

Formes, surfaces et polynômes : mathématiques pures ou appliquées ?

Alain Yger, Université Bordeaux 1

Lycée Montaigne, 15 Octobre 2009

« Patrons » de surfaces, triangulations, classification

Surfaces et polynômes

Du monde projectif au monde « tropical »

Retour à la « géométrie » des images (pensées comme des surfaces)

Conclusion

« Patrons » de surfaces, triangulations, classification

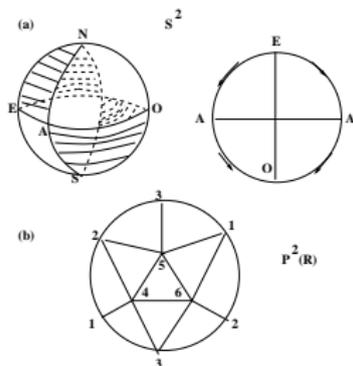
Surfaces et polynômes

Du monde projectif au monde « tropical »

Retour à la « géométrie » des images (pensées comme des surfaces)

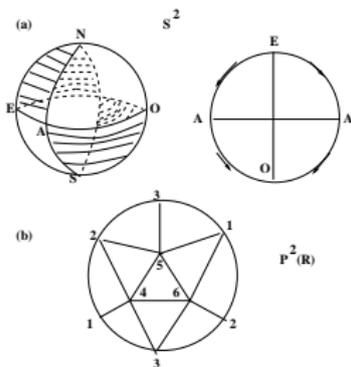
Conclusion

Une triangulation de la sphère S^2 et du plan projectif $P^2(\mathbb{R})$; Sommets, Arêtes, Faces



$$\chi(S) = S - A + F \quad (\text{la caractéristique d'Euler})$$

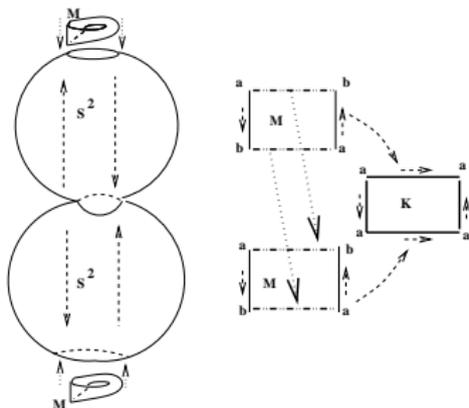
Une triangulation de la sphère S^2 et du plan projectif $P^2(\mathbb{R})$; Sommets, Arêtes, Faces



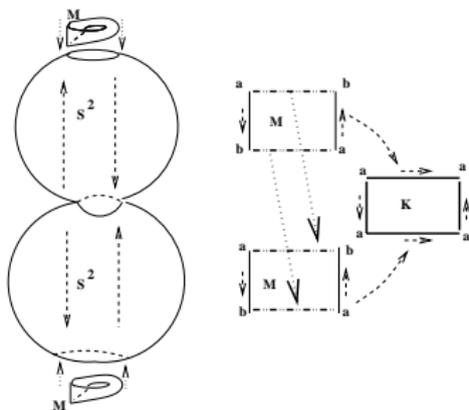
$$\chi(S) = S - A + F \quad (\text{la caractéristique d'Euler})$$

$$4 - 8 + 4 = 0 \quad (\text{sphère}) \quad 6 - 15 + 10 = 1 \quad (\text{plan projectif réel})$$

Où l'on incise \mathbb{S}^2 pour y coller des « anses » ou des rubans de Möbius ...



Où l'on incise \mathbb{S}^2 pour y coller des « anses » ou des rubans de Moëbius ...



La bouteille de Klein (avec son « patron ») réalisée comme « somme connexe » de deux plans projectifs réels.

Pour en arriver à l'énoncé du théorème de classification (Tibor Radó, 1925, *via* la preuve de l'existence d'une triangulation)

Toute surface compacte et connexe est homéomorphe :

Pour en arriver à l'énoncé du théorème de classification (Tibor Radó, 1925, *via* la preuve de l'existence d'une triangulation)

Toute surface compacte et connexe est homéomorphe :

- ▶ soit à la sphère \mathbb{S}^2 (caractéristique d'Euler = 0);

Pour en arriver à l'énoncé du théorème de classification (Tibor Radó, 1925, *via* la preuve de l'existence d'une triangulation)

Toute surface compacte et connexe est homéomorphe :

- ▶ soit à la sphère \mathbb{S}^2 (caractéristique d'Euler = 0);
- ▶ soit à la somme connexe de n copies du tore \mathbb{T}^2 (i.e. à une sphère excisée à laquelle on a recollé n anses), auquel cas la caractéristique d'Euler vaut $2 - 2n$ en vertu de la règle

$$\chi(S_0 \# S_1) = \chi(S_0) + \chi(S_1) - 2$$

et de ce que $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$;

Pour en arriver à l'énoncé du théorème de classification (Tibor Radó, 1925, *via* la preuve de l'existence d'une triangulation)

Toute surface compacte et connexe est homéomorphe :

- ▶ soit à la sphère \mathbb{S}^2 (caractéristique d'Euler = 0);
- ▶ soit à la somme connexe de n copies du tore \mathbb{T}^2 (i.e. à une sphère excisée à laquelle on a recollé n anses), auquel cas la caractéristique d'Euler vaut $2 - 2n$ en vertu de la règle

$$\chi(S_0 \# S_1) = \chi(S_0) + \chi(S_1) - 2$$

et de ce que $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$;

- ▶ soit à la somme connexe de n copies du plan projectif (i.e. une sphère excisée où l'on a recollé bord à bord à la frontière des excisions n rubans de Moëbius), auquel cas la caractéristique d'Euler vaut $2 - n$ car $\chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = 1$.

