Corrigé de la feuille 1 - Nombres complexes, fonctions numériques

(L'essentiel des exercices ci-après est extrait du manuel *Mathématiques, Spécialités du groupement A*, Nathan Technique, 2002.)

Pour me contacter : Andreas.Hartmann@math.u-bordeaux1.fr (merci de me signaler les erreurs).

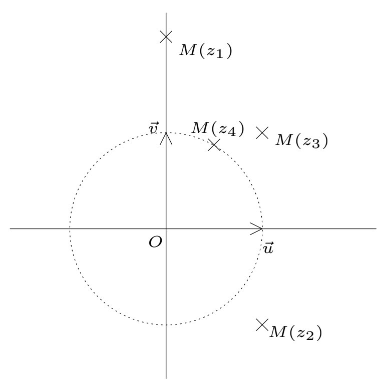
Nombres complexes

Exercice 1. *Ecrire sous la forme algébrique $a+bj$, les nombres complexes :* a) $z_1 = 2j$, b) $z_2 = 11-7j$, c) $z_3 = 1-j$, d) $z_4 = \frac{6}{13} + \frac{7}{13}j$.

Exercice 2. *Donner le module et un argument des nombres complexes :* a) $|z_1| = 2$, $\arg z_1 = \pi/3 + 2k\pi$, b) $|z_2| = 2$, $\arg z_2 = 4\pi/3 + 2k\pi$, c) $|z_3| = 2$, $\arg z_3 = -\pi/4 + 2k\pi$, d) $|z_4| = 2$, $\arg z_4 = -\pi/2$.

Exercice 3. *Ecrire sous forme algébrique $a+bj$ les nombre complexes de module ρ et d'argument θ :* a) $z_1 = 2(\sqrt{3}/2+j/2) = \sqrt{3}+j$, b) $z_2 = \sqrt{2}(\sqrt{2}/2+j\sqrt{2}/2) = 1+\sqrt{2}j$, c) $z_3 = 2(-1/2+j\sqrt{3}/2) = -1+\sqrt{3}j$, d) $z_4 = 4(\sqrt{3}/2+j/2) = 2\sqrt{3}+2j$.

Exercice 4. *Dans un repère orthonormal du plan $(O;\vec{u},\vec{v})$ placer les point M_i d'affixe z_i : a) $z_1 = 2j$, b) $z_2 = 1-j$, c) $z_3 = \overline{z}_2$, d) $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$.*



Exercice 5. *Dans $\mathbb{C}$, donner l'ensemble des solutions des équations :*

a) $z^2 = -3-4j$ — méthode algébrique : soit $z = x+yj$, alors $z^2 = (x^2-y^2)+2jxy = -3-4j$, d'où $x^2-y^2 = -3$(*) et $2xy = -4$(**). Or, $z^2 = -3-4j$ n'est pas réel, donc $x \neq 0$ (si x était égal à zéro, alors z serait imaginaire pure et donc son carré serait réel). On obtient donc d'après (**) $y = -2/x$ que l'on peut réinjecter dans (*). Par conséquent, $x^2 - 4/x^2 = -3$ ou encore $X^2+3X-4 = 0$ avec $X = x^2$ et dont les racines sont $X = 1$ et $X = -4$. Comme x est un réel, seul $X = 1$ peut être solution. On trouve donc $x = 1$ ou $x = -1$, et les valeurs correspondantes pour y d'après (**) sont : si $x = 1$ on a $y = -2$ et si $x = -1$ on a $y = 2$, c'est-à-dire $S = \{1-2j, -1+2j\}$;

b) $z^2 - z + 1 = 0$ est équivalent à $(z-1/2)^2 + 1 - 1/4 = 0$, c'est-à-dire à $(z-1/2)^2 = -3/4$. Les racines de $-3/4$ sont $\frac{\sqrt{3}}{2}j$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}j$, d'où $S = \{\frac{1+\sqrt{3}}{2}j, \frac{1-\sqrt{3}}{2}j\}$;

c) $z^2 + 2jz - 5 = 0$ est équivalent à $(z+j)^2 - 5 - j^2 = 0$, c'est-à-dire à $(z+j)^2 = 4$. Les racines de 4 sont 2 et -2, donc $S = \{-j+2, -j-2\}$.

d) $z^2 + (3-2j)z - 6j = 0$ est équivalent à $(z+(3-2j)/2)^2 - 6j - ((3-2j)/2)^2 = 0$, c'est-à-dire $(z+\frac{3-2j}{2})^2 = 5/4+3j$. Soit $(u+vj)^2 = 5/4+3j$, alors $u^2-v^2 = 5/4$ et $2uv = 3$. On obtient (comme à l'exemple a) ci-dessus), $u^2 = 9/4$ comme seule solution, et donc $u = 3/2$ ou $u = -3/2$. Comme $2uv = 3$ on obtient si $u = 3/2$ alors $v = 1$ et si $u = -3/2$ alors $v = -1$. Finalement $S = \{-\frac{3-2j}{2} + \frac{3+2j}{2}, -\frac{3-2j}{2} - \frac{3+2j}{2}\} = \{2j, -3\}$

