# Analyse et géométrie

M. Alain Connes, membre de l'Institut
(Académie des sciences), professeur

## L'hyperanneau des classes d'adèles

### 1. Introduction

Mon cours portait cette année sur les résultats récents (obtenus en collaboration avec C. Consani [3], [4], [5], [6]) sur le cas limite de la « caractéristique 1 ». Le but principal est de montrer que l'espace des classes d'adèles d'un corps global, qui jusqu'à présent n'a été considéré que comme un espace (non-commutatif), admet en fait une structure algébrique naturelle. Nous verrons également que la construction de l'anneau de Witt d'un anneau de caractéristique $p > 1$ admet un analogue en caractéristique 1 et que la déformation de la structure additive implique de manière cruciale l'entropie. Ces résultats sont reliés à l'analyse idempotente. Cette théorie utilise, au lieu du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, le semi-corps $\mathbb{R}_+^{\max}$ qui est obtenu en utilisant comme addition dans $\mathbb{R}^+$ l'opération $\max(x, y)$ alors que la multiplication reste inchangée. Elle fournit un cadre très naturel pour la thermodynamique et l'analogue de la transformation de Fourier est la transformation de Legendre. Un des avantages de la théorie est que l'on peut calculer avec des matrices. De plus, on a un résultat au premier abord étonnant : une matrice « générique » *i.e.* dont tout élément est non-nul, admet une et une seule valeur propre. L'analyse idempotente est intimement reliée à la géométrie tropicale. Dans notre contexte, elle fournit l'analogue en caractéristique 1 des automorphismes de Frobenius des corps parfaits, ainsi que l'analogue des anneaux de vecteurs de Witt, qui implique l'entropie, comme nous le verrons au § 2. Mais le point de vue vraiment nouveau dans le cours de cette année est basé sur la notion d'hyperanneau inventée par Krasner dans le contexte de la théorie du corps de classe, pour approcher un corps local de caractéristique non-nulle par des corps locaux de caractéristique zéro. Dans notre contexte, il dévoile la vraie nature de l'espace des classes d'adèles : c'est un hyperanneau, extension de l'hypercorps

$\mathbf{K} = \{0,1\}$, $1 + 1 = \{0,1\}$. En fait, un hyperanneau de la forme $R/G$ (où $R$ est un anneau et $G \subset R^\times$ un sous-groupe du groupe des unités) est une extension de $\mathbf{K}$ si et seulement si $G \cup \{0\}$ est un sous-corps de $R$. La géométrie algébrique sur $\mathbf{K}$ est duale dans le cas affine d'une catégorie qui contient à la fois celle des algèbres (sur un corps), celle des groupes abéliens et les géométries non arguesiennes homogènes. Nous avons montré que le groupoïde $P(\mathbb{H}_\mathbb{K})$ des éléments premiers de l'hyperanneau $\mathbb{H}_\mathbb{K} = \mathbb{A}_\mathbb{K}/\mathbb{K}^\times$, sous l'action du groupe $C_\mathbb{K} = \mathbb{H}_\mathbb{K}^\times$ des unités, est, en caractéristique $p > 1$, isomorphe de manière équivariante et canonique au groupoïde $\Pi_1^{\mathrm{ab}}(X)' \subset \Pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ des lacets du revêtement $X^{\mathrm{ab}} \to X$ associé à l'extension abélienne maximale $\mathbb{K}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathbb{K}$ munie de l'action du groupe de Weil : $\mathcal{W}^{\mathrm{ab}} \subset \mathrm{Gal}(\mathbb{K}^{\mathrm{ab}} : \mathbb{K})$.

## 2. Caractéristique $p = 1$, entropie et anneau de Witt

Le but de cette section est de présenter l'analogue en caractéristique $p = 1$, développé dans [5], de la construction fonctorielle de Witt. Nous rappelons d'abord brièvement cette construction. Soit $p$ un nombre premier. Soient $S_n \in \mathbb{Z}[x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n]$ les polynômes de Witt définis par

$$x_0^{p^n} + p x_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n x_n + y_0^{p^n} + \cdots + p^n y_n = S_0^{p^n} + p S_1^{p^{n-1}} + \cdots + p^n S_n \quad (1)$$

Soit alors $R$ un $p$-anneau strict, $S = R/pR$ l'anneau résiduel et $\tau : S \to R$ le relèvement de Teichmüller $\tau(x) = [x]$. Considérons l'anneau $S[[T]]$ des séries formelles en $T$ à coefficients dans $S$. L'application $\tau$ donne une bijection de $S[[T]]$ avec $R$,

$$\tilde{\tau}(\textstyle\sum s_n T^n) = \sum \tau(s_n) p^n \in R \quad (2)$$

Comme $S$ est de caractéristique $p$, il contient $\mathbb{F}_p$ et on a

$$\mathbb{F}_p[[T]] \subset S[[T]] \quad (3)$$

Soit alors

$$I_p = \{\alpha \in [0,1],\ \exists n,\ p^n \alpha \in \mathbb{Z}\} \quad (4)$$

**Théorème 2.1** *Il existe une application $w_p : I_p \to \mathbb{F}_p[[T]]$ telle que pour tous $x, y \in S$ on ait*

$$\tau(x) + \tau(y) = \tilde{\tau}\Big(\sum_{\alpha \in I_p} w_p(\alpha) x^\alpha y^{1-\alpha}\Big) \quad (5)$$