Le plan projectif et les polynômes à coefficients réels

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)}{\text{relation de colinéarité}} = \frac{\mathbb{S}^2(\mathbb{R})}{\text{antipodie : } (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)}$$

Le plan projectif et les polynômes à coefficients réels

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)}{\text{relation de colinéarité}} = \frac{\mathbb{S}^2(\mathbb{R})}{\text{antipodie : } (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} ; P(z) = az^2 + bz + c = 0\} \longleftrightarrow [a : b : c]$$

Le plan projectif et les polynômes à coefficients réels

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)}{\text{relation de colinéarité}} = \frac{\mathbb{S}^2(\mathbb{R})}{\text{antipodie : } (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} ; P(z) = az^2 + bz + c = 0\} \longleftrightarrow [a : b : c]$$

► $b^2 - 4ac < 0 :$

Le plan projectif et les polynômes à coefficients réels

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)}{\text{relation de colinéarité}} = \frac{\mathbb{S}^2(\mathbb{R})}{\text{antipodie : } (x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} ; P(z) = az^2 + bz + c = 0\} \longleftrightarrow [a : b : c]$$

- ▶ $b^2 - 4ac < 0$: deux racines complexes conjuguées z, \bar{z} , dont **une seule** (et on sait la reconnaître !) est dans le demi-plan $\text{Im } z > 0$; la classe $[a : b : c]$ est en correspondance avec un point de ce demi-plan, donc avec **un point du disque unité ouvert** D .

Le plan projectif et les polynômes à coefficients réels

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)}{\text{relation de colinéarité}} = \frac{\mathbb{S}^2(\mathbb{R})}{\text{antipodie : } (x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} ; P(z) = az^2 + bz + c = 0\} \longleftrightarrow [a : b : c]$$

- ▶ $b^2 - 4ac < 0$: deux racines complexes conjuguées z, \bar{z} , dont **une seule** (et on sait la reconnaître !) est dans le demi-plan $\text{Im } z > 0$; la classe $[a : b : c]$ est en correspondance avec un point de ce demi-plan, donc avec **un point du disque unité ouvert** D .
- ▶ $b^2 - 4ac = 0$:

Le plan projectif et les polynômes à coefficients réels

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)}{\text{relation de colinéarité}} = \frac{\mathbb{S}^2(\mathbb{R})}{\text{antipodie : } (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} ; P(z) = az^2 + bz + c = 0\} \longleftrightarrow [a : b : c]$$

- ▶ $b^2 - 4ac < 0$: deux racines complexes conjuguées z, \bar{z} , dont **une seule** (et on sait la reconnaître !) est dans le demi-plan $\text{Im } z > 0$; la classe $[a : b : c]$ est en correspondance avec un point de ce demi-plan, donc avec **un point du disque unité ouvert** D .
- ▶ $b^2 - 4ac = 0$: une racine double (réelle) ; la classe $[a : b : c]$ est en correspondance avec un point de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, donc avec **un point du cercle unité**.

Le plan projectif et les polynômes à coefficients réels

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)}{\text{relation de colinéarité}} = \frac{\mathbb{S}^2(\mathbb{R})}{\text{antipodie : } (x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} ; P(z) = az^2 + bz + c = 0\} \longleftrightarrow [a : b : c]$$

- ▶ $b^2 - 4ac < 0$: deux racines complexes conjuguées z, \bar{z} , dont **une seule** (et on sait la reconnaître !) est dans le demi-plan $\text{Im } z > 0$; la classe $[a : b : c]$ est en correspondance avec un point de ce demi-plan, donc avec **un point du disque unité ouvert** D .
- ▶ $b^2 - 4ac = 0$: une racine double (réelle) ; la classe $[a : b : c]$ est en correspondance avec un point de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, donc avec **un point du cercle unité**.
- ▶ $b^2 - 4ac > 0$:

Le plan projectif et les polynômes à coefficients réels

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)}{\text{relation de colinéarité}} = \frac{\mathbb{S}^2(\mathbb{R})}{\text{antipodie : } (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} ; P(z) = az^2 + bz + c = 0\} \longleftrightarrow [a : b : c]$$

- ▶ $b^2 - 4ac < 0$: deux racines complexes conjuguées z, \bar{z} , dont **une seule** (et on sait la reconnaître !) est dans le demi-plan $\text{Im } z > 0$; la classe $[a : b : c]$ est en correspondance avec un point de ce demi-plan, donc avec **un point du disque unité ouvert** D .
- ▶ $b^2 - 4ac = 0$: une racine double (réelle) ; la classe $[a : b : c]$ est en correspondance avec un point de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, donc avec **un point du cercle unité**.
- ▶ $b^2 - 4ac > 0$: un couple de racines réelles $\{\alpha, \beta\}$, dont l'une (mais laquelle ?) est strictement plus grande que l'autre : $[a : b : c]$ est identifié à **un point d'un ruban de Moëbius « collé »** au disque fermé \bar{D} « bord à bord ».

Plan projectif et perspective (Girard Desargues, vers 1650)

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\text{Groupe multiplicatif} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\text{Sous - groupe défini par les équations} : x = y = z}$$



Plan projectif et perspective (Girard Desargues, vers 1650)

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\text{Groupe multiplicatif : } \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}}{\text{Sous - groupe défini par les équations : } x = y = z}$$



La droite dirigée par le vecteur $(x, y, z) \neq 0$ de \mathbb{R}^3 , considérée comme droite dans l'espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, « perce » le « monde à l'infini » identifié au plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ précisément au seul point $[x : y : z]$.

Le tore $\mathbb{T}^2(\mathbb{R})$, les réseaux et les cubiques

$$\mathbb{T}^2(\mathbb{R}) \simeq \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}, \quad \Lambda := \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}, \quad \text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0.$$

Le tore $\mathbb{T}^2(\mathbb{R})$, les réseaux et les cubiques

$$\mathbb{T}^2(\mathbb{R}) \simeq \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}, \quad \Lambda := \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}, \quad \text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0.$$

$$g_2 := 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 := 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

Le tore $\mathbb{T}^2(\mathbb{R})$, les réseaux et les cubiques

$$\mathbb{T}^2(\mathbb{R}) \simeq \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}, \quad \Lambda := \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}, \quad \text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0.$$

$$g_2 := 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 := 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

Pour $\zeta \notin \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$, on définit la fonction Λ -périodique de Weierstrass et sa « dérivée » :

$$\mathcal{P}(\zeta) := \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(\zeta - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}'(\zeta) := -2 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(\zeta - \omega)^3}.$$

Le tore $\mathbb{T}^2(\mathbb{R})$, les réseaux et les cubiques

$$\mathbb{T}^2(\mathbb{R}) \simeq \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}, \quad \Lambda := \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}, \quad \text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0.$$

$$g_2 := 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 := 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