Exercice 6. *Dans $\mathbb{C}$, donner l'ensemble des solutions du système d'équations*

$$\begin{cases} 2z_1 + z_2 = 4 \\ 2j\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = 0. \end{cases}$$

Posons $z_1 = a+bj$, $z_2 = u+vj$. Alors on obtient $(2a+u)+(2b+v)j = 4$ et $(2b+u)+(2a-v)j = 0$, et donc un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues $2a+u = 4$ (1), $2b+v = 0$ (2), $2b+u = 0$ (3) et $2a - v = 0$ (4). De (1) et (4) on déduit $u + v = 4$ et de (2) et (3) on déduit $u - v = 0$. Donc $u = v = 2$. Donc $b = -1$ et $a = 1$. Finalement $z_1 = 1 - j$ et $z_2 = 2 + 2j$.

Exercice 7. *A l'aide des formules d'Euler, retrouver les formules trigonométriques suivantes :*

a) $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$: $\cos^2 a = (e^{ja} + e^{-ja})^2/4 = \frac{e^{2ja}+2+e^{-2ja}}{4} = \frac{1+\frac{e^{2ja}+e^{-2ja}}{2}}{2} = \frac{1+\cos(2a)}{2}$.

b) $\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$ (c'est pareil).

Exercice 8. *A l'aide des formules d'Euler, linéariser :*

a) $\cos 3x \cos 5x = \frac{e^{3jx}+e^{-3jx}}{2}\frac{e^{5jx}+e^{-5jx}}{2} = \frac{e^{8jx}+e^{2jx}+e^{-2jx}+e^{-8xj}}{4} = \frac{1}{2}(\cos(8x) + \cos(2x))$,

b) $\sin 2x \sin 3x = \frac{e^{2xj}-e^{-2xj}}{2j}\frac{e^{3xj}-e^{-3xj}}{2j} = -\frac{e^{5xj}-e^{xj}-e^{-xj}+e^{-5xj}}{4} = -\frac{1}{2}(\cos(5x) - \cos x)$,

c) (en utilisant les résultats du cours) $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (\frac{1+\cos(2x)}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos^2(2x)}{4}$. Or $\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$. Donc $\cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{8} + \frac{\cos 4x}{8} = \frac{3}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(4x)}{8}$.

Exercice 9. *Soient $z_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}j)$ et $z_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}j)$. Comparer $(z_1)^2$ à z_2. Comparer $(z_2)^2$ à z_1. Calculer $1 + z_1 + z_2$.*

$(z_1)^2 = z_2$, $(z_2)^2 = z_1$, $1 + z_1 + z_2 = 0$ (1, z_1 et z_2 sont les racines troisième de l'unité).

Exercice 10. *Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $Z = \dfrac{z + 2j}{1 - zj}$.*

1. Déterminer les parties réelles et imaginaires de Z.

Soit $z = a + bj$, alors $Z = \frac{a+(2+b)j}{(1+b)-aj} = \frac{-a}{(1+b)^2+a^2} + (1 + \frac{b+1}{(1+b)^2+a^2})j$. Donc $\operatorname{Re} Z = \frac{-a}{(1+b)^2+a^2}$ et $\operatorname{Im} Z = 1 + \frac{b+1}{(1+b)^2+a^2}$

2. *Déterminer l'ensemble des point M d'affixe z tels que a) Z est réel,*

On cherche z tel que $\operatorname{Im} Z = 0$ c'est-à-dire $1+\frac{b+1}{(1+b)^2+a^2} = 0$, ou encore $(1+b)^2+(1+b)+a^2 = 0$. Posons $\beta = 1 + b$, alors on cherche a, β tels que $\beta^2 + \beta + a^2 = 0$, ce qui peut s'écrire $(\beta + 1/2)^2 + a^2 = (1/2)^2$, et donc $(b + 3/2)^2 + a^2 = (1/2)^2$. On reconnaît l'équation du cercle de centre $M(1/2, 3/2)$ et de rayon $1/2$.

Remarque : Les applications $z \longmapsto \frac{a+bz}{c+dz}$ sont appelées homographies. Elles envoient les droites et les cercles du plan sur des droites et des cercles. Elles sont des automorphismes (de la sphère de Riemann $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$) si $ad-bc \neq 0$. Dans ce cas, elles sont donc inversibles, et leur inverse est à nouveau une homographie. En l'occurence, l'image de la droite réelle par l'application réciproque de l'application $z \longmapsto \frac{z+2j}{1-zj}$ est donc un cercle ou un cercle (ici un cercle).

b) *Z est imaginaire pur.*

On cherche z tel que $\operatorname{Re} z = 0$, c'est-à-dire, $\frac{-a}{(1+b)^2+a^2} = 0$ ce qui se produit si et seulement si $a = 0$, autrement dit l'ensemble des points d'affixe z tel que $\operatorname{Re} Z = 0$ est l'axe imaginaire (on est donc dans le cas de figure où l'image réciproque d'une droite est une droite).

