$  tel que  $zI = J$ . C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des idéaux non nuls de  $A$  dont on note  $\text{Cl}(A)$  l'ensemble des classes.

**Définition .9.** Groupe des classes au sens restreint

Le groupe des classes au sens restreint est par définition

$$cl_K^+ = \frac{I_K}{P_K^+}$$

où  $I_K$  est le groupe des idéaux fractionnaires non nuls de  $K$ , et où  $P_K^+$  est le sous-groupe de  $I_K$  des idéaux principaux totalement positifs, c'est à dire si  $(\alpha) \in P_K^+$ ,  $\alpha \in K^\times$ , alors tous les plongements réels de  $\alpha$  sont positifs.

En particulier, Si  $cl_K$  désigne le groupe des classes de  $k$ , on a la formule suivante

$$|cl_K^+| = |cl_K| \frac{2^r}{[U_K : U_K^+]} \quad (1)$$

où  $r$  est le nombre de plongements réels de  $k$ ,  $U_K$  est le groupe des unités de  $K$ , et  $U_K^+$  le sous-groupe des unités de  $K$ , totalement positives.

### 3.4 Résultats et définitions classiques

L'objet central du TER part de la fonction Zêta de Riemann, définie pour  $\Re(s) > 1$ , par la série suivante :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Une des propriétés fondamentales de cette série est sa factorisation, plus précisément la factorisation en produits Eulériens.

**Théorème .10.** *Quand  $\Re(s) > 1$ , nous avons :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

*Démonstration.* Vu en Théorie des Nombres 2. □

**Théorème .11.** *Il existe une infinité de nombres premiers  $p$ .*

*Démonstration.* On va voir qu'au voisinage de  $s=1$ , la fonction

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{-s} = \log\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

Ainsi  $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{-1}$  diverge, ce qui prouvera notre théorème. Nous aurons besoin du lemme suivant. □

**Lemme .12.**  $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s)$  où  $\phi(s)$  est une fonction holomorphe sur le plan  $\Re(s) > 0$ .

*Démonstration.* Remarquons que  $\frac{1}{s-1} = \int_1^{\infty} t^{-s} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} t^{-s} dt$  Ainsi nous avons :

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} n^{-s} - t^{-s} dt$$

Il suffit de montrer que le membre de droite de l'équation converge absolument sur  $\Re(s) > 0$ . Ceci est dû au fait que :

$$\int_n^{n+1} n^{-s} - t^{-s} dt = \int_n^{n+1} \int_t^n \frac{s}{x^{s+1}} dx dt$$

et que

$$\left| \int_n^{n+1} \int_t^n \frac{s}{x^{s+1}} dx dt \right| \leq \frac{|s|}{n^{\Re(s)+1}}$$

La partie  $\frac{|s|}{n^{\Re(s)+1}}$  converge absolument pour tout  $s$  tel que  $\Re(s) > 0$ , d'où la preuve. □

Prouvons maintenant le théorème précédent.

*Démonstration.* Rappel du théorème : Il existe une infinité de nombres premiers  $p$ .

La fonction zêta possède clairement un pôle simple pour  $s=1$ . Ainsi nous allons prendre le logarithme de l'équation suivante :

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \frac{1}{s-1} + \phi(s), s \neq 1$$

Le développement de Taylor de  $\log(\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}})$  nous donne :

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} + \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{p^{ks}} = \log\left(\frac{1}{s-1} + \phi(s)\right)$$

Comme  $\phi(s)$  est holomorphe alors :

$$\log\left(\frac{1}{s-1} + \phi(s)\right) \sim \log\left(\frac{1}{s-1}\right), s \mapsto 1$$

Il nous reste à montrer que  $\psi(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{p^{ks}}$  est majoré par une série adaptée. En effet,  $\psi$  est majorée par  $\sum \frac{1}{p^{ks}} = \sum \frac{1}{(p^s)(p^s-1)} \leq \sum \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ .

Ainsi  $\psi(s)$  est bornée et on a vu que  $\log(\zeta(s)) \sim \log\left(\frac{1}{s-1}\right)$ , nous avons immédiatement :

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} \sim \log\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

□

**Proposition .13.** *La fonction zêta de Riemann  $\zeta(s)$  se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe avec seul pôle  $s=1$ . La fonction  $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ , est une équation qui prolonge  $\zeta$  sur tout le plan complexe, et  $\xi(s) = \xi(1-s)$ . De plus, nous avons vu en cours de Théorie des Nombres 2 que :*

$$\zeta(k) = 0, k \equiv 0 \pmod{2} \tag{2}$$

$$\zeta(k) = (-1)^n \frac{B_n}{2n}, k = 1 - 2n \tag{3}$$

Où  $B_n$  est le  $n$ -ième nombre de Bernoulli.

### 3.5 Caractère de Dirichlet

On considère l'anneau  $\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}$ , avec  $D$  un entier strictement positif. on rappelle que l'ordre de  $\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}$  est  $\phi(D)$  où  $\phi$  est indicateur d'Euler de  $D$ .

**Définition .14.** Un caractère de Dirichlet modulo  $D$  est un morphisme de groupes :

$$\chi : (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^\times \mapsto \mathbb{C}^\times$$

Nous pouvons étendre le caractère à  $\mathbb{Z}$ , en posant  $\chi'(n) = \chi(n \pmod{D})$  si  $n$  premier à  $D$  et  $\chi'(n) = 0$  sinon.

**Exemple 2.** Considérons  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times = \{\pm 1\}$  Donc il n'existe que deux caractères de Dirichlet modulo 3 :

1)  $\chi_1 \equiv 1$ , il s'agit du caractère trivial.

$$2) \chi_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ -1 & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

**Proposition .15.**  $\sum_{a \in (\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^\times} \chi(a) = \begin{cases} \phi(D) & \text{si } \chi \text{ est le caractère trivial} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**Proposition .16.**  $\sum_{\chi} \chi(a) = \begin{cases} \phi(D) & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

### 3.6 Fonctions $L(s, \chi)$ de Dirichlet

**Définition .17.** Une série de Dirichlet est une série de la forme :

$$L(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

avec  $a_n \in \mathbb{C}$  et  $s$  une variable complexe.

Nous rapploons quelques lemmes classiques sur les fonctions  $L$ .

**Lemme .18.** Si la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est bornée, la série  $L(s)$  converge normalement sur  $\{\Re(s) > r\}$  avec  $r$  réel  $> 1$ . En particulier, elle définit une fonction holomorphe sur  $\{\Re(s) > 1\}$ .

*Démonstration.*  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall s \in \mathbb{C}$ ,  $|n^s| = n^{\Re(s)}$ , comme la série à termes positifs  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$  converge bien quand  $s$  est réel  $> 1$ , qui est inférieure à  $1 + \int_1^\infty t^{-s} dt = 1 + \frac{1}{s-1}$ , d'où le lemme.  $\square$

**Définition .19.** La fonction  $L$  de Dirichlet associée à un caractère  $\chi$  modulo  $D$  est la série suivante

$$L(s, \chi) := \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

**Remarque .20.** 1.  $L(s, \chi)$  converge absolument si  $\Re(s) > 1$ .

2.  $L(s, \chi)$  admet une factorisation en produits Eulériens.

**Définition .21.** La fonction  $L$  de Dirichlet associée à un caractère  $\chi$  sur les idéaux est la série suivante

$$\begin{aligned} L_K(s, \chi) &= \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} \\ &= \prod_p \prod_{\mathfrak{p}|(p)} (1 - \chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} \end{aligned}$$

\*

## 4 Une méthode particulière pour s'approcher de la fonction zêta de Dedekind

L'objectif de ce chapitre est de démontrer le résultat de la fonction zêta d'une classe d'idéaux  $A$  d'un corps quadratique réel évalué aux entiers négatifs est rationnel.

On denote la fonction zêta d'une classe d'idéaux  $A$  d'un corps quadratique réel de la façon suivante :

$$\zeta(A, -n) = \sum_{(a,b,c)} \Phi_n(a, b, c)$$

où la somme se porte sur les formes quadratiques réduites au sens de Gauss  $ax^2 + bxy + cy^2$  associées à  $A$  et  $\Phi_n$  est une fonction rationnelle.

### 4.1 La décomposition de $\zeta(M, s)$

Soit  $K$  un corps quadratique réel i.e. de la forme  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , où  $d$  est sans facteur carré et  $d > 0$ . Nous allons prendre  $M$  un  $\mathbb{Z}$ -module de rang 2 de  $K$ .

**Proposition .22.** *Soit  $K$  un corps quadratique de discriminant réduit  $d$  et notons  $O_K$  son anneau d'entiers. On a alors l'identité  $O_K = \mathbb{Z}[\omega]$ , avec*

$$\omega = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{d}}{2} & \text{si } d \equiv 1 \pmod{4} \\ \sqrt{d} & \text{sinon} \end{cases}$$

**Définition .23.** Un ordre  $O$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$  qui est finiment engendré en tant que groupe additif.

En particulier,  $M$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de rang 2. Soit  $V$  le groupe des unités  $\epsilon$  totalement positives ( $\epsilon \gg 0$ ) telles que  $\epsilon M = M$ . De façon équivalente :

$V := \{ \alpha \in O_K^\times, \alpha = x + y\omega \text{ tel que } x, y \geq 0 \text{ et } \epsilon M = M \}$  où  $(1, \omega)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base de  $O_K$ .