Ce résultat se généralise et donne une application

$$w_p(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{F}_p[[T]] \quad \forall \alpha_j \in I_p, \textstyle\sum \alpha_j = 1 \quad (6)$$

telle que

$$\sum_{i=1}^{k} \tau(z_i) = \tilde{\tau}\Big(\sum_{\sum \alpha_j = 1} w_p(\alpha_1, \dots, \alpha_k) z_1^{\alpha_1} \cdots z_k^{\alpha_k}\Big) \quad (7)$$

Passons à la caractéristique 1. Un semi-anneau $A$ est un monoïde pour l'addition et la multiplication, avec éléments unité 0 et 1, et la multiplication est distributive par rapport à l'addition. Il est de *caractéristique* 1 quand

$$x + x = x, \qquad \forall x \in A \tag{8}$$

Un semi-anneau $A$ est *simplifiable* si la multiplication par tout $x \neq 0$ est injective. On a alors ([9]).

**Proposition 2.2** *Soit $A$ un semi-anneau simplifiable de caractéristique 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, l'application $\vartheta_n(x) = x^n$ est un endomorphisme injectif de $A$.*

Nous dirons que $A$ est *parfait* quand $\vartheta_n$ est surjectif pour tout $n$. On a alors un groupe à un paramètre $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ d'automorphismes $\vartheta_\lambda \in \mathrm{Aut}(A)$ tels que

- $\vartheta_n(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A$ ;
- $\vartheta_\lambda \circ \vartheta_\mu = \vartheta_{\lambda\mu}$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}_+^*$ ;
- $\vartheta_\lambda(x)\vartheta_\mu(x) = \vartheta_{\lambda+\mu}(x)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}_+^*$ et $x \in A$.

Nous utiliserons la notation $\vartheta_\lambda(x) = x^\lambda$. Bien entendu $\mathbb{B} = \{0,1\}$, $1 + 1 = 1$, est parfait ; un autre exemple important est $\mathbb{R}_+^{\max}$ obtenu ainsi. Si l'on transmue les lois d'addition et de multiplication dans le semi-corps $\mathbb{R}_+$ par l'application bijective $x \mapsto x^p$ (avec $p > 0$) les semi-corps obtenus ont une limite quand $p \to \infty$. C'est le semi-corps $\mathbb{R}_+^{\max}$, *i.e.* l'ensemble $[0, \infty)$ muni de la multiplication usuelle et de la nouvelle addition donnée par

$$x + y := \max(x, y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+ \tag{9}$$

Pour obtenir l'analogue de la construction de l'anneau de Witt dans le cadre des semi-anneaux parfaits de caractéristique 1, on recherche les fonctions $w(\alpha)$ définies pour $\alpha \in I = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ qui rendent associative et commutative l'opération

$$x +' y = \sum_{\alpha \in I} w(\alpha) x^\alpha y^{1-\alpha} \tag{10}$$

Outre la condition de symétrie

$$w(1 - \alpha) = w(\alpha) \tag{11}$$

on obtient l'équation fonctionnelle

$$w(\alpha)w(\beta)^\alpha = w(\alpha\beta)w(\gamma)^{(1-\alpha\beta)}, \ \gamma = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta} \tag{12}$$

La solution générale de cette équation est donnée par

**Proposition 2.3** *Soient $G$ un groupe abélien uniquement divisible et $w : I \to G$, avec $w(0) = w(1) = 1 \in G$. Pour que $w$ vérifie* (11) *et* (12)*, il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme $\chi : \mathbb{Q}_+^\times \to G$ tel que*

$$w(\alpha) = \chi(\alpha)^\alpha \ \chi(1 - \alpha)^{1-\alpha}, \qquad \forall \alpha \in (0,1) \cap \mathbb{Q} \tag{13}$$

L'homomorphisme $\chi$ est déterminé par les $\chi(p) \in G$ quand $p$ parcourt l'ensemble des nombres premiers. Dans le cas qui nous intéresse, le groupe $G$ est le groupe des éléments inversibles d'un semi-anneau de caractéristique 1 parfait. Dans ce cas le groupe est ordonné par la relation $x+y=y$ notée $x\leqslant y$.