Pour $\zeta \notin \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$, on définit la fonction Λ -périodique de Weierstrass et sa « dérivée » :

$$\mathcal{P}(\zeta) := \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(\zeta - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}'(\zeta) := -2 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(\zeta - \omega)^3}.$$

$$(\mathcal{P}'(\zeta))^2 = 4(\mathcal{P}(\zeta))^3 - g_2\mathcal{P}(\zeta) - g_3.$$

Le tore $\mathbb{T}^2(\mathbb{R})$, les réseaux et les cubiques

$$\mathbb{T}^2(\mathbb{R}) \simeq \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}, \quad \Lambda := \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}, \quad \text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0.$$

$$g_2 := 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 := 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

Pour $\zeta \notin \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$, on définit la fonction Λ -périodique de Weierstrass et sa « dérivée » :

$$\mathcal{P}(\zeta) := \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(\zeta - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}'(\zeta) := -2 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(\zeta - \omega)^3}.$$

$$(\mathcal{P}'(\zeta))^2 = 4(\mathcal{P}(\zeta))^3 - g_2\mathcal{P}(\zeta) - g_3.$$

Si l'on pose $z := \mathcal{P}(\zeta)$ et $w = \mathcal{P}'(\zeta)$, on voit que le point (z, w) est un point de la cubique $\Gamma := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, w^2 - 4z^3 - g_2z - g_3 = 0\}$.

Le tore $\mathbb{T}^2(\mathbb{R})$, les réseaux et les cubiques

$$\mathbb{T}^2(\mathbb{R}) \simeq \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}, \quad \Lambda := \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}, \quad \text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0.$$

$$g_2 := 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 := 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

Pour $\zeta \notin \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$, on définit la fonction Λ -périodique de Weierstrass et sa « dérivée » :

$$\mathcal{P}(\zeta) := \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(\zeta - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}'(\zeta) := -2 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(\zeta - \omega)^3}.$$

$$(\mathcal{P}'(\zeta))^2 = 4(\mathcal{P}(\zeta))^3 - g_2\mathcal{P}(\zeta) - g_3.$$

Si l'on pose $z := \mathcal{P}(\zeta)$ et $w = \mathcal{P}'(\zeta)$, on voit que le point (z, w) est un point de la cubique $\Gamma := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, w^2 - 4z^3 - g_2z - g_3 = 0\}$.

L'application qui à la classe de ζ modulo Λ associe

$(z, w) = (\mathcal{P}(\zeta), \mathcal{P}'(\zeta)) \in \Gamma$ est un homéomorphisme!

Courbes projectives et surfaces

Une courbe projective est un sous-ensemble de l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ défini comme le lieu des zéros d'un polynôme homogène en trois variables. Si le polynôme est de degré 2, c'est une **conique**, s'il est de degré trois, une **cubique**, de degré quatre, une **quartique**, ...

Courbes projectives et surfaces

Une courbe projective est un sous-ensemble de l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ défini comme le lieu des zéros d'un polynôme homogène en trois variables. Si le polynôme est de degré 2, c'est une **conique**, s'il est de degré trois, une **cube**, de degré quatre, une **quartique**, ...

Si on ne voit la courbe que dans le monde réel, c'est une courbe bien sûr ! Mais dans \mathbb{C} ou dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (on quotiente par la relation de colinéarité, c'est aussi l'infini de $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$), c'est « presque » une surface (**deux** équations pour **quatre** degrés de liberté !). C'est même une surface orientable car elle est paramétrée par un paramètre complexe et que ceci préside à une orientation (une transformation \mathbb{C} -linéaire est une similitude toujours directe !). Il y a juste le problème des **points singuliers** (mais les « vraies » surfaces du monde qui nous entoure n'en ont-elles pas toujours ?).

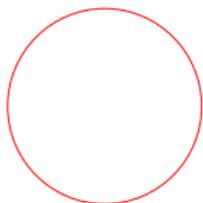
Courbes projectives et surfaces

Une courbe projective est un sous-ensemble de l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ défini comme le lieu des zéros d'un polynôme homogène en trois variables. Si le polynôme est de degré 2, c'est une **conique**, s'il est de degré trois, une **cubique**, de degré quatre, une **quartique**, ...

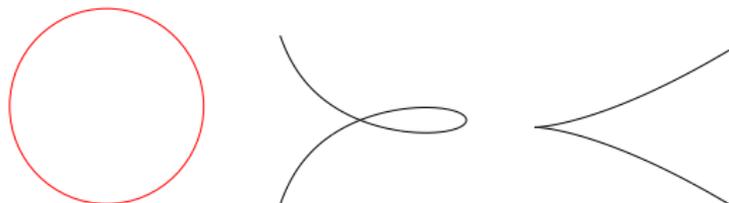
Si on ne voit la courbe que dans le monde réel, c'est une courbe bien sûr ! Mais dans \mathbb{C} ou dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (on quotiente par la relation de colinéarité, c'est aussi l'infini de $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$), c'est « presque » une surface (**deux** équations pour **quatre** degrés de liberté !). C'est même une surface orientable car elle est paramétrée par un paramètre complexe et que ceci préside à une orientation (une transformation \mathbb{C} -linéaire est une similitude toujours directe !). Il y a juste le problème des **points singuliers** (mais les « vraies » surfaces du monde qui nous entoure n'en ont-elles pas toujours ?).

Quitte à retirer les points qui sont singuliers (il n'y en a ici qu'au plus qu'un nombre fini et on dit alors qu'on « normalise »), on a vraiment affaire à une surface.