**Proposition .24.** *Soit  $K$  un corps quadratique et soit  $M \subset O_K$  un ordre contenant une  $\mathbb{Q}$ -base de  $K$ . Alors  $M$  admet une  $\mathbb{Z}$ -base à deux éléments. On note  $D(M) \in \mathbb{Z}$  le discriminant d'une  $\mathbb{Z}$ -base quelconque de  $M$ .*

**Définition .25.** Le discriminant absolu de  $K$  est  $\Delta_{K/\mathbb{Q}} = \Delta_{K/\mathbb{Q}}(\omega_1, \omega_2)$  où  $(\omega_1, \omega_2)$  forme une  $\mathbb{Z}$ -base de  $O_K$ .

**Lemme .26.** *Soit  $M$  un ordre de  $O_K$  de  $\mathbb{Z}$ -base  $(v_1, v_2)$  et  $O_K$  a pour  $\mathbb{Z}$ -base  $(\omega_1, \omega_2)$ . La norme de  $M$   $N(M)$  est l'indice de  $M$  dans  $O_K$  est donné par :*

$$\Delta_{K/\mathbb{Q}}(v_1, v_2) = N(M)^2 \Delta_{K/\mathbb{Q}}(\omega_1, \omega_2)$$

Le discriminant de  $M$ ,  $\Delta_{K/\mathbb{Q}}(v_1, v_2)$  s'écrit aussi de la façon suivante qui est équivalente :

$$\Delta_{K/\mathbb{Q}}(v_1, v_2) = (v_1 v_2^{-1} - v_2 v_1^{-1})^2 \quad (4)$$

Passons maintenant à la définition de fonction zêta de  $M$  par

$$\zeta(M, s) = N(M)^s \sum_{\substack{\xi \in M/V \\ \xi \gg 0}} \frac{1}{N(\xi)^s}$$

Dans notre cas d'étude,  $\zeta(M, s) = \zeta(A, s)$ , avec  $\zeta(A, s)$  défini comme au début du chapitre où  $A$  est la classe d'idéaux du corps quadratique réel  $K$  contenant  $M$ , ainsi

$$\zeta(A, s) = \sum_{a \in A} N(a)^{-s}$$

est la fonction zêta usuelle comme a défini Takuro Shintani.

**Lemme .27.** *Soit  $A$  une classe d'idéaux de  $K$  et  $J$  un idéal dans la classe  $A^{-1}$ . Alors l'application  $I \mapsto IJ$  est une bijection des idéaux de  $A$  de norme  $n$  vers les idéaux principaux de  $O_K$  contenus dans  $J$  et de norme  $nN(J)$ .*

**Remarque .28.** En utilisant le lemme précédent, il est clair que  $\zeta(A, s) = \zeta(A^{-1}, s)$

## 4.2 Forme quadratique primitive

Soit  $(\xi_1, \xi_2)$  une  $\mathbb{Z}$ -base de  $M$ , la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ \xi &\mapsto \frac{\xi \xi'}{N(M)} \end{aligned}$$

devient une forme quadratique entière primitive

$$Q(x, y) = \frac{N(x\xi_1 + y\xi_2)}{N(M)}$$

de discriminant  $\Delta_K$ . L'action de  $SL_2(\mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{Q}$  est définie lorsque nous ne considérons que des bases orientées i.e.  $v_1 v_2' - v_2 v_1' > 0$ . La forme est invariante aux scalaires. On obtient ainsi une bijection entre les classes d'équivalences des ordres  $M$  avec  $D$  fixé et les classes d'équivalences de formes quadratiques entières primitives de discriminant  $D$  qui est une partition de  $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}^2)$ .

**Théorème .29** (Lagrange). *Soit  $D \in \mathbb{Z}$  non nul,  $A$  équivalence près, il n'y a qu'un nombre fini de formes quadratiques de discriminant  $D$ .*

**Lemme .30** (Réduction de Gauss). *Toute forme  $Q$  de discriminant  $D$  est équivalente à une forme  $(a, b, c)$  avec  $|b| \leq |a| \leq |c|$ , une telle forme satisfait  $\frac{b+\sqrt{D}}{2c} > 1 > \frac{b-\sqrt{D}}{2c} > 0$*

*Démonstration.* Le lemme prouve le théorème de Lagrange puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de triplets (a, b, c) satisfaisant les conditions.  $\square$

Si nous nous intéressons aux formes équivalentes Q reliées à M, il n'y aura qu'un nombre fini de formes réduites au sens de Réduction de Gauss. Nous pouvons les retrouver et les indiquer en fonction de  $k \in \mathbb{N}$ .

**Théorème .31.** *Les formes réduites sont de la forme*

$$Q_k(p, q) = \frac{\sqrt{D}}{w_k - w'_k} (pw_k + q)(pw'_k + q)$$

où  $k=0, 1, \dots, r-1$ , les  $w_0, \dots, w_{r-1} \in K$  sont obtenus à partir des fractions continues spécifiques.

*Démonstration.* Rappelons que  $(\xi_1, \xi_2)$  est une  $\mathbb{Z}$ -base orientée de M. En développant  $\frac{\xi_1}{\xi_2}$  en fraction continue

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \dots}}}} = [[a_0, a_1, a_2, \dots]]$$

avec  $a_i \in \mathbb{Z}$ ,  $a_0, a_1, a_2, \dots \geq 2$ , il existe  $i_0 \geq 0$  et  $r \geq 1$  tels que  $a_{i+r} = a_i$  pour tout  $i \geq i_0$ , c'est à dire que cela va créer une boucle à partir d'un certain rang  $i_0$ . Nous allons récupérer cette boucle ou période  $((a_{i_0}, a_{i_0+1}, \dots, a_{i_0+r-1}))$  qui est invariante à permutation cyclique près si on choisissait une autre base  $(\xi_1, \xi_2)$  de M. On renomme  $b = ((b_0, b_1, \dots, b_{r-1}))$  la période que nous avons extraite avec  $b_i \in \mathbb{Z}$  et  $b_i \geq 2$ .

En étant donné la période b, on l'étend à une période d'entiers paramétrée par les entiers qui sont définis par  $b_k = b_{k \bmod r}$ . De plus, pour tout entier k, on définit

$$w_k = [[b_k, b_{k+1}, \dots, b_{k+r-1}]] = b_k - \frac{1}{b_{k+1} - \frac{1}{b_{k+2} - \frac{1}{b_{k+3} - \dots}}}}$$

$[[b_k, b_{k+1}, \dots, b_{k+r-1}]]$  indique une fraction continue infinie d'une périodicité r. Remarquons que  $w_k = w_{k+r}$  pour tout entier k. Par définition

$$w_0 = b_0 - \frac{1}{b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\dots b_{r-1} - \frac{1}{w_0}}}}} = b_0 - \frac{1}{w_1}$$

Par récurrence, on a

$$w_k = b_k - \frac{1}{b_{k+1} - \frac{1}{b_{k+2} - \frac{1}{b_{k+3} - \dots}}} = b_k - \frac{1}{w_{k+1}}$$

□

On a alors défini les nombres totalement positifs  $A_k \in K$  de la façon suivante :

$$A_0 = 1, A_{k-1} = A_k w_k$$

Comme  $w_k = b_k - \frac{1}{w_{k+1}}$  alors

$$A_{k-1} + A_{k+1} = b_k A_k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Nous avons  $M = \mathbb{Z}w_0 + \mathbb{Z}w_1$   $\mathbb{Z}$ -module de rang 2 de  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$  par définition de  $w_0$  et qui a pour base  $\{1, w_0\}$ . On a que  $A_{-1} = w_0$  et  $A_0 = 1$  et en utilisant la relation de récurrence, on obtient

$$M = \mathbb{Z}A_k + \mathbb{Z}A_{k-1} \quad (5)$$

Remarquons que  $A'_k A_{k-1} - A_k A'_{k-1} = w_0 - w'_0 = N(M)\sqrt{D}$ , la forme associée à  $M$  en  $(A_k, A_{k-1})$  est la forme  $Q_k$  que nous avons mentionné dans le théorème.

$$Q_k(p, q) = \frac{N(pA_{k-1} + qA_k)}{N(M)} \quad (6)$$

**Proposition .32.**  $A_r$  appartient au groupe des unités  $V$  de  $M$ .

*Démonstration.* Par construction

$$A_{k+r} = \frac{1}{w_k w_{k+1} \cdots w_{k+r-1}} A_k$$

Or  $w_k = w_{k+r}$ , alors :

$$A_{k+r} = \frac{1}{w_1 w_2 \cdots w_r} A_k = A_r A_k$$

d'après la relation (5), on a  $A_r M = M$  alors  $A_r \in V$  groupes des unités de  $M$ . □

En particulier,

$$A_r = \frac{1}{w_1 w_2 \cdots w_r} = \epsilon^{-1}$$

où  $\epsilon$  est le générateur de  $V$  avec  $\epsilon > 1$

**Remarque .33.** L'action du  $V$  sur la base  $(A_k, A_{k-1})$  est presque transitif. En particulier, nous avons  $\epsilon A_k = A_{k-r}$ . La matrice de multiplication par  $\epsilon$  sur  $M$  en termes de sa base  $(\xi_1, \xi_2) = (A_1, A_0)$  peut être calculée de la façon suivante. Nous rappelons que nous avons

$$A_k = -p_k A_{-1} + q_k A_0, \text{ où } \frac{p_k}{q_k} = [[b_0, b_1, \dots, b_{k-1}]] \quad (7)$$

Ce qui implique que

$$\epsilon^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{r-1} \\ A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_{r-1} & -p_r \\ q_{r-1} & q_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Il s'ensuit que la matrice de  $\epsilon$  est donnée par

$$\begin{pmatrix} q_r & p_r \\ -q_{r-1} & -p_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 q - p & q \\ -b_0 p' + \frac{(pp'-1)}{q} & -p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_{r-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

où

$$\frac{q}{p} := [[b_0, b_1, \dots, b_{r-1}]] \quad (10)$$

Avec  $q = 1, p = 0$  si  $r = 1$  et  $p'$  est l'inverse de  $p \pmod{q}$ .