**Théorème 2.4** *Soit $G$ un groupe abélien ordonné uniquement divisible et tel que l'action $x\mapsto x^\alpha$ de $\mathbb{Q}^\times$ sur $G$ par divisibilité se prolonge en une action de $\mathbb{R}^\times$. Soit $w: I\to G$ une solution de* (11) *et* (12) *telle que*

$$w(\alpha)\geqslant 1,\qquad \forall \alpha\in I \tag{14}$$

*Il existe alors $\rho\in G$, $\rho\geqslant 1$ tel que*

$$w(\alpha)=\rho^{-\alpha\log\alpha-(1-\alpha)\log(1-\alpha)},\qquad \forall\alpha\in I \tag{15}$$

On démontre en effet l'inégalité suivante sur les $\chi(p)$. Pour deux nombres premiers $p_j$, soit $\frac{n_2}{n_1}$ une approximation diophantienne de $\frac{\log p_1}{\log p_2}$ telle que $\alpha=p_1^{n_1}p_2^{-n_2}<1$. On a alors $\chi(p_2)\leqslant\chi(p_1)^{\frac{n_1}{n_2}-\alpha}$.

On reconnaît dans la formule (15), l'entropie

$$S(\alpha)=-\alpha\log\alpha-(1-\alpha)\log(1-\alpha) \tag{16}$$

qui est une fonction strictement concave de $\alpha\in[0,1]$ qui joue un rôle fondamental en thermodynamique, dans la théorie de l'information et celle des systèmes dynamiques.

Dans le cadre ci-dessus des semi-anneaux $A$ de caractéristique 1, nous associons à $\rho\in A$, $\rho\geqslant 1$, une métrique $d(x,y)$ construite en utilisant la relation $x+y=y$ notée $x\leqslant y$, et telle que

$$d(x,y)=\inf\{\alpha\mid x\leqslant y\rho^\alpha,\ y\leqslant x\rho^\alpha\}. \tag{17}$$

Elle est finie sur les intervalles $[\rho^{-n},\ \rho^n]$. Nous noterons $A_\rho$ la réunion de $\{0\}$ et des séparés complétés des intervalles $[\rho^{-n},\ \rho^n]$.

**Théorème 2.5** *Soit $\rho\in A$, $\rho>1$ un élément inversible. Alors la formule*

$$x+_\rho y:=\sum_{\alpha\in[0,1]\cap\mathbb{Q}}\rho^{S(\alpha)}x^\alpha y^{1-\alpha},\qquad \forall x,y\in A_\rho$$

*définit une loi associative sur $A_\rho$ avec* 0 *comme élément neutre. La multiplication est distributive pour cette addition et le groupe de Grothendieck du monoïde $(A_\rho,+_\rho)$ est une algèbre normée $W(A,\rho)$ sur $\mathbb{R}$ qui dépend fonctoriellement de $(A,\rho)$.*

Ainsi, après complétion de l'algèbre normée, cet analogue de la construction de Witt en caractéristique 1 donne une algèbre de Banach commutative à la quelle on peut appliquer le Théorème de Gel'fand qui montre qu'elle possède des caractères $\kappa$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On démontre que pour tout caractère on a $\kappa(\rho)=e$ où $e=2.71828...$ est le nombre d'Euler.

## 3. Arithmétique de l'hyperanneau $\mathbb{H}_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^\times$ des classes d'adèles

Nous exposons, dans cette section, les résultats de [6] qui montrent que la notion d'hyperanneau introduite par M. Krasner permet de comprendre la structure algébrique de l'espace $\mathbb{H}_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^\times$ des classes d'adèles d'un corps global $\mathbb{K}$. Il faut bien entendu commencer par accepter que la loi de groupe additif d'un anneau soit remplacée par une opération $x, y \mapsto x + y \subset \mathbb{H}$ à valeurs dans les sous-ensembles non vides de $\mathbb{H}$. La notion d'hypergroupe est due à Marty [13] et la commutativité et l'associativité ont le sens usuel. Les deux axiomes qui remplacent l'existence et l'unicité de l'opposé $-x$ de $x$ sont

(1) $\forall x \in H \quad \exists!\, y(= -x) \in H \quad$ t.q. $\quad 0 \in x + y$

(2) $x \in y + z \Rightarrow z \in x - y$.

Dans un hyperanneau $\mathbb{H}$, la multiplication donne une structure de monoïde $(\mathbb{H},\cdot)$ et la distributivité s'écrit

(3) $x(y + z) = xy + xz, \qquad \forall x, y, z.$

On vérifie que $\mathbf{K} = \{0,1\}$ avec $1 + 1 = \{0,1\}$ est un hypercorps, *i.e.* un hyperanneau dans lequel tout élément non-nul est inversible. Le quotient $R/G$ d'un anneau commutatif $R$ par un sous-groupe $G \subset R^\times$ du groupe multiplicatif des unités de $R$ est un hyperanneau pour l'addition qui à $xG$ et $yG$ associe l'ensemble de classes modulo $G$ d'éléments de $xG + yG$.