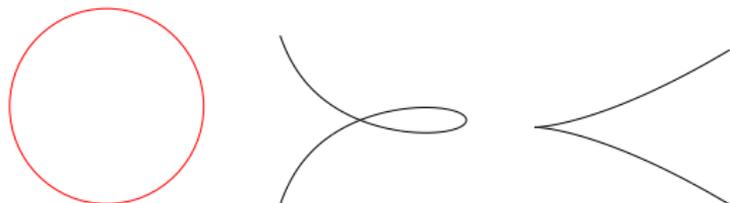
Coniques et cubiques (suite)



Coniques et cubiques (suite)



Coniques et cubiques (suite)

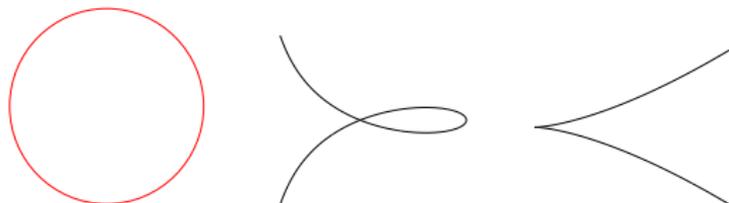


$$z \mapsto \left[1 : \frac{1-z^2}{1+z^2} : \frac{2z}{1+z^2} \right] \quad (z = \sin(t/2))$$

$$z \mapsto \left[1 : \frac{1-z^2}{1+z^2} : \frac{z(1-z^2)}{1+z^2} \right]$$

$$z \mapsto \left[1 : z^3 : z^2 \right]$$

Coniques et cubiques (suite)



$$z \mapsto \left[1 : \frac{1-z^2}{1+z^2} : \frac{2z}{1+z^2} \right] \quad (z = \sin(t/2))$$

$$z \mapsto \left[1 : \frac{1-z^2}{1+z^2} : \frac{z(1-z^2)}{1+z^2} \right]$$

$$z \mapsto \left[1 : z^3 : z^2 \right]$$

Les coniques et les cubiques ayant un point singulier se paramètrent de manière rationnelle ; la **surface** correspondante est la sphère \mathbb{S}^2 . Pour les cubiques sans point singulier, c'est le tore (comme on l'a vu). Une courbe projective vue comme cela a ainsi un **genre** : le nombre de trous de la surface qu'elle représente !

« Patrons » de surfaces, triangulations, classification

Surfaces et polynômes

Du monde projectif au monde « tropical »

Retour à la « géométrie » des images (pensées comme des surfaces)

Conclusion

L'arithmétique tropicale : une « découverte » des informaticiens venue du Brésil

On travaille avec des opérations sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

L'arithmétique tropicale : une « découverte » des informaticiens venue du Brésil

On travaille avec des opérations sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

- ▶ Une addition « tropicale » définie par $x \oplus y := \max(x, y)$.

L'arithmétique tropicale : une « découverte » des informaticiens venue du Brésil

On travaille avec des opérations sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

- ▶ Une addition « tropicale » définie par $x \oplus y := \max(x, y)$.
- ▶ Une multiplication « tropicale » définie par $x \otimes y := x + y$

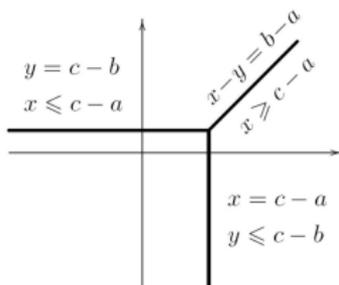
Les « droites » tropicales et l'apparition des « amibes »

$$az + bw + c \longleftrightarrow (a \otimes x) \oplus (b \otimes y) \oplus (c \otimes 1)$$

Les « droites » tropicales et l'apparition des « amibes »

$$az + bw + c \longleftrightarrow (a \otimes x) \oplus (b \otimes y) \oplus (c \otimes 1)$$

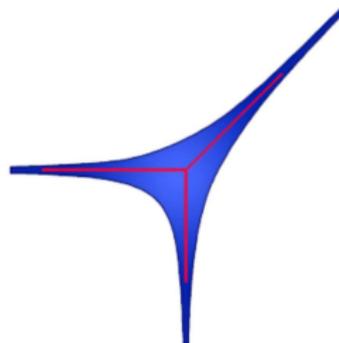
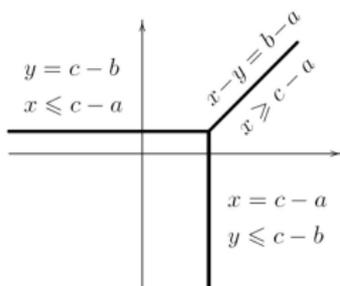
$$F(x, y) = \max(x + a, y + b, c)$$



Les « droites » tropicales et l'apparition des « amibes »

$$az + bw + c \longleftrightarrow (a \otimes x) \oplus (b \otimes y) \oplus (c \otimes 1)$$

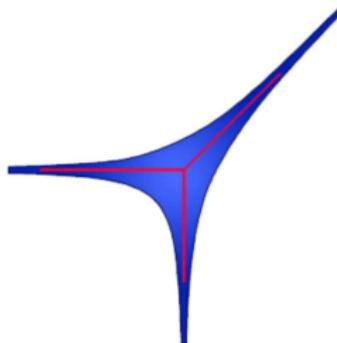
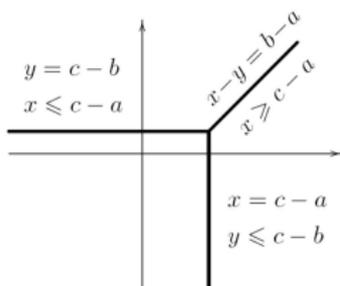
$$F(x, y) = \max(x + a, y + b, c)$$



Les « droites » tropicales et l'apparition des « amibes »

$$az + bw + c \longleftrightarrow (a \otimes x) \oplus (b \otimes y) \oplus (c \otimes 1)$$

$$F(x, y) = \max(x + a, y + b, c)$$

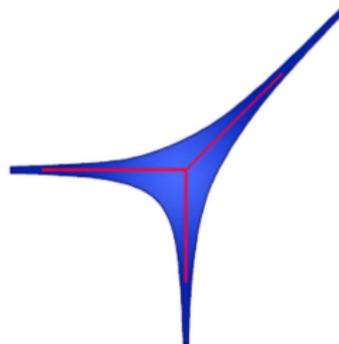
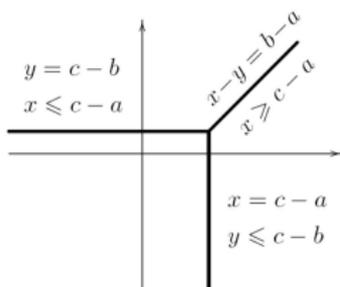


$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* ; az + bw + c = 0\} \xrightarrow{(\log |z|, \log |w|)} \mathcal{A}_{\{az+bw+c\}}$$

Les « droites » tropicales et l'apparition des « amibes »

$$az + bw + c \longleftrightarrow (a \otimes x) \oplus (b \otimes y) \oplus (c \otimes 1)$$

$$F(x, y) = \max(x + a, y + b, c)$$



$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* ; az + bw + c = 0\} \xrightarrow{(\log |z|, \log |w|)} \mathcal{A}_{\{az+bw+c\}}$$

\mathcal{A} pour « Amibe » (pensez à une amibe vertébrée en biologie!).