$p' = 0$  (resp  $1$ ) si  $r = 1$  (resp  $2$ ).

**Proposition .34.** Soit  $\xi \in M$ ,  $\xi \gg 0$ . Alors on peut écrire  $\xi$  sous une écriture unique sous la forme

$$\xi = pA_{k-1} + qA_k, \text{ avec } k, p, q \in \mathbb{Z}, p \geq 1, q \geq 0$$

*Démonstration.* On rappelle que

$$M = \mathbb{Z}w_0 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}A_k + \mathbb{Z}A_{k-1}$$

Ainsi, nous pouvons, pour chaque entier  $k$ , écrire  $\xi$  comme  $pA_{k-1} + qA_k$  avec  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

$$p \geq 1, q \geq 0 \iff \frac{A_k}{A'_k} < \frac{\xi}{\xi'} < \frac{A_k A_{k-1}}{A'_k A'_{k-1}}$$

Or d'après la définition récurrente de  $A_k$ , nous déduisons que

$$0 < \cdots < \frac{A_2}{A'_2} < \frac{A_1}{A'_1} < \frac{A_0}{A'_0} = 1 < \frac{A_{-1}}{A'_{-1}} < \frac{A_{-2}}{A'_{-2}} < \cdots$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k}{A'_k} = 0, \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{A_k}{A'_k} = \infty$$

D'où il existe exactement une seule valeur de  $k$  qui satisfait

$$\frac{A_k}{A'_k} < \frac{\xi}{\xi'} < \frac{A_k A_{k-1}}{A'_k A'_{k-1}}$$

qui termine notre preuve de la proposition.  $\square$

**Proposition .35.** *Maintenant que nous avons obtenu une écriture unique de  $\xi \in M$  telle que  $\xi \gg 0$ . On souhaite observer l'action de  $V$ , le groupe des unités  $\epsilon$  totalement positives telles que  $\epsilon M = M$ , sur l'ensemble  $\{\xi \in M | \xi \gg 0\}$ . Or d'après 1.9), multiplier  $\xi$  par  $\epsilon$  dans son écriture  $pA_{k-1} + qA_k$  est équivalent à remplacer  $k$  par  $k-r$ . Ainsi, nous avons*

$$\{\xi \in M | \xi \gg 0\} / V = \bigcup_{k \pmod{r}} \bigcup_{\substack{p=1 \\ q=0}}^{\infty} \{pA_{k-1} + qA_k\}$$

Ainsi, la fonction zêta que nous avons définie au début

$$\zeta(M, s) = N(M)^s \sum_{\substack{\xi \in M/V \\ \xi \gg 0}} \frac{1}{N(\xi)^s}$$

devient

$$\zeta(M, s) = \sum_{k \pmod{r}} \sum_{\substack{p=1 \\ q=0}}^{\infty} \frac{N(M)^s}{N(pA_{k-1} + qA_k)^s} = \sum_k^r \sum_{p,q} ' \frac{1}{Q_k(p, q)^s}$$

où le symbole  $\sum '$  est défini par

$$\sum_{p,q} ' f(p, q) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} f(p, q) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} f(p, 0) + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{\infty} f(0, q)$$

**Théorème .36.** *Soit  $M$  un module de rang 2 dans un corps quadratique réel, alors la fonction zêta de  $M$  possède la décomposition*

$$\zeta(M, s) = \sum_Q \left( \sum_{p,q} ' \frac{1}{Q(p, q)^s} \right)$$

où  $\sum '$  est défini comme avant, et  $Q$  parcourt les formes réduites dans la classe des formes quadratiques associée à  $M$ .

*Démonstration.* Cela utilise les deux propositions précédentes. □

**Proposition .37.** *Interprétation géométrique*

*Nous identifions l'ordre  $M$  à un sous-réseau de  $\mathbb{R}^2$ , en plongeant  $M$  dans  $\mathbb{R}^2$  par  $\xi \mapsto (\xi, \xi')$  et  $\{\xi \in M | \xi \gg 0\}$  est identifié à  $M \cap \mathbb{R}^2$ . On rappelle  $r$  la longueur de la période de la fraction continue construite dans le théorème 2.10. Nous savons qu'il existe  $r$  vecteurs canoniques  $A_0, A_1, \dots, A_r$  dans  $M$  (dépendants de la séquence  $b = (b_0, b_1, \dots, b_{r-1})$  créé dans le théorème 2.10). Les rayons passant par l'origine et  $A_k$  divisent  $\mathbb{R}^2$  en une union infinie de cônes  $C_k$ . Le  $k$ -ième cône  $C_k$  dont les extrémités sont définies par les vecteurs  $A_k$  et  $A_{k+1}$ . Mais nous nous intéressons à  $\{\xi \in M | \xi \gg 0\} / V$ , puisque un générateur  $\epsilon$  de  $V$  envoie  $C_k$  sur  $C_{k-r}$ . Alors  $\{\xi \in M | \xi \gg 0\} / V$  se décompose en  $r$  cônes non-singulières isomorphes à  $\mathbb{N}^2 = \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 | p, q \geq 0\}$ . i.e. les points de bord c'est à dire les points  $\xi$  tels que  $p$  ou  $q = 0$  sont comptés avec la multiplicité  $\frac{1}{2}$ .*

**Proposition .38.**  $M/V$  possède un domaine fondamental qui est un cône semi-ouvert de dimension 2, son adhérence est le cône  $\langle A_0, A_r \rangle$ .

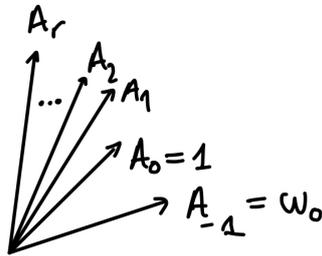


FIGURE 1 – Un domaine fondamental de  $M/V$

**Exemple 3.**

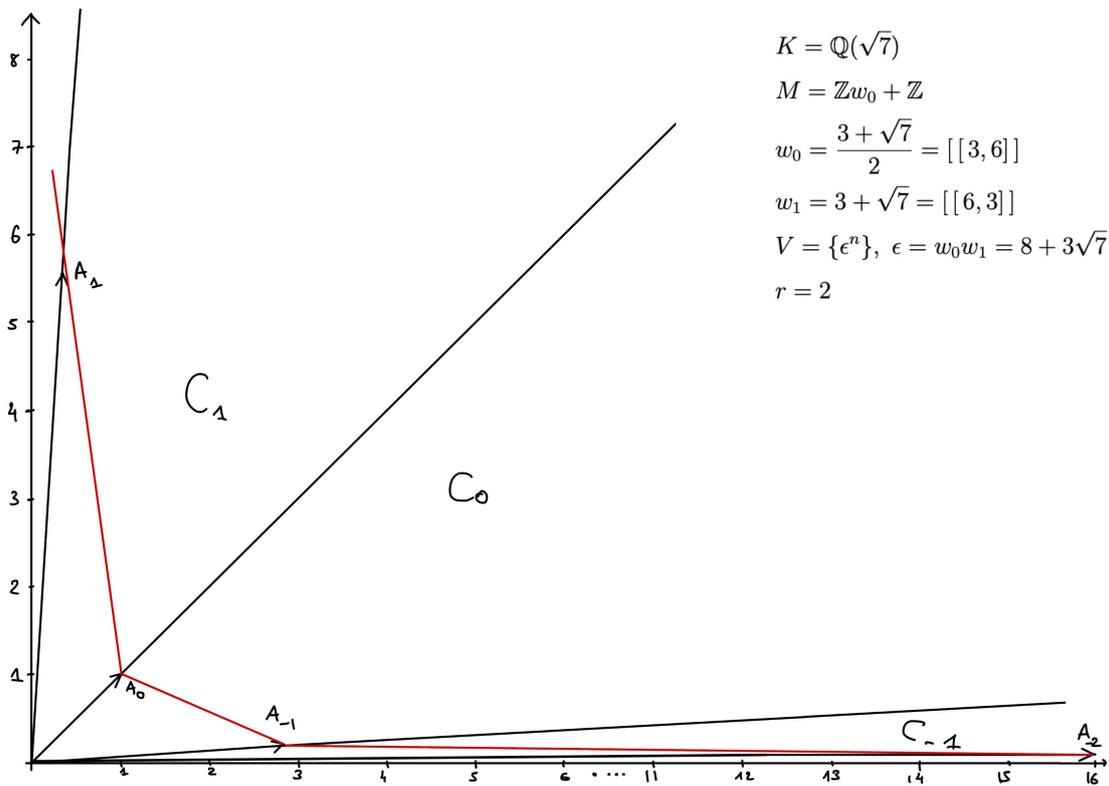


FIGURE 2 – Exemple avec  $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$

4.3 Calculer  $\zeta(M, s)$

Nous avons trouvé précédemment :

$$\zeta(M, s) = \sum_k^r \sum_{p,q} ' \frac{1}{Q_k(p, q)^s}$$

Nous allons alors poser une forme quadratique générale à coefficients réels positifs et nous souhaitons que les racines de l'équation

$$cx^2 - bx + a = 0$$

soient  $w, w'$  avec  $w > w'$ , ainsi nous avons

$$w = \frac{b + \sqrt{D}}{2c}, \quad w' = \frac{b - \sqrt{D}}{2c}, \quad \text{tel que } Q(p, q) = \frac{\sqrt{D}}{w - w'}(pw + q)(pw' + q)$$

Et nous définissons une fonction  $Z_Q(s) : \{\Re(s) > 1\} \mapsto \mathbb{C}$  de la façon suivante

$$Z_Q(s) = \sum'_{p,q} \frac{1}{Q_k(p, q)^s}$$

où  $\sum'$  est défini dans .35.

