Université de Bordeaux

L 3 Probabilités 2019-2020

Corrigé succinct du devoir maison n° 1

Exercice 1

L'espace probabilisé est $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec $\Omega = \{1, .., n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme

1) Lorsque k divise n, on a $A_k = \{k, 2k, .., mk\}$ avec m entier non nul tel que $mk = n$. Par conséquent $\text{Card } A_k = m = \frac{n}{k}$ et $\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \frac{\text{Card } A_k}{\text{Card } \Omega} = \frac{1}{k}}$

2) Il s'agit de montrer que pour tout sous-ensemble J de $\{1, .., r\}$ de cardinal au moins 2,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} A_{p_j}\Big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_{p_j})$$

Or $\ell \in \bigcap_{j \in J} A_{p_j}$ ssi $\forall j \in J, \ p_j \mid \ell$ ssi $\prod_{j \in J} p_j \mid \ell$ car les p_j sont premiers entre eux.

Par conséquent $\bigcap_{j \in J} = A_{\prod_{j \in J} p_j}$ ce qui donne

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} A_{p_j}\Big) = \mathbb{P}\Big(A_{\prod_{j \in J} p_j}\Big) = \frac{1}{\prod_{j \in J} p_j} = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_{p_j})$$

Les événements $A_1, .., A_{p_r}$ sont indépendants

3) Soit $\ell \in \Omega$. ℓ est premier avec n si et seulement si aucun diviseur premier de n ne divise ℓ, si et seulement si $\ell \notin \bigcup_{j=1}^{n} A_{p_j}$, si et seulement si $\ell \in \bigcap_{j=1}^{n} A_{p_j}^c$

On a donc

$$\phi(n) = \text{Card}\Big(\bigcap_{j=1}^{r} A_{p_j}^c\Big) = n\, \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{n} A_{p_j}^c\Big).$$ Or les $A_{p_j}^c$ sont indépendants et de probabilités respectives $1 - \frac{1}{p_j}$

On obtient $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{r} A_{p_j}^c\right) = \prod_{j=1}^{r} \mathbb{P}(A_{p_j}^c) = \prod_{j=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$

En conclusion : $\boxed{\Phi(n) = n \prod_{j=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)}$

Exercice 2

1) On a $\mathbb{P}(Y = k, X = n) = \mathbb{P}(Y = k \mid X = n)\,\mathbb{P}(X = n)$

Si $k > n$ alors $\mathbb{P}(Y = k \mid X = n) = 0$ donc $\mathbb{P}(Y = k, X = n) = 0$

Si $1 \leq k \leq n$ alors $\boxed{\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \frac{1}{n}\,\frac{1}{\zeta(s)}\,\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}\,\frac{1}{n^{s+1}}}$

2) Comme p et q sont premiers entre eux, on a $\frac{Y}{X} = \frac{p}{q}$ si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $Y = \ell p$ et $X = \ell q$.

Comme ces événements sont disjoints on a bien $\mathbb{P}(Z = \frac{p}{q}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = \ell p, X = \ell q)$.

Avec la question précédente, en utilisant le fait que $1 \leq \ell p \leq \ell q$, on obtient $\mathbb{P}(Z = \frac{p}{q}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(s)}\,\frac{1}{(\ell q)^{s+1}} = \frac{1}{\zeta(s)}\,\frac{1}{q^{s+1}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^{s+1}}$

ce qui donne $\boxed{\mathbb{P}(Z = \frac{p}{q}) = \frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)\,q^{s+1}}}$

3) Soient $a, b \in [0,1]$ avec $a < b$. Alors il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $a < \frac{p}{q} < b$. Par conséquent

$\boxed{F_Z(b) - F_Z(a) = \mathbb{P}(Z \in]a,b]) \geq \mathbb{P}(Z = \frac{p}{q}) > 0}$ d'après la question 2)

F_Z est donc strictement croissante.

4) Z étant à valeurs dans $]0,1] \cap \mathbb{Q}$ on a $1 = \sum_{r \in]0,1] \cap \mathbb{Q}} \mathbb{P}(Z = r)$.

Or tout élément de $]0,1] \cap \mathbb{Q}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $q \geq 1$ et $\begin{cases} 1 \leq p \leq q \\ p \wedge q = 1 \text{ (p premier avec q)} \end{cases}$

On a donc $\sum_{q \geq 1} \sum_{\substack{p \in \{1,..,q\} \\ p \wedge q = 1}} \mathbb{P}(Z = \frac{p}{q}) = 1$

$$\sum_{q \geq 1} \sum_{\substack{p \in \{1,..,q\} \\ p \wedge q = 1}} \frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)\,q^{s+1}} = 1 \quad ; \quad \sum_{q \geq 1} \Phi(q)\,\frac{\zeta(s+1)}{\zeta(s)\,q^{s+1}} = 1$$

Conclusion : $\boxed{\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n^{s+1}} = \zeta(s)}$

5) a) $S_p = k \iff \nu_p(X) = k-1 \iff \exists m \geq 1,\ X = p^{k-1} m$ et p ne divise pas m

$\iff \exists m \geq 1,\ X = p^{k-1} m$ et $p \wedge m = 1$ car p étant premier

p ne divise pas m est équivalent à $p \wedge m = 1$. On a prouvé que $\boxed{\{S_p = k\} = \bigcup_{\substack{m \geq 1 \\ m \wedge p = 1}} \{X = p^{k-1} m\}}$

b) Il est clair que S_p prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ puisque $\nu_p(X)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(S_p = k) = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \wedge p = 1}} \mathbb{P}(X = p^{k-1} m) = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \wedge p = 1}} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(p^{k-1} m)^s} = \frac{1}{(p^{k-1})^s \zeta(s)} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \wedge p = 1}} \frac{1}{m^s}$

On voit en particulier que $\frac{\mathbb{P}(S_p = k+1)}{\mathbb{P}(S_p = k)} = \frac{1}{p^s}$

Ceci étant vrai pour tout $k \geq 1$ on en déduit grâce à l'équivalence (i) $\iff$ (ii) que $\boxed{S_p \text{ suit une loi } \mathcal{G}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}$.