Exercice 11. *Soient $a = 2(1 + e^{j\frac{\pi}{6}})$, $b = 2(1 + e^{-j\frac{\pi}{6}})$ et $c = 1 - j\sqrt{3}$.*

1. *Ecrire a et b sous forme algébrique.*

$a = 2(1+\cos(\pi/6)+j\sin(\pi/6)) = 2(1+\sqrt{3}/2+j/2) = (2+\sqrt{3})+j$, $b = 2(1+\sqrt{3}/2-j/2) = (2+\sqrt{3})-j$.

2. *Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$; A, B et C sont les points d'affixe a, b, c. Donner le module $a - 2$, de $b - 2$ et de $c - 2$. En déduire que A, B et C sont sur un même cercle que l'on déterminera.*

$|a - 2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$, $|b - 2| = \sqrt{3 + (-1)^2} = 2$, $|c - 2| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Les points A, B, C sont donc équidistant — de distance 2 — du point M d'affixe 2, et donc ils sont sur le cercle de centre $M(2)$ et de rayon 2. (On rappelle que le cercle $C(P, r)$ de centre P et de rayon r est par définition l'ensemble des points équidistants — de distance r — de P : $C(P, r) = \{M : MP = r\}$.)

3. *A', B', C' sont les points d'affixe $a-2$, $b-2$, $c-2$. Par quelle transformation géométrique passe-t-on de A' à A, de B' à B et de C' à C ?*

La transformation en question est une translation de vecteur $w\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (correspondant à la fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z-2$).

4. *Déterminer les coordonnées du centre de cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$ et donner son rayon.*

D'après la question précédente, A', B', C' sont les points d'affixes a', b', c' dont les modules sont tous égaux à 2. Donc, ces points sont équidistant — de distance 2 — à l'origine. On en déduit que A', B', C' sont sur le cercle de centre 0 et de rayon 2, ce qui veut dire que $C(O,2)$ est le cercle cironscrit au triangle $A'B'C'$.

Problème (d'après BTS). *La fonction de transfert d'un filtre, en régime harmonique, peut s'écrire*

$$T(\omega) = \alpha\frac{1+ja\omega}{1+jb\omega}$$

où $\alpha = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$, $a = R_1C$, $b = \alpha a$, $\omega \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < \alpha < 1$ (par construction !). Ici R_1 et R_2 sont les valeurs (en Ohms) de deux résistors, et C est la capacité (en Farads) d'un condensateur ; toutes ces valeurs sont donc strictement positives.

Le but du problème est d'ajuster R_2 et C pour obtenir un filtre dont les propriétés sont fixées connaisant R_1.

Partie A.

1. *Montrer que pour tout $\omega > 0$:*

$$T(\omega) = \alpha + (1-\alpha)\frac{1}{1-j\frac{1}{b\omega}}.$$

On a

$$\alpha + (1-\alpha)\frac{1}{1-j\frac{1}{b\omega}} = \frac{\alpha(1-j\frac{1}{b\omega}) + (1-\alpha)}{1-j\frac{1}{b\omega}} = \frac{-j\frac{\alpha}{b\omega}+1}{1-j\frac{1}{b\omega}} = \frac{1-j\frac{1}{a\omega}}{1-j\frac{1}{b\omega}}$$

(où nous avons utilisé $b = \alpha a$). En multipliant numérateur et dénominateur par $b\omega j$ on obtient

$$\frac{1-j\frac{1}{a\omega}}{1-j\frac{1}{b\omega}} = \frac{1-j\frac{1}{a\omega}}{1-j\frac{1}{b\omega}} \times \frac{b\omega j}{b\omega j} = \frac{jb\omega + \frac{b}{a}}{jb\omega+1} = \frac{\alpha + jb\omega}{1+jb\omega} = \alpha\frac{1+ja\omega}{1+jb\omega} = T(\omega).$$

2. *Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. Quel est l'ensemble Δ des points M d'affixe $z = 1-j\frac{1}{b\omega}$?*

Par les données du problème b est un nombre strictement positif. Lorsque ω parcourt les nombres strictement positifs, ce sera donc aussi le cas de $\frac{1}{b\omega}$. Donc on a $\Delta = \{1-yj : y > 0\}$.