L'objectif de ce TER est de montrer que sur les valeurs négatives, la fonction zêta définie par Zagier est en fait rationnelle. Mais pour l'instant,  $Z_Q$  est définie sur le plan  $\{\Re(s) > 1\}$ , il faut ainsi prolonger analytiquement  $Z_Q$  sur tout  $\mathbb{C}$ . D'où le théorème qui suit.

**Théorème .39.** *La fonction  $Z_Q(s) - \frac{1}{2\sqrt{D}} \frac{\log(\frac{w}{w'})}{s-1}$  se prolonge analytiquement sur une fonction entière sur tout  $\mathbb{C}$  et  $Z_Q(-n) \in \mathbb{Q}$  si  $n$  est entier positif. En particulier,  $Z_Q(-n)$  s'exprime par des fonctions rationnelles en  $a, b, c$  avec des coefficients rationnels de la forme suivante*

$$Z_Q(-n) = \frac{(-1)^n n!}{2} \frac{B_{2n+2}}{2n+2} \left( \frac{f_n(a, b, c)}{a^{n+1}} + \frac{f_n(a, b, c)}{c^{n+1}} \right) + g_n(a, b, c)$$

où  $B_k$  est le  $k$ -ième nombre de Bernoulli et  $f_n$  et  $g_n$  sont des polynômes définis de la façon suivante

$$f_n(a, b, c) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(n-r)!}{r!(2n+1-2r)!} a^r b^{2n+1-2r} c^r \quad (11)$$

$$g_n(a, b, c) = - \sum_{r=0}^{2n} \frac{B_{r+1}}{r+1} \frac{B_{2n+1-r}}{2n+1-r} d_{r,n} \quad (12)$$

avec  $d_{r,n}$  défini par

$$\sum_{r=0}^{2n} d_{r,n} x^r y^{2n-r} = (ax^2 - bxy + cy^2)^n \quad (13)$$

Nous allons prouver ce théorème important, mais d'abord nous avons des résultats intéressants que nous pouvons obtenir en utilisant des méthodes numériques en Java et Pari-GP.

Par exemple, étant donné une forme quadratique  $Q(p, q) = ap^2 + bpq + cq^2$ , comment extrayons-nous les coefficients  $d_{r,n}$  définis juste avant ? Nous utilisons le programme suivant sur Pari-GP

```

coeffs (P, nbvar) = {
    if (type(P) != "t_POL",
    for (i=1, nbvar, P = [P]);
    return (P) );
    vector(poldegree(P)+1, i, coeffs(polcoeff(P, i-1), nbvar-1))
}

```

Comme entrée la méthode prend un polynôme et un entier  $n$  qui indique le nombre de coefficients que nous souhaitons obtenir.

Il existe certaines valeurs de  $n$ , où il est facile de calculer  $Z_Q(-n)$  telles que :

$$\begin{aligned}
 Z_Q(0) &= \frac{1}{24} \left( \frac{b}{a} + \frac{b}{c} \right) - \frac{1}{4} \\
 Z_Q(-1) &= \frac{1}{1440} \left( \frac{b^3 - 6abc}{a^2} + \frac{b^3 - 6abc}{c^2} \right) + \frac{1}{144} b \\
 Z_Q(-2) &= \frac{1}{30240} \left( \frac{b^5 - 10a^3bc + 30a^2bc^2}{a^3} + \frac{b^5 - 10a^3bc + 30a^2bc^2}{c^3} \right) - \frac{1}{360} b(a+c)
 \end{aligned} \tag{14}$$

Voici une implémentation en Java

```

public static BigRational Z_Q_zero(int a, int b, int c) {
    BigRational b_on_a = new BigRational(b, a);
    BigRational b_on_c = new BigRational(b, c);
    BigRational fin = (new BigRational(1, 24)).times(b_on_a.plus(b_on_c));
    return fin;
}

```

**Point d'attaque :** Pour démontrer le théorème précédent, nous aurons besoin de plusieurs ingrédients. Commençons par un lemme sur la formule de développement asymptotique.

**Lemme .40.** Soit  $\phi(s) = \sum_{\lambda>0} a_\lambda \lambda^{-s}$  une série de Dirichlet où  $\{\lambda\}$  est une suite de nombres réels positifs convergeant vers  $+\infty$ . Soit  $f(t) = \sum_{\lambda>0} a_\lambda e^{-\lambda t}$  la série exponentielle correspondant à  $\phi(s)$ . Supposons que  $f(t)$  quand  $t \mapsto 0$  possède un développement asymptotique de la forme

$$f(t) \sim \sum_{n=-1}^{\infty} C_n t^n \tag{15}$$

Alors, on a nombreuses conséquences

1.  $\phi(s)$  a un prolongement méromorphe sur tout  $\mathbb{C}$  ;
2.  $\phi(s)$  possède un seul pôle qui est simple en  $s=1$  ;

3. Les valeurs de  $\phi$  en entiers négatifs sont :  $\phi(-n) = (-1)^n n! C_n$ .

*Démonstration.* Nous allons négliger la preuve du lemme qui consiste à utiliser la transformation de Mellin

$$\Gamma(s)\phi(s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt \quad (16)$$

Pour plus de détails , vous pouvez vous référer à l'article [4] et le cours de théorie des nombres de Pierre Charollois, qui présente une technique similaire.  $\square$

Nous souhaitons appliquer le lemme à la fonction  $Z_Q(s)$ , il suffit donc de trouver un développement asymptotique de  $\sum_{p,q} 'e^{-Q(p,q)t}$  en  $t=0$ . Introduisons le lemme suivant.

**Lemme .41.** *Soit  $f$  une fonction  $C^\infty$  à valeurs réelles sur  $\mathbb{R}_+$  qui possède un développement asymptotique en  $t=0$  de la forme*

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad (t \mapsto 0) \quad (17)$$

et telle que  $C = \int_0^\infty f(t) dt$  soit finie. Alors la fonction  $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nt)$  possède un développement asymptotique en  $t=0$  de la forme

$$g(t) \sim \frac{C}{t} + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{B_{r+1}}{r+1} a_r t^r = \frac{C}{t} - \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{12}a_1 t + \frac{1}{120}a_3 t^3 - \dots \quad (18)$$

*Démonstration.* C'est une conséquence de la formule de Euler-Maclaurin.  $\square$

Maintenant prouvons le théorème.

*Démonstration.* Théorème .39

Soit  $f(t) = \sum_{\lambda>0} a_\lambda e^{-\lambda t}$  la fonction associée à une série de Dirichlet  $\phi(s) = \sum_{\lambda>0} a_\lambda \lambda^{-s}$ , on

aura alors  $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\lambda>0} a_\lambda e^{-n\lambda t}$ .

Nous écrivons

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nt) \sim \frac{1}{t} \left( \int_0^\infty f(x) dx \right) + \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r f^{(r)}(0) t^r \quad (t \rightarrow 0) \quad (19)$$

où  $\beta_r = (-1)^r \frac{B_{r+1}}{(r+1)!}$ . Un résultat similaire peut-être obtenu pour une fonction à deux variables.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F(mt, nu) &\sim \frac{1}{tu} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty F(x, y) dx dy \right) + \frac{1}{t} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r u^r \left( \int_0^\infty F^{(0,r)}(x, 0) dx \right) \\ &+ \frac{1}{u} \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r t^r \left( \int_0^\infty F^{(r,0)}(0, y) dy \right) + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \beta_r \beta_s F^{(r,s)}(0, 0) t^r u^s \end{aligned}$$

où  $F^{(i,j)}(x, y) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} F(x, y)$ . Donc si  $t=u$  alors l'équation devient

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} 'F(mt, nu) &\sim \frac{1}{tu} \left( \int_0^\infty \int_0^\infty F(x, y) dx dy \right) + \sum_{r=0}^\infty \beta_r t^{r-1} \left( \int_0^\infty F^{(0,r)}(x, 0) dx \right) \\ &+ \sum_{r=0}^\infty \beta_r t^{r-1} \left( \int_0^\infty F^{(r,0)}(0, y) dy \right) - \frac{1}{4} F(0, 0) + \sum_{r=0}^\infty \sum_{s=0}^\infty \beta_r \beta_s F^{(r,s)}(0, 0) t^{r+s} \end{aligned}$$

Nous allons alors poser  $F(t, u) = e^{-Q(t,u)}$  où  $Q$  est une forme quadratique définie comme avant. On obtient en faisant un changement de variable  $t^{\frac{1}{2}}$  par  $t$ .

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} 'e^{-(am^2+bm+cn^2)t} &\sim \frac{C}{t} + \sum_{n=0}^\infty \beta_{2n+1} t^n \int_0^\infty \frac{\partial^{2n+1}}{\partial y^{2n+1}} (e^{-(ax^2+bxy+cy^2)})_{|y=0} dx \\ &+ \sum_{n=0}^\infty \beta_{2n+1} t^n \int_0^\infty \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} (e^{-(ax^2+bxy+cy^2)})_{|x=0} dy - \frac{1}{4} \\ &+ \sum_{r=0}^\infty \sum_{s=0}^\infty \beta_r \beta_s t^{\frac{r+s}{2}} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} (e^{-(ax^2+bxy+cy^2)})_{|x=y=0} \end{aligned}$$

où

$$C = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-Q(x,y)} dx dy \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\sqrt{D}} \log \frac{w}{w'}$$

l'égalité (\*) est détaillée dans l'article de Zagier.