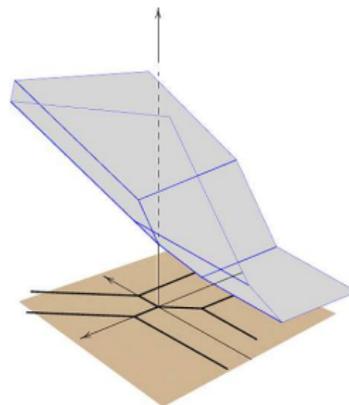
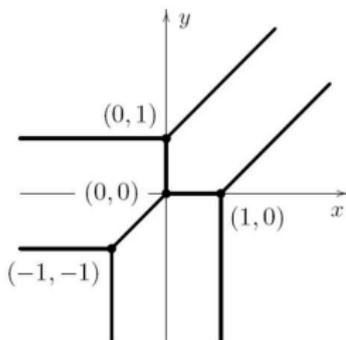
Une conique (dégénérée!) ... du complexe au tropical

$$P(z, w) = z^2 + w^2 + 2zw + 2z + 2w + 1 = (z + w)^2 + 2(z + w) + 1 = 0$$

Une conique (dégénérée!) ... du complexe au tropical

$$P(z, w) = z^2 + w^2 + 2zw + 2z + 2w + 1 = (z + w)^2 + 2(z + w) + 1 = 0$$

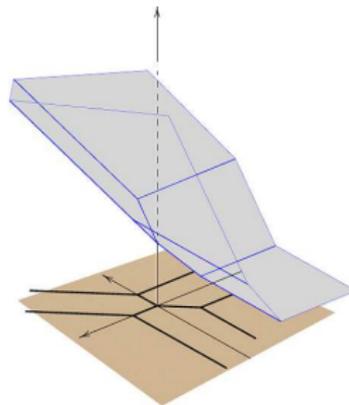
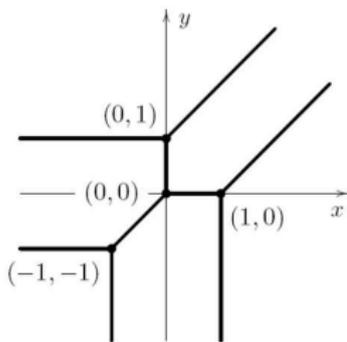
$$F(x, y) = \max(1 + 2x, 1 + 2y, 2 + x + y, 2 + x, 2 + y, 1)$$



Une conique (dégénérée!) ... du complexe au tropical

$$P(z, w) = z^2 + w^2 + 2zw + 2z + 2w + 1 = (z + w)^2 + 2(z + w) + 1 = 0$$

$$F(x, y) = \max(1 + 2x, 1 + 2y, 2 + x + y, 2 + x, 2 + y, 1)$$



$$F(x, y) = (1 \otimes x \otimes x) \oplus (1 \otimes y \otimes y) \oplus (2 \otimes x \otimes y) \oplus (2 \otimes x) \oplus (2 \otimes y) \oplus (1 \otimes 1)$$

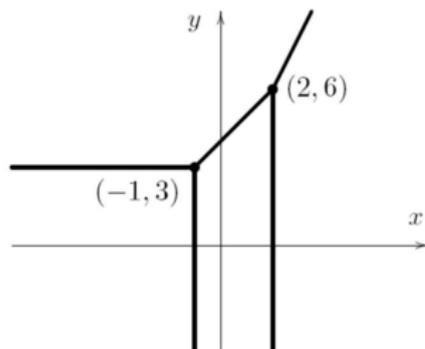
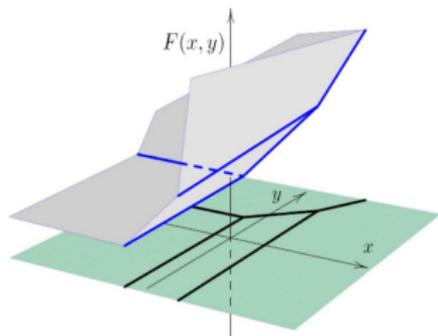
Une « parabole » ... du complexe au tropical

$$P(z, w) = -w + z^2 + 3z + 1 = 0$$

Une « parabole » ... du complexe au tropical

$$P(z, w) = -w + z^2 + 3z + 1 = 0$$

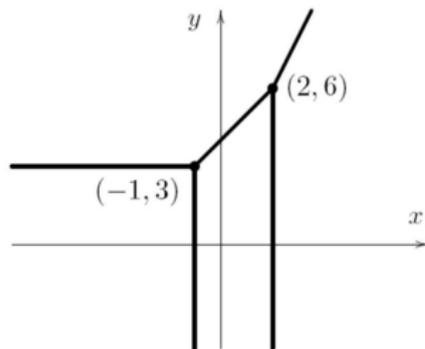
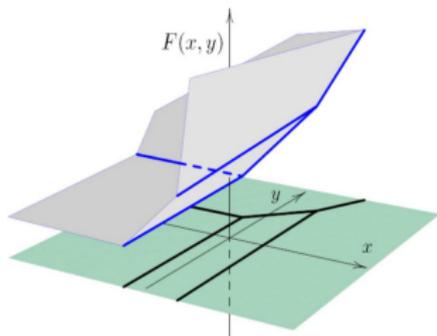
$$F(x, y) = \max(y - 1, 2x + 1, x + 3, 1)$$



Une « parabole » ... du complexe au tropical

$$P(z, w) = -w + z^2 + 3z + 1 = 0$$

$$F(x, y) = \max(y - 1, 2x + 1, x + 3, 1)$$



$$F(x, y) = ((-1) \otimes y) \oplus (2 \otimes x \otimes x) \oplus (3 \otimes x) \oplus (1 \otimes 1)$$

Comment « détecter » les singularités d'une fonction de deux variables ?