3. *Soit la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & C \\ z & \longmapsto & f(z) = \alpha + (1-\alpha)\dfrac{1}{z}, \end{array}$$

et F la transformation ponctuelle associée qui à tout point M d'affixe z de $\mathcal{P}$ privé de O associe le point M' d'affixe $f(z)$.

a. *En utilisant les propriétés de la transformation $z \to \frac{1}{z}$ définir l'ensemble (C_1) des points M_1 d'affixe $\frac{1}{z}$ obtenu quand M décrit Δ.*

Soit $\tilde{\Delta}$ la droite définie par $\operatorname{Re} z = 1$ (qui porte donc la demi-droite Δ). Cette droite (qui n'est **pas** la droite réelle) est transformée par F en un cercle C_0. Ce cercle passe par le point $P_1(1)$, et par $P_0(0)$ (lorsque $y \to \infty$). Par symétrie, on peut constater que $[P_0P_1]$ est un diamètre du cercle C_0, dont le centre est donc $P(1/2)$ et le rayon est $1/2$. (Le lecteur pourra vérifier que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $|\frac{1}{1-yj} - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$; le seul point du cercle C_0 qui n'est pas atteint est le point P_0.) Finalement, Δ étant la partie de $\tilde{\Delta}$ contenue dans le demi-plan inférieur, et $f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ envoyant le demi-plan inférieur dans le demi-plan supérieur, l'ensemble C_1 est la moitié du cercle C_0 contenu dans le demi-plan supérieur (privé des point P_0 et P_1).

b. *Quelle est la transformation ponctuelle faisant passer de M_1 à M_2 d'affixe $(1-\alpha)\frac{1}{z}$? En déduire l'ensemble C_2 décrit par M_2 quand M décrit Δ.*

Cette transformation est une homothétie de centre 0 et de rapport $(1-\alpha)$. Elle transforme le cercle C_0 en un cercle $\tilde{C}_0$ de diamètre $[P_0P(1-\alpha)]$, c'est-à-dire un cercle de centre $P(\frac{1-\alpha}{2})$ et de rayon $\frac{1-\alpha}{2}$.

L'ensemble C_2 est alors la partie de $C(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2})$ contenue dans le demi-plan supérieur (privè de P_0 et de $P(\frac{1-\alpha}{2})$).

c. *Soit M' d'affixe $f(z) = \alpha + (1-\alpha)\frac{1}{z}$. Quelle est la transformation ponctuelle faisant passer de M_2 à M' ? En déduire l'ensemble (C') décrit par M' quand M décrit Δ.*

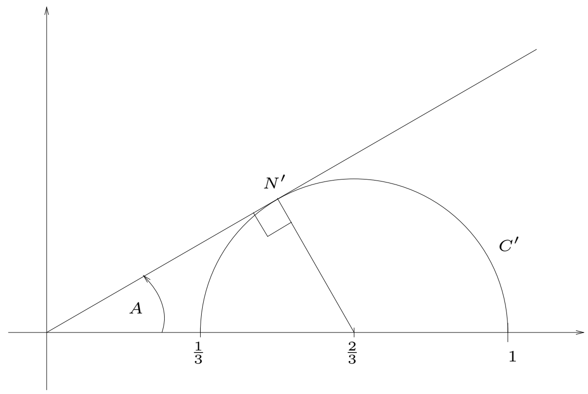
La transformation faisant passer M_2 à M' est la translation $u \longmapsto u+1$. L'ensemble C' est donc la partie du cercle $C(\alpha + \frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}) = C(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2})$ contenue dans le demi-plan supérieur.

4. *Soit θ l'argument de $T(\omega)$ tel que $\theta \in]0, \pi/2[$, déterminer graphiquement le point N' de (C') en lequel θ est maximum. On note A la valeur maximum de cet argument. Calculer $\sin(A)$ en fonction de α.*

La valeur maximum de cet argument est l'angle de droites entre la droite réelle $(O;\vec{u})$ et la tangente (d) à C' passant par l'origine O. Alors N' le point de rencontre entre C' et (d). Par construction, C' est la partie du cercle de centre $P(\frac{1+\alpha}{2})$ et de rayon $\frac{1-\alpha}{2}$ contenue dans le demi-plan supérieur. Le triangle $ON'P(\frac{1+\alpha}{2})$ est donc rectangle en N' (le lecteur pourra s'appuyer sur le dessin de la question suivante). Donc

$$\sin A = \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\frac{1+\alpha}{2}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

5. *Représenter ces ensembles dans le cas $\alpha = 1/3$, on prendra une unité graphique de 9cm.*



Partie B.

Dans cette partie on se propose de calculer les valeurs de C et de R_2 de sorte que $A = \pi/6$ pour une fréquence de 1kHz.

1. *De $A = \pi/6$, déduire la valeur correspondante de α, puis celle de R_2.*

On a $\sin A = 1/2$, et donc

$$\frac{1}{2} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

D'où $\alpha = \frac{1}{3}$. Comme $\alpha = R_2/(R_1+R_2)$, on a $3R_2 = R_1 + R_2$ et donc $R_2 = R_1/2$.