**Proposition 3.1** *Soit $R$ un anneau commutatif et $G \subset R^\times$ un sous-groupe $G \neq \{1\}$ du groupe multiplicatif des unités de $R$. Alors l'hyperanneau $R/G$ contient* $\mathbf{K}$ *si et seulement si $\{0\} \cup G$ est un sous-corps de $R$.*

Nous montrons que la théorie des hyperanneaux extensions de $\mathbf{K}$ est très structurée grâce à la réciproque ci-dessous (théorème 3.5) de la proposition 3.1. Cette réciproque utilise

- le théorème de Von Staudt et Hilbert sur les géométries desarguesiennes ;
- la théorie des « Inzidenzgruppen » de E. Ellers et H. Karzel ;
- la construction de l'hypercorps des fractions [14] d'un hyperanneau intégre.

La classification (théorème 3.4) des hypercorps extensions finies de $\mathbf{K}$ est directement reliée à une question ouverte sur les géométries non-arguésiennes finies homogènes.

### *3.1 K-espaces vectoriels et géométrie projective*

Un $\mathbf{K}$-espace vectoriel est un hypergroupe muni d'une action compatible de $\mathbf{K}$. Comme $\mathbf{K}$ ne contient que 0 et 1 qui agissent de manière évidente, un $\mathbf{K}$-espace vectoriel est un hypergroupe tel que

$$x + x = \{0,x\}, \qquad \forall x \neq 0 \tag{18}$$

Rappelons que les 3 axiomes de la géométrie projective concernent les propriétés d'une famille $\mathcal{L}$ de sous-ensembles $L \subset P$ d'un ensemble $P$. Les éléments $L \in \mathcal{L}$ sont appelés droites.

$\mathbb{P}_1$ : Deux points distincts appartiennent à une droite unique.

$\mathbb{P}_2$ : Si une droite rencontre deux cotés d'un triangle[1] elle rencontre le troisième.
$\mathbb{P}_3'$ : Toute droite contient au moins quatre points.

**Proposition 3.2** *Soit $E$ un* **K**-*espace vectoriel. Soit $\mathcal{P} = E \backslash 0$. L'égalité*

$$L(x,y) = (x+y) \cup \{x,y\}, \qquad \forall x,\, y \in \mathcal{P} \tag{19}$$

*définit une géométrie sur $\mathcal{P}$ qui vérifie $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{P}_3'$.*

*Soit $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ une géométrie vérifiant $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{P}_3'$. Alors $E = \mathcal{P} \cup \{0\}$ muni de*

$$x + y = \begin{cases} L(x,y) \setminus \{x,y\}, & si \;\; x \neq y \\ \{0,x\}, & si \;\; x = y \end{cases} \tag{20}$$

*est un* **K**-*espace vectoriel.*

Notons que la dimension d'un **K**-espace vectoriel est $\dim(\mathcal{P},\mathcal{L}) + 1$, où $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ est la géométrie associée.

*3.2 Géométrie algébrique sur K*

La proposition 3.2 relie la théorie des **K**-hypercorps à celle des « Inzidenszgruppen » (groupes d'incidence) de [8]. Un groupe d'incidence est un groupe $G$ muni d'une structure d'espace projectif telle que les translations à gauche et à droite soient des automorphismes de l'espace projectif.

**Proposition 3.3** *Soit $\mathbb{H}$ un* **K**-*hypercorps. Alors le groupe multiplicatif $\mathbb{H}^\times$ muni de la géométrie* (19) *est un groupe d'incidence. Réciproquement soit $G$ un groupe d'incidence et munissons $\mathbb{H} = G \cup \{0\}$ de la structure de* **K**-*espace vectoriel donnée par* (20) *et du produit de $G$* (avec $0 \cdot g = g \cdot 0 = 0$). *Alors $\mathbb{H}$ est un* **K**-*hypercorps.*

On déduit alors des résultats de [11] que

**Théorème 3.4** *Toute extension finie (commutative) $\mathbb{H}$ de* **K** *est d'une des trois formes suivantes*

(1) $\mathbb{H} = \mathbf{K}[G]$ *pour $G$ groupe fini abélien $G$.*

(2) $\mathbb{H} = \mathbb{F}_{q^m} / \mathbb{F}_q^\times$ *où $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q^m}$ sont des corps finis.*

(3) *L'extension associée à un plan $\mathcal{P}$ non-arguésien muni d'un groupe $G$, simplement transitif d'automorphismes de $\mathcal{P}$.*

On ne sait pas si le cas (3) se produit. La structure géométrique de $G$ dans le cas (3) est entièrement déterminée par un sous-ensemble $D \subset G$ tel que l'application $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ soit une bijection du complément de la diagonale dans $D \times D$ avec le complément de l'élément neutre dans $G$. L'ordre de $G$ est alors de la forme $n^2 + n + 1$ et les seuls exemples connus sont de la forme (2), pour $n = q$ une puissance d'un nombre premier. Les résultats de M. Hall [10] montrent que si $G$ est cyclique, pour tout diviseur premier $p \,|\, n$, l'application $x \mapsto x^p$ définit un

1. Pas au sommet correspondant.

automorphisme de l'hypercorps $\mathbb{H}$ qui est un analogue de l'automorphisme de Frobenius.