Comment « détecter » les singularités d'une fonction de deux variables ?



Ici, par exemple, celles du maximum d'un nombre fini de fonctions affines

$$f : (x, y) \mapsto ax + by + c.$$

Un exemple de cubique ... du complexe au tropical

$$P(z, w) = 1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2$$

Un exemple de cubique ... du complexe au tropical

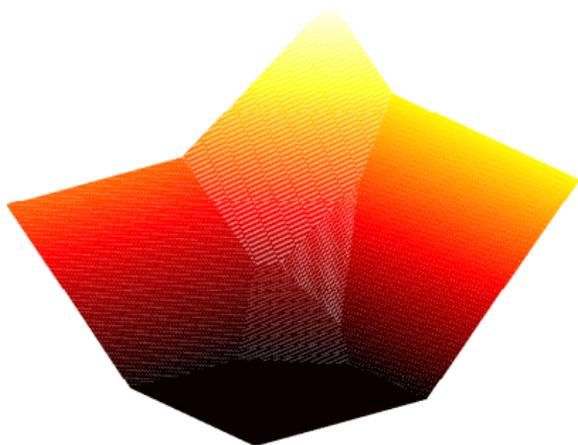
$$P(z, w) = 1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2$$

$$F(x, y) = \max(1, 5 + x + y, 2y + 1, 3x - 1, 2x + y + 3, 2x + 2y - 1)$$

Un exemple de cubique ... du complexe au tropical

$$P(z, w) = 1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2$$

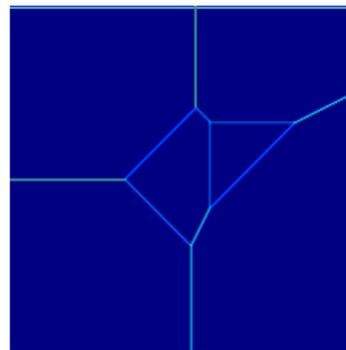
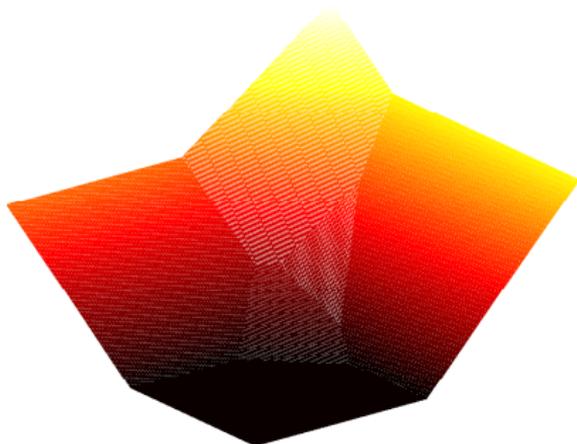
$$F(x, y) = \max(1, 5 + x + y, 2y + 1, 3x - 1, 2x + y + 3, 2x + 2y - 1)$$



Un exemple de cubique ... du complexe au tropical

$$P(z, w) = 1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2$$

$$F(x, y) = \max(1, 5 + x + y, 2y + 1, 3x - 1, 2x + y + 3, 2x + 2y - 1)$$



L'analyse « isotrope » d'image suivant la décomposition d'Alfred Haar (1909)

$$R[I]_{2k_1, 2k_2} = \frac{l_{2k_1, 2k_2} + l_{2k_1+1, 2k_2} + l_{2k_1, 2k_2+1} + l_{2k_1+1, 2k_2+1}}{2}$$

$$DV[I]_{2k_1, 2k_2} = \frac{l_{2k_1, 2k_2} + l_{2k_1+1, 2k_2} - l_{2k_1, 2k_2+1} - l_{2k_1+1, 2k_2+1}}{2}$$

$$DH[I]_{2k_1, 2k_2} = \frac{l_{2k_1, 2k_2} - l_{2k_1+1, 2k_2} + l_{2k_1, 2k_2+1} - l_{2k_1+1, 2k_2+1}}{2}$$

$$DD[I]_{2k_1, 2k_2} = \frac{l_{2k_1, 2k_2} - l_{2k_1+1, 2k_2} - l_{2k_1, 2k_2+1} + l_{2k_1+1, 2k_2+1}}{2}$$

L'analyse « isotrope » d'image suivant la décomposition d'Alfred Haar (1909)

$$R[I]_{2k_1, 2k_2} = \frac{l_{2k_1, 2k_2} + l_{2k_1+1, 2k_2} + l_{2k_1, 2k_2+1} + l_{2k_1+1, 2k_2+1}}{2}$$

$$DV[I]_{2k_1, 2k_2} = \frac{l_{2k_1, 2k_2} + l_{2k_1+1, 2k_2} - l_{2k_1, 2k_2+1} - l_{2k_1+1, 2k_2+1}}{2}$$

$$DH[I]_{2k_1, 2k_2} = \frac{l_{2k_1, 2k_2} - l_{2k_1+1, 2k_2} + l_{2k_1, 2k_2+1} - l_{2k_1+1, 2k_2+1}}{2}$$

$$DD[I]_{2k_1, 2k_2} = \frac{l_{2k_1, 2k_2} - l_{2k_1+1, 2k_2} - l_{2k_1, 2k_2+1} + l_{2k_1+1, 2k_2+1}}{2}$$

« R » pour « Résumé », « DV » pour « Détails Verticaux », « DH » pour « Détails Horizontaux », « DD » pour « Détails Diagonaux »

« Patrons » de surfaces, triangulations, classification

Surfaces et polynômes

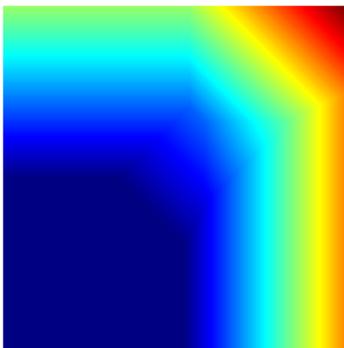
Du monde projectif au monde « tropical »

Retour à la « géométrie » des images (pensées comme des surfaces)