2. *En admettant que $\alpha = 1/3$, sur la figure de la partie A, construire le point N de Δ dont l'image par F est le point N'. Calculer la distance HN (H étant le point d'affixe 1). En déduire la valeur correspondante de b, puis celle de C.*

Construction de N : commençons par construire N'' sur C_1 qui est l'image réciproque de N' par l'application qui à M_1 de C_1 associe M' de $C(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2})$ (cette application est la composée des applications discutées au points 3a et 3b, c'est-à-dire l'application ponctuelle associée à l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $Z \longmapsto u = \alpha + (1-\alpha)Z$). La réciproque de cette application est donnée par $G(u) = \frac{u-\alpha}{1-\alpha} = \frac{u-1}{1-\alpha} + 1$. La transformation ponctuelle associée qui à tout point d'affixe u associe le point d'affixe $G(u)$ est alors l'homothétie de centre 1 et de rapport $\frac{1}{1-\alpha}$. Construisons l'image de N' sous cette homothétie. Pour cela il suffit de construire la droite passant par N' et le point $P(1)$ d'affixe 1. Elle rencontre C_1 en N''.

Or, nous savons que N'' est l'image sous l'application associée à l'application $\varphi : z \longmapsto \frac{1}{z}$ de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ qui est une involution, c'est-à-dire elle est égale à son inverse. Donc nous devons construire l'image de N'' sous l'application ponctuelle Φ associée à φ. Pour cela, soit Q le symétrique de N'' par rapport à la droite $(O;\vec{u})$. L'image de N'' par Φ est sur la demi-droite $[0Q)$ (et $OQ = 1/\|ON''\|^2$ — mais nous n'aurons pas besoin de cela). Comme on sait que N'' est sur le cercle C_1 image de Δ par Φ, on sait que l'image de N'' par Φ est aussi sur Δ de sorte que N est le point d'intersection de Δ et de $[OQ)$.

Calculs : écrivons l'affixe z' de N' sous forme exponentielle. Le triangle $ON'P(\frac{1+\alpha}{2}) = ON'P(\frac{2}{3})$ étant rectangle en N', nous pouvons calculer le module de z' à l'aide du théorème de Pythagore par $ON' = \sqrt{OP(\frac{2}{3})^2 - P(\frac{2}{3})N'^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}} = \sqrt{3}/3$. Donc $z' = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\pi/6}$. Ensuite z'', l'affixe associé à N'' s'obtient par $z'' = \frac{z'-1}{1-\alpha} + 1 = \frac{3}{2}(z'-1) + 1 = \frac{3}{2}z' - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4}$ (on observe que $|z''| = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $z \in C_1$). Nous obtenons

$$\frac{1}{z''} = \frac{4}{1+\sqrt{3}j} = 4\frac{1-\sqrt{3}j}{1^2+\sqrt{3}^2} = 1-\sqrt{3}j.$$

Nous obtenons $HN = y = \sqrt{3}$. On a $y = \frac{1}{b\omega}$ donc $b = \frac{1}{\sqrt{3}\omega}$. Puis $a = b/\alpha = \frac{3}{\sqrt{3}\omega} = \frac{\sqrt{3}}{\omega}$, et finalement $C = \frac{a}{R_1} = \frac{\sqrt{3}}{\omega R_1}$.

Fonctions numériques

Exercice 1. *Calculer* $\ln e\sqrt{e} + \ln e^2 + 3\ln^2 e - \ln\frac{1}{e^3} + 2\ln\frac{1}{\sqrt{e}}$. *Exprimer en fonction de* $\ln 2$*, l'expression* $\ln 4e - 3\ln e^2 - \ln 16e + \ln\frac{1}{8}$.

$\ln e\sqrt{e} + \ln e^2 + 3\ln^2 e - \ln\frac{1}{e^3} + 2\ln\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{21}{2}$

$\ln 4e - 3\ln e^2 - \ln 16e + \ln\frac{1}{8} = -6 - 5\ln 2$

Exercice 2. *Résoudre a)* $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$*, b)* $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$*, c)* $7e^x + 4e^{-x} - 11 = 0$.

a) Posons $u = \ln x$. On doit alors résoudre $u^2+2u-3 = 0$, dont les solutions sont 1 et -3. Les solutions de l'équation initiale sont donc e et e^{-3}.

b) Posons $u = e^x$. On doit à nouveau résoudre $u^2 + 2u - 3 = 0$. Maintenant, comme $u = e^x$ est un nombre strictement positif, seulement $u = 1$ est possible. Donc l'équation b) a pour seule solution $x = \ln 1 = 0$.

c) Posons à nouveau $u = e^x$ qui est un nombre différent de zéro (strictement positif). Alors on doit résoudre $7u + \frac{4}{u} - 11 = 0$ ou encore $7u^2 - 11u + 4 = 0(*)$. On obtient $\Delta = 9 > 0$ et donc (*) possède deux solutions $u_1 = \frac{11+3}{14} = 1$ et $u_2 = \frac{11-3}{14} = \frac{6}{7}$. Donc $x = \ln 1 = 0$ et $x = \ln\frac{6}{7}$ sont les deux solutions.