**Théorème 3.5** *Soit* $\mathbb{H}$ *une* $\mathbf{K}$*-algèbre commutative sans diviseur de zéro et telle que* $\dim_{\mathbf{K}}\mathbb{H} > 3$. *Il existe alors une unique paire* $(A, L)$ *d'un anneau commutatif intègre* $A$ *et d'un sous-corps* $L \subset A$ *tels que*

$$\mathbb{H} = A/L^{\times} \tag{21}$$

Les notions d'idéal, d'idéal premier, de spectre premier et de schéma se prolongent aux hyperanneaux. La catégorie des $\mathbb{Z}$-schémas usuels est une sous catégorie pleine de celle des hyperschémas.

**Théorème 3.6** *Pour tout* $\mathbb{Z}$*-schéma X, on a une identification canonique*

$$X \simeq Hom(\mathrm{Spec}\,(\mathbf{K}), X)$$

On considère la droite affine $\mathcal{D} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T]$. Pour un anneau $R$ on a une identification ensembliste $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[T], R) \simeq R$, mais cette égalité n'est plus vraie dans le cas des hyperanneaux et on définit en général la notion de fonction sur le spectre d'un hyperanneau $H$ comme un élément de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[T], R)$.

**Théorème 3.7** *Soit* $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$ *l'hyperanneau des classes d'adèles sur* $\mathbb{Q}$, *et soit* $\rho \in Hom(\mathbb{Z}[T], \mathbb{H}_{\mathbb{Q}})$. *Alors ou bien* $\rho = \xi_a$

$$\xi_a\,(P(T)) = P(a)\mathbb{Q}^{\times} \in \mathbb{H}_{\mathbb{Q}}, \qquad \forall P \in \mathbb{Z}[T] \tag{22}$$

*pour une unique adèle* $a \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$, *ou* $\rho$ *se factorise par* $\mathbb{Q}[e_z]/\mathbb{Q}^{\times}$, *où* $e_z$ *est l'idempotent de* $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ *associé à un sous-ensemble* $Z \subset \Sigma_{\mathbb{Q}}$.

Les deux coproduits $\Delta^{+}(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$ et $\Delta^{\times}(T) = T \otimes T$ de l'anneau $\mathbb{Z}[T]$ permettent d'obtenir les opérations élémentaires sur les fonctions (*cf.* [6]).

### *3.3 Vers* $\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}$

Les trois points de vue sur $\mathbb{F}_1$ sont reliés entre eux et à Spec $\mathbb{Z}$ par le diagramme suivant, où $\mathbf{S}$ désigne l'hypercorps des signes dont les éléments sont 0 et $\pm 1$ et les lois sont données par la règle des signes, évidente pour la multiplication et donnée pour l'addition par

$$1 + 1 = 1,\ 1 + (-1) = \{-1,\ 0, 1\}$$

L'application $n \mapsto \mathrm{signe}(n)$ donne l'unique homomorphisme $\mathbb{Z} \to \mathbf{S}$ et l'application $x \mapsto |x|$ l'unique homomorphisme $\mathbf{S} \to \mathbf{K}$. Le semi-corps $\mathbb{B}$ est simplement la partie positive $\mathbb{B} = \mathbf{S}^{+}$ de l'hypercorps $\mathbf{S}$. Tous ces objets sont des monoïdes et leur spectre sont au dessus de $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_1$ pour cette raison.

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec} \mathbf{S} \arrow[dl] \arrow[d] & \operatorname{Spec} \mathbf{K} \arrow[l] \arrow[dl] \\
\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \arrow[d] & \operatorname{Spec} \mathbb{B} \arrow[dl] & \\
\operatorname{Spec} \mathbb{F}_1 & &
\end{tikzcd}
\tag{23}
$$

Dans ce diagramme, Spec $\mathbf{K}$ est situé au dessus du point générique de Spec $\mathbb{Z}$ et il est naturel de chercher à relever Spec $\mathbb{Z}$ au-dessus de Spec $\mathbf{K}$. Pour cela considérons l'anneau $\widehat{\mathbb{Z}}$ complétion profinie de l'anneau $\mathbb{Z}$ et le produit tensoriel

$$\mathbb{Z}_{\mathbf{S}} = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{S} \tag{24}$$

Tout élément de $\widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{S}$ est de la forme $x \otimes 1$ pour un $x \in \widehat{\mathbb{Z}}$ et la règle de simplification dans le produit tensoriel donne la relation d'équivalence