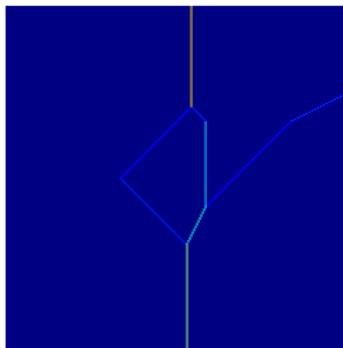
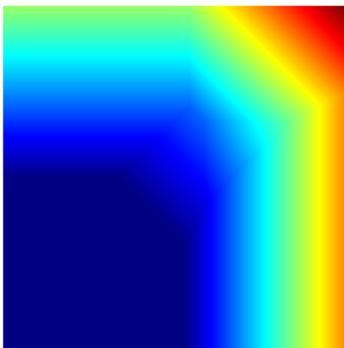
Conclusion

La mise en œuvre sur notre exemple

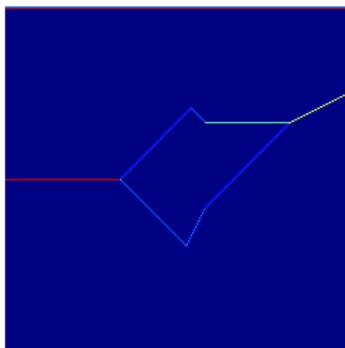
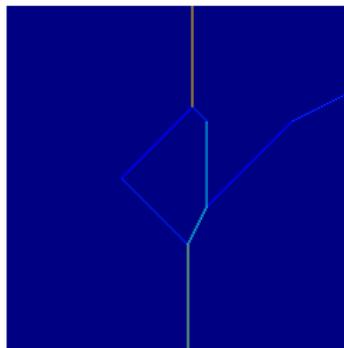
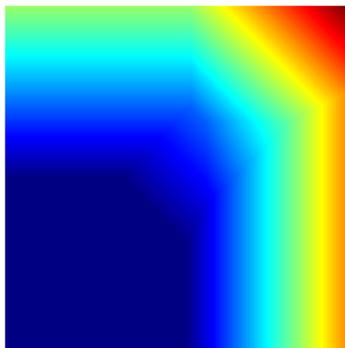
La mise en œuvre sur notre exemple



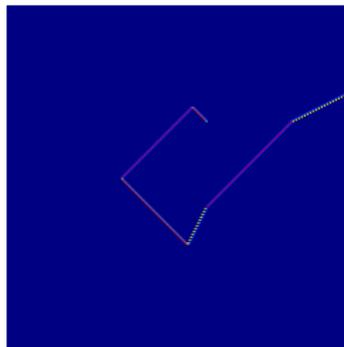
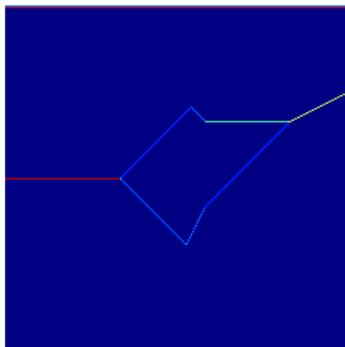
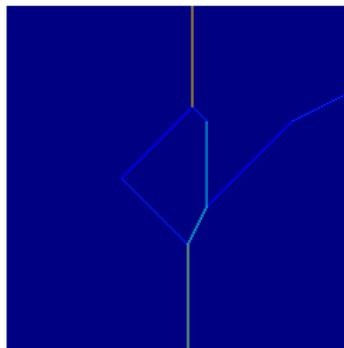
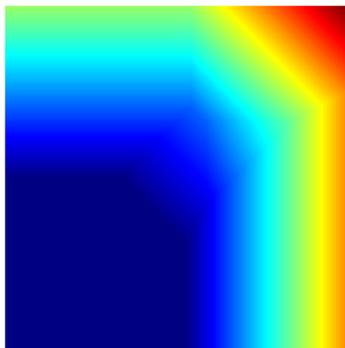
La mise en œuvre sur notre exemple



La mise en œuvre sur notre exemple



La mise en œuvre sur notre exemple



Le « toit » d'un polynôme tropical (« éclairé » de dessus)

$$F(x, y) = \bigoplus_{j=1}^M c_j \otimes x^{\otimes p_j} \otimes y^{\otimes q_j} \quad K = \text{conv}_{\mathbb{R}^3} \left(\left\{ (p_j, q_j, c_j) ; j = 1, \dots, M \right\} \right).$$

Le « toit » d'un polynôme tropical (« éclairé » de dessus)

$$F(x, y) = \bigoplus_{j=1}^M c_j \otimes x^{\otimes p_j} \otimes y^{\otimes q_j} \quad K = \text{conv}_{\mathbb{R}^3} \left(\left\{ (p_j, q_j, c_j) ; j = 1, \dots, M \right\} \right).$$

$$P(z, w) = 1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2$$

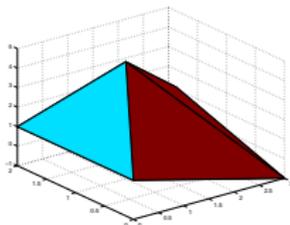
$$F(x, y) = (1 \otimes 1) + (5 \otimes x \otimes y) + (1 \otimes y^{\otimes 2}) + ((-1) \otimes x^{\otimes 3}) \\ + (3 \otimes x^{\otimes 2} \otimes y) + ((-1) \otimes x^{\otimes 2} \otimes y^{\otimes 2})$$

Le « toit » d'un polynôme tropical (« éclairé » de dessus)

$$F(x, y) = \bigoplus_{j=1}^M c_j \otimes x^{\otimes p_j} \otimes y^{\otimes q_j} \quad K = \text{conv}_{\mathbb{R}^3} \left(\left\{ (p_j, q_j, c_j) ; j = 1, \dots, M \right\} \right).$$

$$P(z, w) = 1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2$$

$$F(x, y) = (1 \otimes 1) + (5 \otimes x \otimes y) + (1 \otimes y^{\otimes 2}) + ((-1) \otimes x^{\otimes 3}) \\ + (3 \otimes x^{\otimes 2} \otimes y) + ((-1) \otimes x^{\otimes 2} \otimes y^{\otimes 2})$$