Exercice 3. *Résoudre dans* $[0, 2\pi]$ *les équations et inéquations :*

On a $2\sin(4t-\frac{\pi}{3}) = 1$ si et seulement si $\sin(4t-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Or $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, et comme le graphe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'axe $x = \frac{\pi}{2}$, on a aussi $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Donc, par 2π-périodicité, $\sin u = \frac{1}{2}$ si et seulement si $u = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou $u = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc $2\sin(4t - \frac{\pi}{3}) = 1$ si et seulement si $4t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $4t - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ce qui se produit si et seulement si $t = \frac{1}{4}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ ou $t = \frac{1}{4}(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi) = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{4} = \frac{7+6k}{24}\pi$. Parmi ces solutions, on cherche celles qui sont dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Dans le premier cas cela se produit si $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$, ce qui donne les solutions $S_1 := \{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\}$. Dans le deuxième cas, cela se produit si $k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$, ce qui donne les solutions $S_2 := \{\frac{7\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \ldots, \frac{43}{24}\pi\}$ (on constate que pour $k = 7$ on a $\frac{6+7\times 6}{24}\pi > 2\pi$). L'ensemble des solutions est donc donné par $S = S_1 \cup S_2$.

Concernant l'inégalité $2\sin t \leq \sqrt{2}$, une étude de la fonction sin sur $[0, 2\pi]$ montre que celle-ci est vraie si et seulement $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

Exercice 4. *Déterminer les limites en* $+\infty$ *et* $-\infty$ *des fonctions définies par* $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$ *et* $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+x+3}$.

Nous devrions d'abord mentionner que f n'est pas définie en $x = -2$. Le discriminant du dénominateur de g étant égal à $1^2 - 4 \times 3 = -11 < 0$, il ne s'annule jamais de sorte que g est définie sur tout $\mathbb{R}$ (en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas).

On pourra écrire pour $x \neq 0$ (ce que l'on peut supposer car on s'intéresse aux limites en $+\infty$ et $-\infty$) :

$$f(x) = \frac{x(3-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}.$$

Sachant que $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$, de sorte qu'en particulier $1 + \frac{2}{x}$ admet une limite non nulle en $+\infty$ et $-\infty$, ce quotient admet une limite que l'on peut calculer à l'aide des règles usuelles sur les sommes, produits et quotients de limites par

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{3-0}{1+0} = 3,$$

et la limite en $-\infty$ sera la même.

De même

$$g(x) = \frac{2x-1}{x^2+x+3} = \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2})} = \frac{1}{x}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

Par les mêmes arguments que ci-dessus,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{3}{x^2} = 2,$$

et en $-\infty$ on obtient la même limite. Or $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, et par produit de limites on obtient que la limite de g en $+\infty$ et $-\infty$ est égale à zéro.

Exercice 5. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\sin(2x)|$. Montrer que f est paire et périodique de période $\pi/2$. Etudier les variations de f. Donner la représentation graphique de f sur $[-\pi, 2\pi]$. Etudier la continuité et la dérivabilité de f.*

On a $f(-x) = |\sin(-2x)| = |-\sin(2x)| = |\sin(2x)| = f(x)$, d'où la parité de f.

On a $f(x+\frac{\pi}{2}) = |\sin(2x+\pi)| = |-\sin(2x)| = |\sin(2x)| = f(x)$, donc f est périodique de période $\pi/2$ (et c'est en fait la plus petite période).

Par périodicité, il suffit d'étudier f sur $[0, \pi/2]$. Or, si $x \in [0, \pi/2]$, alors $2x \in [0, \pi]$, intervalle sur lequel le sinus est positif. Donc $f(x) = \sin(2x)$, $x \in [0, \pi/2]$. Par les propriétés usuelles du sinus, on obtient que f croît de 0 à 1 sur $[0, \pi/4]$ pour décroître de 1 à 0 sur $[\pi/4, \pi/2]$.

La continuité et la dérivabilité de f sont acquises par les propriétés du sinus (et de la fonction linéaire $x \longmapsto 2x$) en dehors des points $k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Or, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-\sin(2x)) = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^+} \sin(2x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Donc la limite à gauche en 0 est égale à la limite à droite en 0 est égale à la valeur de f en 0, ce qui prouve la continuité de f en 0. Et donc par $\frac{\pi}{2}$-périodicité en tous les points $k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction n'est pas dérivable en 0 (et donc en aucun point $k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$). Pour vérifier cela, on observe d'abord que $f(x) = -\sin(2x)$ sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ (nous avons déjà utilisé ce fait ci-dessus). La dérivée de f à gauche en 0 est donc $\lim_{x\to 0, x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0, x<0} \frac{|\sin(2x)|}{x} = \lim_{x\to 0, x<0} \frac{-\sin(2x)}{x} = -2$. Or $f(x) = \sin(2x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, et par des calculs analogues on vérifie que la dérivée à droite de f en 0 est égale à 2.