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists n,\ m \in \mathbb{N}^{\times},\ nx = my \tag{25}$$

Or cette relation d'équivalence est la relation de commensurabilité pour les $\mathbb{Q}$-réseaux (*cf.* [7]) qui définit un espace non-commutatif de type III. Cet espace est le point de départ des relations entre thermodynamique, transitions de phase et théorie des nombres initiée dans [1]. L'algèbre naturelle de fonctions sur l'espace $\mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$ est une algèbre de Hecke non-commutative $\mathcal{H}$. La non-commutativité donne un groupe à un paramètre d'automorphismes $\sigma_t \in \operatorname{Aut}(\mathcal{H})$ et l'étude des états d'équilibre à température inverse $\beta = 1/kT$ montre qu'il y a une transition de phase avec brisure de symétrie spontanée en $\beta = 1$. À haute température ($\beta \leqslant 1$) il y a unicité de l'état d'équilibre, mais en dessous de la température critique, les états d'équilibre extrémaux (phases pures) sont paramétrés par les plongements $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} \to \mathbb{C}$ de l'extension abélienne maximale $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ de $\mathbb{Q}$ dans le corps des complexes. De plus la fonction de partition du système coincide avec la fonction zêta de Riemann et cette coincidence est le point de départ de la réalisation des formules explicites comme formule de trace de [2]. La réalisation spectrale des zéros de zêta est obtenue en passant au système dual du système $(\mathcal{H},\ \sigma_t)$ (appelé système BC) et ceci correspond géométriquement à un remplacement de l'espace $\mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$ par l'espace des classes d'adèles sur $\mathbb{Q}$ *i.e.* $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^{\times}$. Cet espace est muni par construction d'une action naturelle du groupe $C_{\mathbb{Q}}$ des classes d'idèles. Nous avons déja vu dans le cours de l'an dernier que l'on peut mieux comprendre ces constructions grâce à la structure naturelle de monoïde de l'espace des classes d'adèles. Comme nous le verrons ci-dessous, la structure d'hyperanneau de cet espace permet d'aller plus loin. En particulier, on peut formuler géométriquement les relations entre les divers espaces ci-dessus sous la forme du diagramme suivant qui complète (23) :

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_{\mathbf{S}} \arrow[dl] \arrow[d] & \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_{\mathbf{K}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} \mathbb{H}_{\mathbb{Q}} \arrow[dl] \\
\operatorname{Spec} \hat{\mathbb{Z}} \arrow[d] & \operatorname{Spec} \mathbf{S} \arrow[dl] \arrow[d] & \operatorname{Spec} \mathbf{K} \arrow[l] \arrow[dl] & \\
\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \arrow[d] & \operatorname{Spec} \mathbb{B} \arrow[dl] & & \\
\operatorname{Spec} \mathbb{F}_1 & & &
\end{tikzcd} \tag{26}$$

Il reste à identifier une structure géométrique utile sur les espaces tels que Spec $\mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$ qui forme la première ligne de ce diagramme. Bien entendu, cet espace est le *spectre* de l'hyperanneau $\mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$ et n'est pas l'hyperanneau $\mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$. Il s'agit donc de faire de la géométrie algébrique sur l'espace Spec $\mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$. La relation avec l'étude de l'espace $\mathbb{Z}_{\mathbf{S}}$ comme espace (non-commutatif) est la même que celle qui relie la géométrie d'une variété $V$ avec la théorie des champs quantiques sur $V$, ou sous une forme plus rudimentaire la relation entre calcul infinitésimal et calcul variationnel qui est le thème de l'analyse fonctionnelle.

### *3.4 Le groupoïde $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$*

Nous dirons qu'un élément $p \in \mathbb{H}$ d'un hyperanneau $\mathbb{H}$ est *premier* si l'idéal $p\mathbb{H}$ qu'il engendre est premier (*i.e.* son complémentaire est multiplicatif).

**Théorème 3.8** 1) *Tout idéal premier principal de l'hyperanneau $\mathbb{H}_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^{\times}$ est de la forme*

$$\mathfrak{p}_v = \{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}} | x_v = 0\} \tag{27}$$

*où $v \in \sum_{\mathbb{K}}$ est une place de $\mathbb{K}$.*

2) *Le groupe $C_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{\times}/\mathbb{K}^{\times}$ agit transitivement sur les générateurs de l'idéal premier $\mathfrak{p}_w$.*

3) *Le groupe d'isotropie de tout générateur de l'idéal premier $\mathfrak{p}_w$ est $\mathbb{K}_w^{\times} \subset C_{\mathbb{K}}$.*

L'espace $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ des éléments premiers de l'hyperanneau $\mathbb{H}_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}^{\times}$ a une structure naturelle de groupoïde. L'ensemble des unités est l'ensemble $\sum_{\mathbb{K}}$ des places de $\mathbb{K}$. Le produit de deux éléments premiers est encore premier si ils engendrent le même idéal. Il y a pour chaque place $v \in \sum_{\mathbb{K}}$ un unique idempotent $p_v \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ qui engendre $\mathfrak{p}_v$.