Puis nous allons détailler  $\int_0^\infty \frac{\partial^{2n+1}}{\partial y^{2n+1}} (e^{-(ax^2+bxy+cy^2)})_{|y=0} dx$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial^{2n+1}}{\partial y^{2n+1}} (e^{-(ax^2+bxy+cy^2)})_{|y=0} dx &= \int_0^\infty \left[ (2n+1)! \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r a^r b^{2n+1-2r}}{r!(2n+1-2r)!} y^{2n+1-2r} e^{-cy^2} \right] dy \\ &= -\frac{1}{2} (2n+1)! \frac{f_n(a, b, c)}{c^{n+1}} \end{aligned}$$

où  $f_n(a, b, c)$  a été défini avant. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} 'e^{-(am^2+bm+cn^2)t} &\sim \frac{\frac{1}{2\sqrt{D}} \log \frac{w}{w'}}{t} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^\infty \frac{B_{2n+2}}{2n+2} \left( \frac{f_n(a, b, c)}{c^{n+1}} + \frac{f_n(c, b, a)}{a^{n+1}} \right) t^n \\ &- \frac{1}{4} - \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} t^n \left( \sum_{\substack{r,s \geq 1 \\ r+s=2n}} \frac{B_{r+1}}{r+1} \frac{B_{s+1}}{s+1} d_{r,n} \right) \end{aligned}$$

où  $d_{r,n}$  est défini dans le théorème. Ainsi, le théorème déroule de la formule précédente et du premier lemme.  $\square$

## 4.4 Conséquences du théorème

Rappelons que

$$\zeta(M, s) = \sum_Q \left( \sum_{p,q} ' \frac{1}{Q(p, q)^s} \right) = \sum_{k=1}^r Z_{Q_k}(s)$$

Ainsi la décomposition de la fonction zêta d'un  $\mathbb{Z}$ -module  $M$  dans un corps quadratique réel dépend des formes quadratiques  $Q_k$  étant définis par 6 et des fonctions  $Z_{Q_k}$  associées. Alors

1.  $\zeta(M, s)$  a un prolongement méromorphe sur tout  $\mathbb{C}$ , possédant un seul pôle qui est simple en  $s=1$  ;
2. le résidu de  $\zeta(M, s)$  en  $s=1$  est donné par

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s=1}\zeta(M, s) &= \sum_{k=1}^r \text{Res}_{s=1}Z_{Q_k}(s) \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{1}{2\sqrt{D}} \log \frac{w_k}{w'_k} \end{aligned}$$

3.  $\zeta(M, -n) \in \mathbb{Q}$  pour  $n \in \mathbb{N}$

Nous souhaitons obtenir une formule générale pour  $\zeta(M, s)$  qui soit indépendante du module  $M$ .

Comme  $M \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{D})$  est un ordre de rang 2 d'un corps quadratique réel, nous avons déjà défini une forme quadratique (rappel :  $M = \mathbb{Z}A_k + \mathbb{Z}A_{k+1}$ )

$$Q_k(p, q) = L_k p^2 + M_k p q + N_k q^2$$

avec

$$L_k, M_k, N_k \in \mathbb{Z}, M_k^2 - 4L_k N_k = D$$

Alors

$$w_k = \frac{M_k + \sqrt{D}}{2N_k}$$

par la définition de  $w_k$ , on en déduit par récurrence que

$$L_{k+1} = N_k \tag{20}$$

$$M_{k+1} = 2b_k N_k - M_k \tag{21}$$

$$N_{k+1} = b_k^2 N_k - b_k M_k + L_k \tag{22}$$

**Remarque .42.** Soit  $l, m \in \mathbb{Z}$  avec  $l \neq m$ . Alors les coefficients de  $p^2, pq, q^2$  de  $Q_k(p, q)$  sont donnés par des polynômes en  $b_i$  avec des coefficients entiers.

En utilisant la formule explicite de  $Z_Q(0) = \frac{1}{24}(\frac{b}{a} + \frac{b}{c}) - \frac{1}{4}$ , on trouve

$$\begin{aligned} \zeta(M, 0) &= \frac{1}{24} \sum_{k=1}^r \left( \frac{M_k}{L_k} + \frac{M_k}{N_k} - 6 \right) \\ &= \frac{1}{24} \sum_{k=1}^r \left( \frac{M_{k+1}}{L_{k+1}} + \frac{M_k}{N_k} - 6 \right) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\zeta(M, 0) = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^r (b_k - 3) \quad (23)$$

On verra que ce résultat équivaut à un résultat connu de Meyer qui est expliqué dans l'article [3] de Zagier .

De la même façon pour  $s=-1$

$$\zeta(M, -1) = \frac{1}{720} \sum_{k=1}^r (-2N_k b_k^3 + 3M_k b_k^2 - 6L_k b_k + 5M_k) \quad (24)$$

Dans l'article [4] de Zagier, il a expliqué que nous pouvons déduire d'après un théorème de Siegel que

$$2\zeta(M, -1) = \zeta(M, -1) + \zeta(M^*, -1) = \frac{1}{60} \sum_{k=1}^r (M_k - N_k) + \frac{1}{60} \sum_{k=1}^r (M_k^* - N_k^*) \quad (25)$$

où  $M^* = \lambda M$  avec  $\lambda\lambda' < 0$  et  $Q_k^*(p, q) = L_k^* p^2 + M_k^* pq + N_k^* q^2$  sont les formes quadratiques réduites au sens de Gauss qui correspondent à  $M^*$ .

Pour la suite, nous souhaitons exprimer  $\zeta(M, -n)$  en  $L_k, M_k, N_k, b_k$ . Pour ceci, on a besoin du lemme suivant.

**Lemme .43.** *Avec les notations du théorème .39, nous avons*

$$f_n(a, b, c) + f_n(c, 2\lambda c - b, \lambda^2 c - \lambda b + a) = 2 \frac{(-1)^n}{n!} c^{n+1} h_n(a, b, c; \lambda)$$

où

$$\begin{aligned} h_n(a, b, c; \lambda) &= \int_0^\lambda (a - bt + ct^2)^n dt \\ &= \sum_{r=0}^{2n} d_{r,n} \frac{\lambda^{2n-r+1}}{2n-r+1} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Admis. (Voir l'article [4]) □

En utilisant lemme et les équations de 20, nous pouvons remplacer la formule pour  $\zeta(M, -n)$  donnée dans le théorème .39 par une expression polynomiale en  $L_k, M_k, N_k, b_k$ .

**Corollaire .44.**

$$\zeta(M, -n) = \sum_{k=1}^r \left( \frac{B_{2n+2}}{2n+2} h_n(L_k, M_k, N_k; b_k) + g_n(L_k, M_k, N_k) \right) \quad (26)$$

qui s'écrit aussi

$$\zeta(M, -n) = \sum_{k=1}^r \sum_{s=0}^{2n} d_{s,n}^{(k)} \left( \frac{B_{2n+2}}{2n+2} \frac{b_k^{2n-s+1}}{2n-s+1} - \frac{B_{s+1}}{s+1} \frac{B_{2n-s+1}}{(2n-s+1)} \right) \quad (27)$$

où les  $d_{s,n}^{(k)}$  ( $0 \leq s \leq 2n, 1 \leq k$ ) sont définis par

$$\sum_{s=0}^k (-1)^s d_{s,n}^{(k)} x^s y^{2n-s} = Q_k(x, y)^n$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$	$d$	5	7	11	15	21
$\Gamma$		1	2	3	1	1
FC		$\overline{[3]}$	$\overline{[3, 6]}$	$\overline{[2, 2, 8]}$	$\overline{[8]}$	$\overline{[5]}$
$W_0$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{7}}{2}$	$\frac{4+\sqrt{11}}{5}$	$4+\sqrt{15}$	$\frac{5+\sqrt{21}}{2}$
$\zeta$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$8+3\sqrt{7}$	$10+3\sqrt{11}$	$4+\sqrt{15}$	$\frac{5+\sqrt{21}}{2}$
$\mathbb{Q}_0$		$p^2+3pq+q^2$	$p^2+6pq+2q^2$	$p^2+8pq+5q^2$	$p^2+8pq+q^2$	$p^2+5pq+q^2$
$\mathbb{Q}_1$		/	$2p^2+6pq+q^2$	$5p^2+12pq+5q^2$	/	/
$\mathbb{Q}_2$		/	/	$5p^2+8pq+11q^2$	/	/
$\zeta(M,0)$		0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$
$\zeta(M,-1)$		$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{6}$
$\zeta(M,-2)$		0	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{16}{63}$

FIGURE 3 – Expérimentations numériques

## 5 Connection entre fonction zêta et nombres de classes et fractions continues

Dans la suite, nous allons admettre beaucoup de résultats, le lecteur est conseillé de consulter soit-même les références pour un raisonnement plus rigoureux.

### 5.1 Sommes de Dedekind

Les Sommes de Dedekind ont surgi pendant l'étude de fonctions elliptiques et formes modulaires. Elles ont été initialement découvertes par Dedekind mais sont étudiées depuis pour leurs propriétés arithmétiques. Beaucoup de travail a été fait sur les sommes de Dedekind et en 1972 Rademacher et Grosswald ont publié un livre qui résumait une grande partie de ce qui était connu, tout en fournissant une histoire des Sommes de Dedekind. Dans ce TER, on se contente de donner une définition et une formule simple.