A noter, $\frac{1}{p^s} = \mathbb{P}(S_p = 1) = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \wedge p = 1}} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{m^s}$ donne l'égalité $\boxed{\frac{\zeta(s)}{P(s)} = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \wedge p = 1}} \frac{1}{m^s}}$

6) a) $S_{p_1} = k_1, \dots, S_{p_r} = k_r$ ssi tous les $p_j^{k_j - 1}$ divisent X et aucun $p_j^{k_j}$ ne divise X

Ceci est équivalent à

$X = p_1^{k_1 - 1} \cdots p_r^{k_r - 1} m$ avec $m \wedge p_j = 1 \quad \forall j = 1, \dots, r$ (décomposer X en produit de facteurs pers)

On en déduit que $\boxed{\{S_{p_1} = k_1, \dots, S_{p_r} = k_r\} = \bigcup_{\substack{m \geq 1 \\ m \wedge p_j = 1\ \forall j = 1, \dots, r}} \{X = p_1^{k_1 - 1} \cdots p_r^{k_r - 1} m\}}$

b) La formule précédente donne $\mathbb{P}(S_{p_1} = k_1, \dots, S_{p_r} = k_r) = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \wedge p_j = 1\ \forall j = 1, \dots, r}} \mathbb{P}(X = p_1^{k_1 - 1} \cdots p_r^{k_r - 1} m)$

$$= \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \wedge p_j = 1\ \forall j = 1, \dots, r}} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(p_1^{k_1 - 1} \cdots p_r^{k_r - 1} m)^s} = \frac{1}{\zeta(s) (p_1^{k_1 - 1})^s \cdots (p_r^{k_r - 1})^s} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \wedge p_j = 1\ \forall j = 1, \dots, r}} \frac{1}{m^s}$$

$= F_1(k_1) \cdots F_r(k_r)$ si on prend $F_1(k_1) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \wedge p_j = 1\ \forall j = 1, \dots, r}} \frac{1}{m^s} \frac{1}{(p_1^{k_1 - 1})^s}$ et $F_j(k_j) = \frac{1}{(p_j^{k_j - 1})^s}$, $j \geq 2$

On en déduit avec la question 7) que les v.a $S_{p_1}, \dots, S_{p_r}$ sont indépendantes. Comme c'est vrai pour tout r et pour tout sous-ensemble $\{p_1, \dots, p_r\}$ de $\mathcal{P}$, on peut en conclure que les $\boxed{(S_p)_{p \in \mathcal{P}} \text{ sont indépendantes}}$

6> Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite des nombres premiers, classée par ordre croissant. On a $\{X=1\} = \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \{S_p = 1\}$

donc $\boxed{\frac{1}{\zeta(s)} = \mathbb{P}(X=1) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_{p_1}=1, \ldots, S_{p_n}=1) = \lim_{n\to\infty} \prod_{s=1}^{n} \mathbb{P}(S_{p_s}=1) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}$

7> (vi) => (v) est évidente ; pour (v) ⇒ (vi) il suffit de remarquer que $1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k^u}$

ce qui donne $C = \frac{1}{\zeta(u)}$ et $\forall k \geq 1$, $\boxed{\mathbb{P}(T=k) = \frac{1}{\zeta(u)}\,\frac{1}{k^u}}$

8> On a $X \wedge X' = k$ ssi $X = km$, $X' = km'$ et $m \wedge m' = 1$

donc $\mathbb{P}(X\wedge X' = k) = \sum_{\substack{m\geq 1\\ m'\geq 1\\ m\wedge m'=1}} \mathbb{P}(X=km)\,\mathbb{P}(X'=km')$ car $X \perp\!\!\!\perp X'$

$$= \sum_{\substack{m\geq 1\\ m'\geq 1\\ m\wedge m'=1}} \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{(km)^s}\frac{1}{\zeta(t)}\frac{1}{(km')^t} = C\,\frac{1}{k^{t+s}} \quad \text{avec } C = \frac{1}{\zeta(s)}\frac{1}{\zeta(t)} \sum_{\substack{m\geq 1\\ m'\geq 1\\ m\wedge m'=1}} \frac{1}{m^s}\frac{1}{(m')^t}$$

En utilisant (v) ⇔ (vi) on trouve que $X \wedge X'$ suit une loi Zeta de paramètre $s+t$.

Une conséquence est l'identité

$$\boxed{\sum_{\substack{m\geq 1\\ m'\geq 1\\ m\wedge m'=1}} \frac{1}{m^s}\frac{1}{(m')^t} = \frac{\zeta(s)\,\zeta(t)}{\zeta(s+t)}}$$