### *3.5 Groupoïde fondamental*

Soit $\pi : \widetilde{X} \to X$ un revêtement galoisien de groupe $W$. Le *groupoïde fondamental* du revêtement est le quotient

$$\Pi_1 = (\widetilde{X} \times \widetilde{X})/W$$

de $\widetilde{X}\times\widetilde{X}$ par l'action diagonale de $W$. C'est un groupoïde dont les applications source $s$ et but $r$ sont données par

$$r(x,y)=\pi(x),\ s(x,y)=\pi(y),\qquad \forall x,y\in\widetilde{X},$$

et la loi de composition par

$$(x,y)\circ(y,z)=(x,z),\qquad \forall x,\ y,\ z\in\widetilde{X}.$$

Nous considérons le sous-groupoïde $\Pi_1'$ des lacets, défini par

$$\Pi_1'=\{\gamma\in\Pi_1\,|\,r(\gamma)=s(\gamma)\}.$$

Les fibres de la projection $r=s:\Pi_1'\to X$ sont des groupes. De plus si $W$ est un groupe abélien, on a une action naturelle de $W$ sur $\Pi_1'$ donnée par

$$w\cdot(\tilde{x},\tilde{y})=(w\tilde{x},\tilde{y})=(\tilde{x},w^{-1}\tilde{y}). \tag{28}$$

### *3.6 L'isomorphisme $\Pi_1^{\mathrm{ab}}(X)'\simeq P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ en caractéristique $p\neq 0$*

Soit $\mathbb{K}$ un corps global de caractéristique $p\neq 0$. Nous appliquons les définitions ci-dessus au revêtement abélien $\pi: X^{\mathrm{ab}}\to X$ de la courbe non-singulière $X$ sur $\mathbb{F}_q$ de corps de fonctions égal à $\mathbb{K}$. Ce revêtement est ramifié mais le groupoïde $\Pi_1'$ des lacets continue à avoir un sens. On identifie le groupe $C_{\mathbb{K}}$ des classes d'idèles avec le groupe de Weil abélianisé $W\subset \mathrm{Gal}(\mathbb{K}^{\mathrm{ab}}:\mathbb{K})$ par la théorie du corps de classe.

**Théorème 3.9** *Soit $\mathbb{K}$ un corps global de caractéristique $p\neq 0$, et $X$ le schéma associé sur $\mathbb{F}_q$.*

- *Le groupoïde $\Pi_1^{\mathrm{ab}}(X)'$ est canoniquement isomorphe au groupoïde $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ des éléments premiers de l'hyperanneau des classes d'adèles.*
- *L'isomorphisme $\Pi_1^{\mathrm{ab}}(X)'\simeq P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ est équivariant pour l'action du groupe de Weil (abélianisé) $W$ sur $\Pi_1^{\mathrm{ab}}(X)'$ et l'action de $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^{\times}=C_{\mathbb{K}}$ sur $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ par multiplication.*

Cet énoncé n'a de sens qu'en caractéristique non nulle. En caractéristique 0, le groupoïde $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ continue à avoir un sens et donne une première indication sur la relation entre la « courbe » hypothétique $C$ reliée à la fonction zêta et l'hyperanneau $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$. En effet $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})\subset\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ est la réunion des orbites périodiques de l'action de $C_{\mathbb{K}}$ sur $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ qui contribuent à la formule de trace [2].

### *3.7 La place archimèdienne et les hypercorps $\mathbb{R}^{\mathrm{convex}}$ et $\mathcal{T}\mathbb{R}$*

Pour terminer cette présentation succinte, nous montrons comment réconcilier les deux points de vue sur la caractéristique 1 des § 2 (semi-anneaux) et § 3 (hyper-anneaux). En fait, la construction de $\mathbb{R}_+^{\max}$ du § 2 se prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier et on obtient

**Théorème 3.10** *Il existe sur* $\mathbb{R}$ *une unique structure d'hypercorps* $\mathbb{R}^{\text{convex}}$ *extension de* **S**, *telle que la multiplication soit inchangée et que*

$$x + y = (x, y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 < x < y$$

*Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *il existe un unique automorphisme* $\vartheta_\lambda \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{\text{convex}})$ *tel que* $\vartheta_\lambda(x) = x^\lambda$ *pour tout* $x > 0$. *De plus tout élément de* $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^{\text{convex}})$ *est un* $\vartheta_\lambda$.