**Définition .45.** Soit  $c, d \in \mathbb{Z}$  tels que  $(c, d) = 1$  et  $c \neq 0$ . Nous définissons la somme de Dedekind  $s(d, c)$

$$s(d, c) := \sum_{k=1}^{|c|} \left( \left( \frac{k}{c} \right) \right) \left( \left( \frac{kd}{c} \right) \right) \tag{28}$$

où

$$((x)) := \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

et par définition  $s(0, 1) = 0$

$s(d, c)$  possède les propriétés suivantes

1.  $s(d, c)$  ne dépend que de  $d \bmod c$
2.  $6cs(d, c) \in \mathbb{Z}$
3. **(loi de réciprocité de sommes de Dedekind)**

Soit  $c, d > 0$  deux entiers premiers entre eux. Alors

$$s(d, c) + s(c, d) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{c} + \frac{c}{d} + \frac{1}{cd} \right) \quad (29)$$

Pour voir le code en Java, allez sur [1].

**Remarque .46.** Soient  $n_A$  un entier,  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ , qui ne dépend que de la classe de conjugaison de  $A$  i.e.  $n_{BAB^{-1}} = n_A$ ,  $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$ .

**Théorème .47.** *Dedekind*

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ ,  $c > 0$ . Alors

$$n_A = \frac{a+d}{c} - 3 - 12s(d, c) \quad (30)$$

Notre objectif pour la suite est de comparer la fonction L construite dans l'article [3] de Zagier avec la fonction zêta

$$\zeta(M, s) = N(M)^s \sum_{\substack{\xi \in M/V \\ \xi \gg 0}} \frac{1}{N(\xi)^s}$$

de l'article [4] de Zagier. Pour cela, il faut bien détailler ce qui a été construit dans [3]. Nous souhaitons appliquer la formule limite de Kronecker à des corps quadratiques réels. On verra qu'il existe une relation géométrique forte entre deux corps quadratiques imaginaires de discriminants  $d$  et  $d'$  et un corps quadratique réel de discriminant  $dd'$ .

## 5.2 Formule limite de Kronecker

Considérons une forme quadratique définie positive

$$Q(m, n) = am^2 + 2bmn + cn^2 \quad (31)$$

où  $a, c > 0$ ,  $d = ac - b^2 > 0$ . Nous allons alors étudier la fonction zêta associée à  $Q(u, v)$

$$\zeta_Q(s) = \sum'_{m,n} \frac{1}{Q(m, n)^s} \quad (32)$$

où  $\sum'$  indique une sommation sur toute paire d'entier  $(m, n)$  sauf  $(0, 0)$ .

Comme  $Q(m, n) = Q(-m, -n)$ , on obtient que

$$\zeta_Q(s) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (Q(m, 0))^{-s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (Q(m, n))^{-s} \quad (33)$$

d'où

$$\begin{aligned} Q(m, n) &= a\left(m + \frac{b}{a}n\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)n^2 \\ &= a\left(m + \frac{b}{a}n\right)^2 + \frac{d}{a}n^2 \\ &= a\left(m + \frac{b + \sqrt{-d}}{a}n\right)\left(m + \frac{b - \sqrt{-d}}{a}n\right) \\ &= a(m + zn)(m + \bar{z}n) \end{aligned}$$

où  $\arg(\sqrt{-d}) = \frac{\pi}{2}$ ,  $z = \frac{b + \sqrt{-d}}{a} = x + iy$  avec  $y > 0$ .

Nous pouvons alors normaliser  $Q$  i.e. son discriminant  $d=1$ . Si

$$Q_1(m, n) = \frac{1}{\sqrt{d}}(am^2 + 2bmn + cn^2) = a_1m^2 + 2b_1mn + c_1n^2$$

Alors  $\zeta_{Q_1}(s) = d^{\frac{s}{2}}\zeta_Q(s)$  et  $a_1c_1 - b_1^2 = 1$ .  $d^{\frac{s}{2}}$  est une fonction entière en  $s$ , ainsi, pour étudier  $\zeta_Q(s)$ , il suffit de considérer  $\zeta_{Q_1}(s)$ . Nous avons alors  $a = \frac{1}{y}$  et

$$Q(m, n) = \frac{1}{y} |m + zn|^2 \quad (34)$$

Nous avons vu que  $z = x + iy$  avec  $y > 0$  donc on note  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$  le demi-plan de Poincaré.

Soit  $z \in \mathbb{H}$ ,  $z = x + iy$ , nous sommes ramenés à regarder la fonction

$$f(s, z) = \sum'_{m,n} \frac{y}{|m + nz|^{2s}}, \Re s > 1 \quad (35)$$

En tant que fonction en  $s$  peut être prolongée comme fonction méromorphe sur tout  $\mathbb{C}$  avec un pôle simple en  $s=1$ . Le lecteur peut regarder le cours [1] qui présente une solution similaire.

### **Théorème .48.** *Kronecker*

Pour  $z \in \mathbb{H}$ , nous avons

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left( \zeta_Q(s) - \frac{\pi}{s-1} \right) = 2\pi(\gamma - \log 2 - \log(\sqrt{y} |\eta(z)^2|)) \quad (36)$$

où  $\eta(z) = e^{\frac{\pi iz}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi imz})$ . Pour plus de détails, voir [2] de Siegel.

## 5.3 Théorème de Meyer

Soit

$$A \in SL_2(\mathbb{Z}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, c > 0, |a + d| > 2$$

une matrice hyperbolique ayant deux points fixes  $\omega, \omega'$  i.e. deux racines de  $AX = X$ . Nous pouvons supposer que  $\omega < \omega'$ . On note  $\Gamma$  le demi-cercle de  $\mathbb{H}$  d'extrémités  $\omega$  et  $\omega'$ . La transformation  $z \rightarrow Az$  i.e.  $z \rightarrow (az + b)(cz + d)^{-1}$  est  $\Gamma$ -invariant. Soit  $z_0 \in \Gamma$  et  $z_0^* = Az_0$  l'intégrale par rapport au chemin de source  $z_0$  et de but  $z_0^*$  à l'intérieur de  $\Gamma$

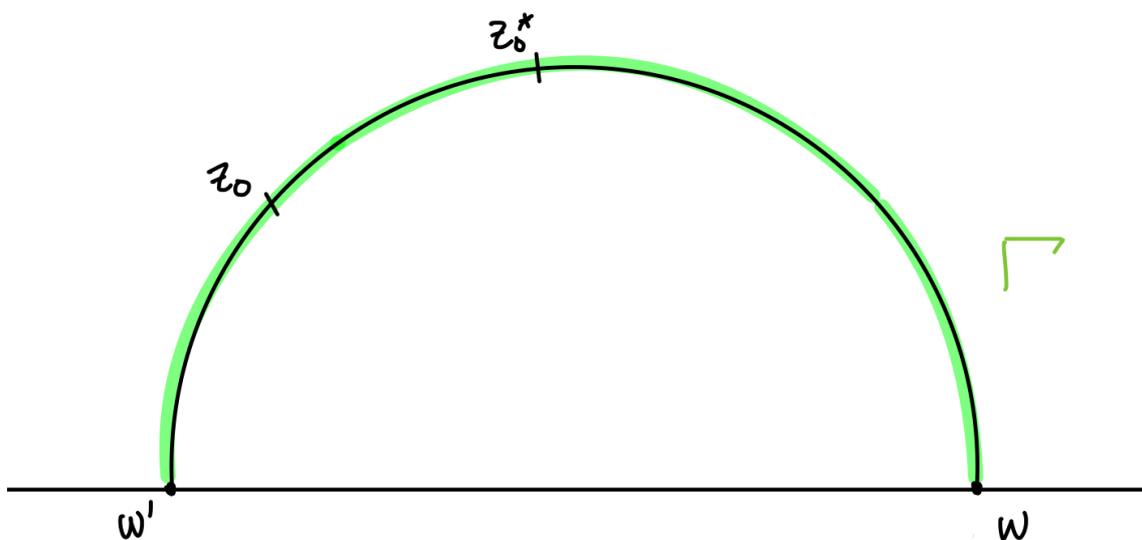


FIGURE 4 – Transformation hyperbolique

$$I(A, s) = \int_{z_0}^{z_0^*} \frac{\partial}{\partial z} f(s, z) dz \quad (37)$$

ne dépend pas du choix de  $z_0^*$ . Et

$$I(BAB^{-1}, s) = I(A, s) \quad (38)$$

Parce que  $\forall z \in \mathbb{H}$ ,  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$   $f(s, Az) = f(s, z)$  et que  $\frac{\partial}{\partial z}$  est  $A$ -invariant.

Puisque la homothétie  $f(s, z) \rightarrow f(s, z) - \frac{\pi}{s-1}$  donne une intégrale inchangée pour  $I(A, s)$ ,  $I(A, s)$  est alors une fonction holomorphe en  $s$ . Par la formule limite de Kronecker et l'équation 30 de Dedekind, nous avons

**Théorème .49.** *Meyer*

Soit

$$A \in SL_2(\mathbb{Z}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, c > 0, |a + d| > 2$$

alors

$$I(A, 1) = \frac{\pi^2}{6i} n_A \quad (39)$$

**Définition .50.** Deux couples  $(M, V)$  et  $(M', V')$  sont dits semblables si  $M' = \alpha M$  pour  $\alpha \neq 0$ .

Il existe en fait une relation biunivoque entre les classes de conjugaison de matrices hyperboliques  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  et les classes de similitudes de tous les couples  $(M, V)$ ,  $M$  un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang 2 et  $V$  comme nous avons définis avant.

Nous rappelons que  $M = \mathbb{Z}A_k + \mathbb{Z}A_{k-1}$  venant de 5 d'où  $\epsilon M = M$  avec  $\epsilon^{-1} = \frac{1}{w_1 w_2 \dots w_r}$  de 4.2. Ainsi  $V$  agit sur  $M$  par multiplication.