Exercice 6. *Après avoir précisé le (ou les) intervalle(s) où la fonction est dérivable déterminer dans chaque cas la fonction dérivée de*

a) $f(x) = \dfrac{5x-2}{x+4}$, alors $f'(x) = \frac{28}{(x+4)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$;

b) $f(x) = \sqrt{2x+7}$, alors $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+7}}$ sur $]\frac{-7}{2}, +\infty[$;

c) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, alors $f'(x) = \frac{-1}{1-x^2}$ sur $]-1, 1[$ (il peut être utile d'écrire $f(x) = \frac{1}{2}(\ln(1-x) - \ln(1+x))$).

d) $f(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$, L, C étant des paramètres positifs. Alors $f'(\omega) = \frac{\omega(L^2 - \frac{1}{C^2\omega^2})}{\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})}}$ sur $\mathbb{R}^*$ (l'expression sous la racine étant toujours *strictement* positive — car R est strictement positif — le seul problème qui se pose est lorsque $\omega = 0$ dans la fraction $\frac{1}{C\omega}$; physiquement on ne considéra que des fréquences ω positives, et comme on doit exclure $\omega = 0$, on prendra $\mathbb{R}_+^*$ comme domaine de définition).

Exercice 7. *Après avoir précisé le (ou les) intervalle(s) où la fonction est dérivable, calculer les dérivées premières des fonctions f définies par :*

a) $f(x) = \arctan\dfrac{x+1}{x-1}$, alors $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (pour simplifier le calcul de la dérivée de $x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}$ il pourra être utile d'écrire $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$) ;

b) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, alors $f'(x) = \arcsin x$ sur $]-1, 1[$ (on vient donc de trouver une primitive de la fonction arcsin !) ;

c) $f(x) = \sin(\arctan x)$, alors $f'(x) = \frac{\cos(\arctan x)}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Calculons $\cos(\arctan x)$. On a

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{\cos^2(\arctan x)}{1} = \frac{\cos^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x) + \sin^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+\frac{\sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

On remarquera que pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\arctan x \in]-\pi/2, \pi/2[$ intervalle sur lequel le cos ne s'annule jamais ce qui justifie que l'on peut diviser par $\cos(\arctan x)$ dans les calculs ci-dessus. Par ailleurs, sur

$]-\pi/2,\pi/2[$, la fonction cosinus est strictement positive de sorte que pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\cos(\arctan x)=\sqrt{\cos^2(\arctan x)}=\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}.$$

D'où finalement

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Exercice 8. *Fonctions hyperboliques inverses : a) Montrer que* $\operatorname{ch}^2 x=\frac{1+\operatorname{ch}(2x)}{2}$

C'est un calcul immédiat en utilisant la définition $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$;

b) *Donner une expression plus simple de* $\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}$,

On a $\operatorname{argch} y=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$ pour $y\geq 1$. Donc, en utilisant a) (et en observant $\operatorname{sh}^2 x=\frac{ch(2x)-1}{2}$)

$$\operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}=\ln\big(\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}+\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x-1}{2}}\big)=\ln(\operatorname{ch}\frac{x}{2}+\operatorname{sh}\frac{x}{2})=\ln e^{x/2}=\frac{x}{2}.$$

(On observera d'abord qu'il faut supposer $x\geq 0$ afin que $\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}$ soit supérieur ou égal à 1 pour pouvoir ensuite prendre l'argch. Or si $x\geq 0$, alors $\sqrt{sh^2x}=\operatorname{sh} x$ — remarquons qu'on a toujours $\sqrt{ch^2(x)}=x$.)

c) *Montrer que* $\operatorname{sh}(a+b)=\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b)+\operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a)$,

Ceci est un calcul immédiat à partir des définitions $\operatorname{sh} a=\frac{e^a-e^{-a}}{2}$ et $\operatorname{ch} b=\frac{e^b+e^{-b}}{2}$ (on partira de l'expression de droite).

d) *Donner une expression plus simple de* $\operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2})$ *(on pourra poser* $x=\operatorname{sh} t$*).*

On a $\operatorname{argsh} y=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$ pour $y\in\mathbb{R}$. Comme sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on peut faire le changement de variable $x=\operatorname{sh} t$. On observera alors $1+x^2=1+\operatorname{sh}^2 t=\operatorname{ch}^2 t$, et comme $\operatorname{ch} t\geq 1\geq 0$ pour tout t, on obtient $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{\operatorname{ch}^2(t)}=\operatorname{ch} t$. Donc $\operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2})=\operatorname{argsh}(2\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t)$. Par c) on obtient $2\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t=\operatorname{sh}(2t)$, d'où $\operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2})=\operatorname{argsh}\operatorname{sh}(2t)=2t=2\operatorname{argsh}(x)$.