L'hypercorps $\mathbb{R}^{\text{convex}}$ est une extension de **S** au sens strict car il contient **S** comme sous ensemble stable pour l'addition et la multiplication. Il y a (*cf.* [15]) une autre extension naturelle $\mathcal{T}\mathbb{R}$ de **S** au sens faible, *i.e.* munie d'un homomorphisme $\mathbf{S} \to \mathcal{T}\mathbb{R}$. La multiplication dans $\mathcal{T}\mathbb{R}$ est la même que dans $\mathbb{R}$ et l'hyperaddition est donnée par (*cf.* [15])

$$a \cup b = \begin{cases} a, & \text{si } |\,a\,| > |\,b\,| \text{ ou } a = b\,; \\ b, & \text{si } |\,a\,| < |\,b\,| \text{ ou } a = b\,; \\ [-\mathrm{a}, \mathrm{a}], & \text{si } b = -a. \end{cases} \tag{29}$$

Comme dans le théorème 3.10 on a, mais en supposant $\lambda > 0$, un unique automorphisme $\vartheta_\lambda \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T}\mathbb{R})$ tel que $\vartheta_\lambda(x) = x^\lambda$ pour tout $x > 0$. Cette extension joue le même rôle que $\mathbb{R}_+^{\max}$ comme extension de $\mathbb{B} = \mathbf{S}^+$, ce que résume le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\,(\mathcal{T}\mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\,(\mathbf{S}) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,(\mathbb{R}_+^{\max}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}\,(\mathbb{B}) \end{tikzcd} \tag{30}$$

L'hypercorps $\mathcal{T}\mathbb{R}$ extension de **S** devrait jouer en caractéristique 1 un rôle analogue à celui des clôtures algébriques $\overline{\mathbb{F}}_p$ des corps finis $\mathbb{F}_p$ de caractéristique $p$.

## Conférences

Septembre 2009, 1 conférence à Oberwolfach.
Octobre 2009, 1 conférence à ENS rue d'Ulm.
Décembre 2009, 1 conférence à IHES.
Avril 2010, 4 conférences à Ohio State University, Columbus.
Mai 2010, 2 conférences à l'université libre de Bruxelles.
Juin 2010, 1 conférence à Nijmegen.

## Publications

Connes A., Consani C., « Characteristic 1, entropy and the absolute point », à paraître *in Proceedings of the 21st JAMI Conference*, *Baltimore, 2009*, *JHUP*; arXiv:0911.3537v1 [mathAG].

Connes A., Consani C., « The hyperring of adèle classes »; arXiv:1001.4260 [mathAG,NT].

Connes A., Consani C., « From monoids to hyperstructures: in search of an absolute arithmetic Casimir Force », *Casimir Operators and the Riemann Hypothesis*, de Gruyter, 2010, 147-198.

## Références

[1] Bost J.B., Connes A., Hecke algebras, « Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory », *Selecta Math. (New Series)*, vol. 1, n° 3, 1995, 411-457.

[2] Connes A., « Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function », *Selecta Math. (N.S.)*, 5, n° 1, 1999, 29-106.

[3] Connes A., Consani C., « On the notion of geometry over $\mathbb{F}_1$ », *Journal of Algebraic Geometry*, à paraître ; arXiv08092926v2 [mathAG].

[4] Connes A., Consani C., « Schemes over $\mathbb{F}_1$ and zeta functions », *Compositio Mathematica* à paraître ; arXiv:0903.2024v3 [mathAG,NT].

[5] Connes A., Consani C., « Characteristic 1, entropy and the absolute point; arXiv:0911.3537v1 [mathAG].

[6] Connes A., Consani C., « The hyperring of adèle classes », arXiv:1001.4260v2 [mathAG].

[7] Connes A., Marcolli M., « Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives », *Colloquium Publications*, vol.55, American Mathematical Society, 2008.

[8] Ellers E., Karzel H., « Involutorische Geometrien », *Abh. Math. Sem. Univ.*, Hamburg, 25, 1961, 93-104 ; 50.48.

[9] Golan J., « Semi-ring s and their applications » (Updated and expanded version of « The theory of semi-ring s, with applications to mathematics and theoretical computer science », *Longman Sci. Tech.*, Harlow, 1992), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[10] Hall M., « Cyclic projective planes », *Duke Math.*, J. 14, 1947, 1079 ï¿½-1090.

[11] H. Karzel, « Bericht über projektive Inzidenzgruppen », *Jber. Deutsch. Math.-Verein*, 67, 1964/1965, Abt. 1, 58-92.

[12] Krasner M., « Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristique 0 », 1957 (Colloque d'algèbre supérieure, tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956), 129-206, Centre belge de recherches mathématiques, Établissements Ceuterick, Louvain ; Librairie Gauthier-Villars, Paris.

[13] Marty F., « Sur une généralisation de la notion de groupe », *Huitième Congrès des Mathématiciens*, Stockholm, 1934, 45-59.

[14] Procesi-Ciampi R., Rota R., « The hyperring spectrum », *Riv. Mat. Pura*, Appl. n° 1, 1987, 71-80.

[15] Viro O., « Multifields for tropical geometry I. multifields and dequantization », arXiv1006.3034v1.