Soit  $(M, V)$  un couple vérifiant les conditions précédentes, soit  $(\beta_1, \beta_2)$  une base orientée de  $M$  et  $\epsilon > 1$  un générateur de  $V$ . Nous définissons  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice hyperbolique qui vérifie

$$\epsilon \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Nous pouvons poser sans souci  $\beta_1 = w, \beta_2 = 1$  avec  $w$  défini dans 5.3.

Ainsi, soit  $M = \mathbb{Z} + w\mathbb{Z}$ , à un couple  $(M, V)$ , on lui associe une fonction  $L$

$$L_{M, V}(s) = \sum_{\beta \in M/V} \frac{\text{sign}(N(\beta))}{|N(\beta)|^s} \quad (41)$$

où  $\sum$  ' signifie que l'on fait une sommation sur  $\beta \neq 0$ . Cette sommation s'étend sur toutes les orbites de  $M \setminus \{0\}$  modulo  $V$ .

Il est cependant difficile d'étudier  $L_{M, V}$  car nous sommes obligés de diviser par l'action de  $V$  au lieu d'étendre la sommation directement sur tout le module  $M$  comme dans le cas des corps quadratiques imaginaires déjà étudié par Kronecker.

On va admettre le résultat suivant réalisé par Meyer avec une méthode de Hecke

$$D_M^{s/2} L_{M, v}(s) = 2i \frac{\Gamma(s)}{\Gamma^2(\frac{s+1}{2})} I(A, s) \quad (42)$$

où  $D_M$  est le discriminant de  $M$ . En combinant avec le théorème .49, nous avons

**Théorème .51.** *Soient  $K$  un corps quadratique,  $(M, V)$  un couple défini comme avant ; alors*

$$L_{M, V}(1) = \frac{\pi^2}{2\sqrt{D_M}} n_A$$

$$L_{M, V}(0) = \frac{n_A}{3}$$

où  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  décrit l'action de  $\epsilon \in V$  sur  $M$ .

Pour résoudre le problème des fonctions  $L$  sur des corps quadratiques réels, Zagier propose dans son article de passer par une décomposition du discriminant en deux discriminants négatifs associés à des corps quadratiques imaginaires. Ce qui est plus facile à déterminer. Mais bien sûr, le raisonnement n'est pas trivial. Nous allons suivre les articles [2] et [3].

## 5.4 Théorème de Kronecker

Soit  $K$  un corps quadratique réel avec l'unité fondamentale qui est totalement positive.

**Remarque .52.** PARI/GP est un outil informatique pour montrer si l'unité fondamentale est totalement positive.

```
K = bnfinit(x^2 - 3, 1); \\ build the quadratic field
lift(K.fu) \\ extract a fundamental unit of K
```

**Définition .53.** Caractère de Hecke

Soit  $\chi$  un caractère sur les idéaux de  $K$  tel que

$$\begin{aligned} \chi: cl_K^+ &\rightarrow \mathbb{C}^\times \\ (\alpha) &\mapsto \text{sign}(N(\alpha)) \end{aligned}$$

Nous pouvons décomposer la fonction  $L(s, \chi)$  associée à  $\chi$  :

$$L(s, \chi) = \sum_A \sum_{\mathfrak{a} \in A} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} \quad (43)$$

On définit

$$\zeta(s, A) = \sum_{\mathfrak{a} \in A} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} \quad (44)$$

avec  $A$  qui parcourt toutes les classes d'idéaux de  $K$  au sens large.

Fixons une classe  $A$ , soit  $\mathfrak{a}_0 \in A^{-1}$ . Alors

$$\sum_{\mathfrak{a} \in A} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \overline{\chi(\mathfrak{a}_0)} N(\mathfrak{a}_0)^s \sum_{\mathfrak{a} \in A} \frac{\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_0)}{N(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_0)^s} \quad (45)$$

Nous remarquons que  $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_0$  devient en fait principal. Donc  $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_0$  parcourt tous idéaux principaux  $(\beta)$  avec  $(\beta)$  divisible par  $\mathfrak{a}_0$ . Et on rappelle que contenir c'est diviser, d'où  $\beta \in \mathfrak{a}_0$ . Deux éléments  $\beta \in K$  définissent un même idéal  $(\beta)$  s'ils diffèrent d'une unité. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathfrak{a} \in A} \frac{\chi(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_0)}{N(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_0)^s} &= \sum_{\mathfrak{a}_0 | (\beta)} \frac{\chi((\beta))}{N((\beta))^s} \\
&= \sum_{\mathfrak{a}_0 | (\beta)} \frac{\text{sign}(N(\beta))}{N((\beta))^s} \\
&= \frac{1}{2} L_{M,V}(s)
\end{aligned}$$

où  $M = \mathfrak{a}_0$ ,  $V$  le groupe de toutes les unités totalement positives de  $K$ .

Pour  $s=1$ , par le théorème de Meyer

$$L(s, \chi) = \frac{\pi^2}{6\sqrt{D}} \sum_A \overline{\chi(\mathfrak{a}_0)} n(\mathfrak{a}_0) \quad (46)$$

où, pour chaque  $A$ ,  $\mathfrak{a}_0 \in A^{-1}$  et  $n(\mathfrak{a}_0)$  est donné par  $n_A$  avec  $A$  qui décrit l'action de l'unité fondamentale sur une base de  $\mathfrak{a}_0$ .

**Remarque .54.** Comme la fonction zêta de Dedekind  $\zeta_K(s) = \sum_A \zeta(s, A)$  définie dans 44, nous avons

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_K(s) = \sum_A \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta(s, A) = \kappa h(D) \quad (47)$$

où

$$\kappa := \begin{cases} \frac{2\pi}{w_D \sqrt{-D}} & \text{si } K \text{ imaginaire} \\ \frac{2 \log(\epsilon_D)}{\sqrt{D}} & \text{si } K \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

où  $w_D$  est le nombre de racines de l'unité,  $h(D)$  le nombre de classe de  $K$ , et  $\epsilon_D$  l'unité fondamentale de  $K$ .

Un résultat classique tombe directement

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L_d(s) \quad (48)$$

où

$$L_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s}$$

où  $\left(\frac{d}{n}\right)$  est le symbole de Kronecker.

**Rappel :**

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \zeta_K(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) L_d(s) = \lim_{s \rightarrow 1} L_d(s) = L_d(1) \quad (49)$$

Supposons maintenant que  $\chi$  est réel alors

$$\begin{aligned}
\chi: cl_K^+ &\rightarrow \{\pm 1\} \\
(\alpha) &\mapsto \text{sign}(N(\alpha))
\end{aligned}$$

Pour tous  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  idéaux,  $\chi(\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}) = \chi(\mathfrak{B})$ ; On appelle  $\chi$  un caractère de genre que nous allons expliquer en se référant à [2] de Siegel.

**Proposition .55.** *Tout discriminant  $D$  s'écrit de façon unique comme produit de discriminants premiers.*

*Démonstration.* Voir Proposition 9 de [2]. □

Introduisons maintenant les caractères de genre  $\chi$ . Soit  $d = P_1P_2 \cdots P_k$  où  $P_i$  est premier. Soit  $d_1$  le produit des facteurs  $P_1, P_2, \dots, P_k$ . Alors,  $d_1$  reste un discriminant d'un corps de nombres et  $d_1 \mid d$ . Posons  $d = d_1d_2$ , du coup  $d_2$  est aussi un discriminant.

Pour tout idéal  $\mathfrak{p}$  qui ne divise pas  $(d)$ , on définit :

$$\chi(\mathfrak{p}) = \chi_{d_1}(\mathfrak{p}) = \left( \frac{d_1}{N(\mathfrak{p})} \right) \quad (50)$$

En particulier,

$$\chi_{d_2}(\mathfrak{p}) = \left( \frac{d_2}{N(\mathfrak{p})} \right) = \left( \frac{d_1}{N(\mathfrak{p})} \right) \quad (51)$$

En effet, comme  $\mathfrak{p} \nmid d$ , on se retrouve dans les cas suivants

1.  $\mathfrak{p}\mathfrak{p}' = (p), N(\mathfrak{p}) = p$
2.  $\mathfrak{p} = (p), N(\mathfrak{p}) = p^2$

Dans le cas 1 :

$$\left( \frac{d}{p} \right) = 1 = \left( \frac{d_1}{N(\mathfrak{p})} \right) \left( \frac{d_2}{N(\mathfrak{p})} \right) \quad (52)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{d_1}{N(\mathfrak{p})} \right) = \left( \frac{d_2}{N(\mathfrak{p})} \right).$$

Dans le cas 2 :

$$\left( \frac{d_1}{N(\mathfrak{p})} \right) \left( \frac{d_2}{N(\mathfrak{p})} \right) = \left( \frac{d}{p^2} \right) = 1 \quad (53)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{d_1}{N(\mathfrak{p})} \right) = \left( \frac{d_2}{N(\mathfrak{p})} \right).$$

Il reste le cas exceptionnel à traiter qui est  $\mathfrak{p} \mid d$ , comme l'un des symboles :  $\left( \frac{d_1}{N(\mathfrak{p})} \right), \left( \frac{d_2}{N(\mathfrak{p})} \right)$  vaut zéro, on définit  $\chi(\mathfrak{p})$  la valeur non nulle entre  $\left( \frac{d_1}{N(\mathfrak{p})} \right)$  et  $\left( \frac{d_2}{N(\mathfrak{p})} \right)$ . Donc  $\chi(\mathfrak{p}) = \pm 1$ . Nous pouvons étendre le caractère sur tous les idéaux de  $K$  comme le symbole de Kronecker.

On appelle caractère de genre le caractère que nous définissons ci-dessus. Reprenons les mêmes notations que dans la définition .21.