Problème. Un quadripole composé d'une résistance $R>0$, d'une inductance $L>0$ et d'une capacité $C>0$ transforme un signal d'entrée d'une tension alternative V_1 de pulsation ω ($\omega>0$) en un signal de sortie de tension V_2. La fonction de transfert en régime sinusoïdal est la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par

$$F(\omega)=\frac{1}{1+jR\Big(C\omega-\frac{1}{L\omega}\Big)}.$$

1. *On note* $H(\omega)$ *le module de* $F(\omega)$ *[gain du système]. Montrer que*

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+R^2\Big(C\omega-\frac{1}{L\omega}\Big)^2}}.$$

On pourra poser $\varphi(\omega)=1+jR\Big(C\omega-\frac{1}{L\omega}\Big)$, alors $|H(\omega)|=\frac{1}{|\varphi(\omega)|}$, et le résultat est immédiat à partir de la définition du module d'un nombre complexe.

2. a. *Soit* U *la fonction définie sur* $I=]0,+\infty[$ *par* $U(\omega)=1+R^2\Big(C\omega-\frac{1}{L\omega}\Big)^2$*. Montrer que*

$$U'(\omega)=\frac{2R^2}{L\omega}\Big(C+\frac{1}{L\omega^2}\Big)(LC\omega^2-1). \tag{1}$$

On calcule $U'(\omega)=2R^2(C\omega-\frac{1}{L\omega})\Big(C+\frac{1}{L\omega^2}\Big)$, et on met $\frac{1}{L\omega}$ en facteur dans la première parenthèse pour obtenir (1).

b. *En remarquant que*

$$H(\omega)=\frac{1}{\sqrt{U(\omega)}}=[U(\omega)]^{-1/2}, \tag{2}$$

montrer que $H'(\omega)$ *et* $U'(\omega)$ *sont de signes contraires.*

Il est clair que l'on a (2). Donc $H'(\omega)=-\frac{1}{2}U(\omega)^{-3/2}U'(\omega)$. Comme U est de signe positif (au fait $U(\omega)\geq 1$ pour tout ω), alors $H'(\omega)$ et $U'(\omega)$ sont de signes contraires.

c. *Etudier les variations de la fonction* H *sur* I*. On précisera les limites en 0 et en* $+\infty$*.*

Etudions d'abord les variations de U. Par (1), on voit que le signe de U' dépend uniquement du signe de $LC\omega^2-1$ (les autres facteurs de U' étant strictement positifs). Cette expression s'annule si et seulement si $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; elle est strictement négative pour $0 < \omega < \omega_0$ et strictement positive si $\omega > \omega_0$. Donc $H'(\omega)$ est strictement positive pour $0 < \omega < \omega_0$ et strictement négative pour $\omega > \omega_0$.

Considérons la limite en $+\infty$. L'expression $\frac{1}{L\omega}$ tend vers 0 lorsque ω tend vers $+\infty$, et est donc négligeable par rapport à l'expression $L\omega$ qui, elle, tend vers $+\infty$. Donc le dénominateur tend vers $+\infty$, et $H(\omega)$ tend vers 0 pour $\omega \to \infty$.

Considérons la limite en 0 de H : on a (en multipliant numérateur et dénominateur par $\omega > 0$)

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + R^2\left(C\omega^2 - \frac{1}{L}\right)^2}}.$$

Lorsque ω tend vers 0, le dénominateur de cette expression tend vers R/L qui est un nombre strictement positif (et donc non nul). Le numérateur tend vers 0, et donc la limite en 0 de H est 0.

On obtient donc le tableau des variations suivant

x	0		$\frac{1}{\sqrt{LC}}$		∞
H'		$+$	0	$-$	
H	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3. *Donner l'allure de la représentation graphique de H dans un repère orthogonal.*

4. *On note ω_0 la valeur de pulsation pour laquelle la fonction H est maximum. On appelle alors pulsation de coupure -3dB toute valeur de ω telle que $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}H(\omega_0)$. Montrer graphiquement que le filtre présente deux pulsations de coupure ω_1 et ω_2 ($0 < \omega_1 < \omega_2$). Calculer ω_1 et ω_2 (on pourra se ramener à la résolution de 2 équations du second degré).*

On a déjà calculè $H(\omega_0) = 1$. On cherche donc à résoudre $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui est équivalent à $1 + R^2(C\omega - \frac{1}{L\omega})^2 = 2$ c'est-à-dire $C\omega - \frac{1}{L\omega} = \frac{1}{R}$. On doit donc trouver les solutions de $C\omega^2 - \frac{\omega}{R} - \frac{1}{L} = 0$ (*). Or $\Delta = b^2 - 4ac = \frac{1}{R^2} + 4\frac{C}{L}$ est un nomre strictement positif. Donc l'équation (*) possède deux solutions : $\omega_1 := \frac{L+\sqrt{RCL^2+4R^2CL}}{2RCL}$ et $\omega_2 := \frac{L-\sqrt{RCL^2+4R^2CL}}{2RCL}$.

5. *L'intervalle $[\omega_1;\omega_2]$ est appelé bande passante du filtre. Déterminer la longueur de la bande passante du filtre. Seules les fréquences situées dans la bande passante du filtre sont transmises. Ce filtre est donc appelé un "filtre passe bande".*

On a

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{1}{RC}$$