Les idéaux premiers de  $K$  sont distribués de la façon suivante

1.  $\mathfrak{p} = (p), \left( \frac{d}{p} \right) = -1, N(\mathfrak{p}) = p^2$

$$2. \mathfrak{p}\mathfrak{p}' = (p), \left(\frac{d}{p}\right) = 1, N(\mathfrak{p}) = p$$

$$3. \mathfrak{p}^2 = (p), \left(\frac{d}{p}\right) = 0, N(\mathfrak{p}) = p$$

Traitons cas par cas.

Dans le **cas 1**

$$\left(\frac{d}{p}\right) = -1 = \left(\frac{d_1}{p}\right) \left(\frac{d_2}{p}\right)$$

un entre  $\left(\frac{d_1}{p}\right), \left(\frac{d_2}{p}\right)$  vaut 1 et l'autre -1.

$$\begin{aligned} \prod_{\mathfrak{p}|(p)} (1 - \chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} &= (1 - p^{-2s})^{-1} \\ &= (1 - p^{-s})^{-1}(1 + p^{-s})^{-1} \\ &= \left(1 - \left(\frac{d_1}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1} \left(1 - \left(\frac{d_2}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Dans le **cas 2**

$$\begin{aligned} \prod_{\mathfrak{p}|(p)} (1 - \chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} &= \left(1 - \left(\frac{d_1}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1} \left(1 - \left(\frac{d_1}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1} \\ &= \left(1 - \left(\frac{d_1}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1} \left(1 - \left(\frac{d_2}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Dans le **cas 3**, supposons que  $p \mid d_2$ , alors  $\left(\frac{d_2}{p}\right) = 0$  et

$$\prod_{\mathfrak{p}|(p)} (1 - \chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} = \left(1 - \left(\frac{d_1}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1} \left(1 - \left(\frac{d_2}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1}$$

D'où

$$\begin{aligned} L_K(s, \chi) &= \prod_p \prod_{\mathfrak{p}|(p)} (1 - \chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} \\ &= \prod_p \left(1 - \left(\frac{d_1}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1} \left(1 - \left(\frac{d_2}{p}\right)p^{-s}\right)^{-1} \\ &= L_{d_1}(s)L_{d_2}(s) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant.

**Théorème .56.** *Soit  $K$  un corps quadratique de discriminant  $d = d_1d_2$ . Soit  $\chi$  un caractère de genre associé à la décomposition de  $d$ . Nous avons*

$$L_K(s, \chi) = L_{d_1}(s)L_{d_2}(s) \tag{54}$$

**Exemple 4.** Le cas trivial :  $d = 1 \cdot d$ , alors  $L_{d_1}(s) = \zeta(s)$  et  $L_{d_2}(s) = L_d(s)$

**Corollaire .57.** En sachant que  $L_{d_i}(1) = \frac{\pi}{\sqrt{|d_i|}}h(d_i)$ . Soit  $\chi$  vérifiant .53, supposons que  $d_1, d_2 < 0$  et avec les conventions  $h(-3) = \frac{1}{3}, h(-4) = \frac{1}{2}$ , nous avons

$$h(d_1)h(d_2) = \frac{1}{6} \sum_A \chi(\mathfrak{A}_0)n(\mathfrak{A}_0) \quad (55)$$

**Exemple 5.** Soit  $p \equiv 3 \pmod{4}$  un nombre premier et  $h(p) = 1$ . Soit  $c, d > 0$  la solution minimale de l'équation de Pell-Fermat

$$d^2 - cp = 1$$

(on peut le trouver avec PARI-GP par exemple).

Soit  $n = \frac{2d}{c} - 3 - 12s(d, c)$ . Alors nous avons  $h(-p) = \frac{1}{3}n$ . Il faut utiliser le théorème précédent, posons  $D = 4p, d_1 = -4, d_2 = -p$  et  $\epsilon = d + c\sqrt{p}$ . Comme le groupe des classes de  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$  est 1, on choisit  $\mathfrak{A}$  le module engendré par  $\sqrt{p}$  et 1, on a alors  $A = \begin{pmatrix} d & cp \\ c & d \end{pmatrix}$  d'où  $n = n_A$ . Pour une expérimentation numérique prenons  $p = 31$  alors  $c = 273, d = 1520, s(1520, 273) = \frac{-59}{819}$  et  $n = 9 = 3h(-31), \Rightarrow h(-31) = 3$

Voici le code pour retrouver la valeur de n en utilisant PARI/GP

$$((2*1520)/273) - 3 - 12*sumdedekind(1520, 273)$$

## 5.5 Fractions continues

Dans cette partie nous souhaitons retrouver la valeur  $n_A$  en utilisant la théorie des fractions continues.

**Théorème .58.** Pour  $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{Z}$  et

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad (56)$$

Alors nous avons

$$n_A = \sum_{k=1}^r (b_k - 3) \quad (57)$$

On remarque cette formule est très similaire à l'équation 23 qui est

$$\zeta(M, 0) = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^r (b_k - 3) \quad (58)$$

Ce n'est pas une coïncidence puisque la matrice A définit l'action de V sur M.

*Démonstration.* Nous allons raisonner par récurrence sur  $r$ .

**Initialisation :** Pour  $r=1$

$$n_A = \frac{a+d}{c} - 3 - 12s(d, c) = \frac{b_1+0}{1} - 3 - 12s(0, 1) = b_1 - 3$$

Supposons vrai au rang  $r$ , soit  $A$  comme dans 56 et  $b_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $A' = \begin{pmatrix} b_0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$ .

Par multiplication,  $A' = \begin{pmatrix} b_0 a - c & b_0 b - d \\ a & b \end{pmatrix}$ . et  $n_{A'} = \frac{b_0 a - c + b}{a} - 3 - 12s(b, a)$  comme  $A \in SL_2(\mathbb{Z})$  alors  $\det(A) = 1$ , d'où

$$\begin{aligned} s(b, a) &= s(-c, a) = s(c, a) \\ &= s(a, c) - \frac{c^2 + a^2 + 1}{12ac} + \frac{1}{4} \\ &= s(d, c) - \frac{c^2 + a^2 + 1}{12ac} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Par  $s(d, c) = s(d', c)$ ,  $dd' \equiv 1 \pmod{c}$  et la réciprocité pour  $s(d, c)$ . Alors

$$\begin{aligned} n_{A'} &= b_0 - 3 + \frac{b-c}{a} - 12s(d, c) + \frac{c^2 + a^2 + 1}{ac} - 3 \\ &= b_0 - 3 + \frac{a+d}{c} - 3 - 12s(d, c) \\ &= b_0 - 3 + n_A \\ &= \sum_{k=0}^r (b_k - 3) \end{aligned}$$

□

**Exemple 6.** Pour  $p=31$ ,  $h(p) = 1$

$$\sqrt{31} = 6 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{7 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2 - \dots}}}}}}}}$$

$r = 8, b_1 = 3, b_2 = 2, b_3 = 2, b_4 = 7, b_5 = 2, b_6 = 2, b_7 = 3, b_8 = 12, n_A = 9 = 3h(-31) \Rightarrow h(-31) = 3$ .

5.6 Liens entre  $\zeta(M, s)$  et  $L_{M,V}(s)$ 

Par définition

$$L_{M,V}(s) = \sum_{\alpha \in M/V} \frac{\text{sign}(N(\alpha))}{|N(\alpha)|^s} \quad (59)$$

Or nous pouvons décomposer  $L(M, s)$  en

$$L_{M,V}(s) = \sum_{\alpha \in M/V} \frac{\text{sign}(N(\alpha))}{|N(\alpha)|^s} = 2 \sum_{\substack{\alpha \in M/V \\ \alpha \gg 0 \\ \alpha \ll 0}} \frac{1}{N(\alpha)^s} - 2 \sum_{\substack{\alpha \in M/V \\ \alpha < > 0 \\ \alpha > < 0}} \frac{1}{N(\alpha)^s} \quad (60)$$

où

$$2 \sum_{\substack{\alpha \in M/V \\ \alpha \gg 0 \\ \alpha \ll 0}} \frac{1}{N(\alpha)^s} \quad (61)$$

se calcule à partir de 4.3. Et pour calculer

$$2 \sum_{\substack{\alpha \in M/V \\ \alpha < > 0 \\ \alpha > < 0}} \frac{1}{N(\alpha)^s} \quad (62)$$

Nous avons besoin de multiplier  $M$  par un scalaire adapté  $\lambda > 0$  tel que  $\lambda > < 0$ . Comme ça, on a  $M' = M(\lambda)$ . Alors 60 devient

$$L_{M,V}(s) = \sum_{\alpha \in M/V} \frac{\text{sign}(N(\alpha))}{|N(\alpha)|^s} = 2 \sum_{\substack{\alpha \in M/V \\ \alpha \gg 0 \\ \alpha \ll 0}} \frac{1}{N(\alpha)^s} - 2 \sum_{\substack{\beta \in M'/U \\ \beta \gg 0 \\ \beta \ll 0}} \frac{1}{N(\beta)^s} \quad (63)$$

où  $U = \{\xi \in M' | \xi \gg 0\}$ .

## Références

- [1] Dépôt git pour voir les codes. [https://gitlab.com/afonsoli225/ter\\_zeta](https://gitlab.com/afonsoli225/ter_zeta).
- [2] C. Siegel. Lectures on advanced analytic number theory. 01 1965.
- [3] Don Zagier. *Nombres de classes et fractions continues*. 1975.
- [4] Don Zagier. *Valeurs des fonctions zêta des corps quadratiques réels aux entiers négatifs*. 1977.