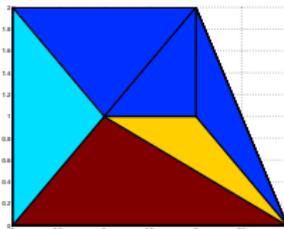
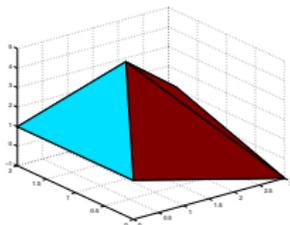


Le « toit » d'un polynôme tropical (« éclairé » de dessus)

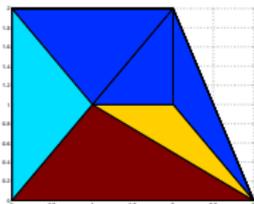
$$F(x, y) = \bigoplus_{j=1}^M c_j \otimes x^{\otimes p_j} \otimes y^{\otimes q_j} \quad K = \text{conv}_{\mathbb{R}^3} \left(\left\{ (p_j, q_j, c_j) ; j = 1, \dots, M \right\} \right).$$

$$P(z, w) = 1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2$$

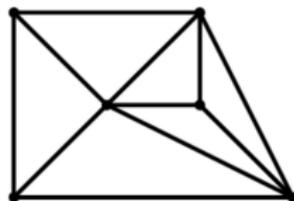
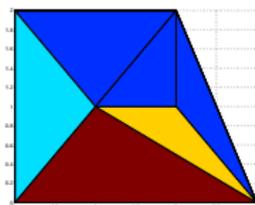
$$F(x, y) = (1 \otimes 1) + (5 \otimes x \otimes y) + (1 \otimes y^{\otimes 2}) + ((-1) \otimes x^{\otimes 3}) \\ + (3 \otimes x^{\otimes 2} \otimes y) + ((-1) \otimes x^{\otimes 2} \otimes y^{\otimes 2})$$



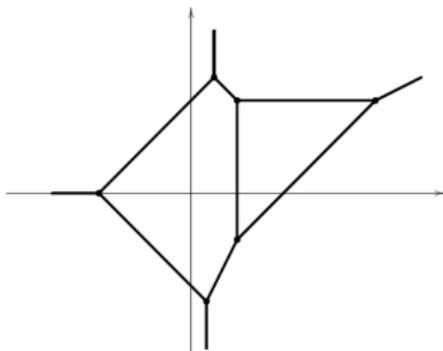
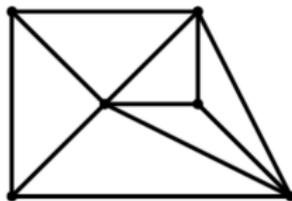
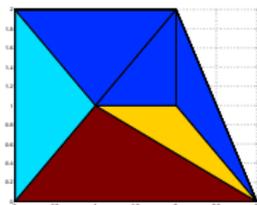
Deux « tessellations » duales : celle générée par le toit T_F
et celle générée par la courbe tropicale Γ_F



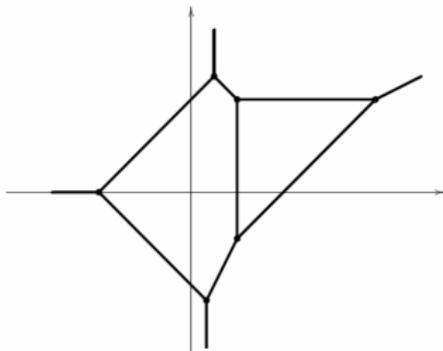
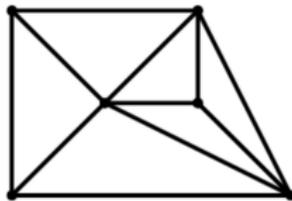
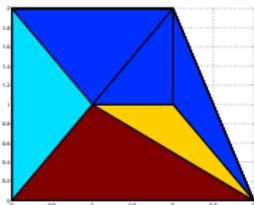
Deux « tessellations » duales : celle générée par le toit T_F et celle générée par la courbe tropicale Γ_F



Deux « tessellations » duales : celle générée par le toit T_F et celle générée par la courbe tropicale Γ_F

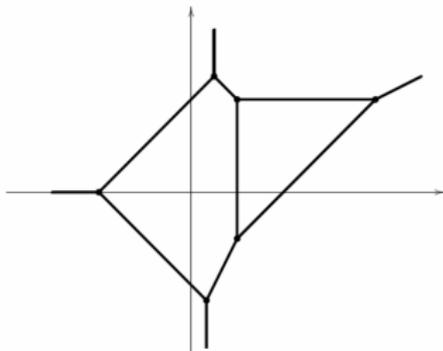
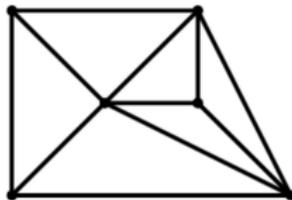
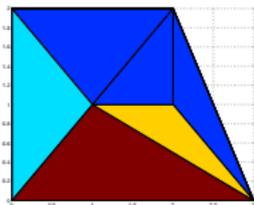


Deux « tessellations » duales : celle générée par le toit T_F et celle générée par la courbe tropicale Γ_F



On compare les nombres de sommets, d'arêtes et de faces dans les deux « tessellations », l'une de l'enveloppe convexe des exposants du polynôme F (induite par T_F), l'autre du plan (induite par Γ_F).

Deux « tessellations » duales : celle générée par le toit T_F et celle générée par la courbe tropicale Γ_F



On compare les nombres de sommets, d'arêtes et de faces dans les deux « tessellations », l'une de l'enveloppe convexe des exposants du polynôme F (**induite par T_F**), l'autre du plan (**induite par Γ_F**).

$$\#(S_{T_F}) = \#(F_{\Gamma_F}) \quad \#(A_{T_F}) = \#(A_{\Gamma_F}) \quad \#(F_{T_F}) = \#(S_{\Gamma_F})$$

« Patrons » de surfaces, triangulations, classification

Surfaces et polynômes

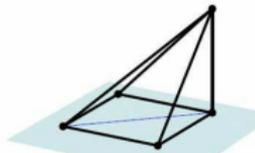
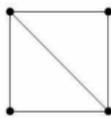
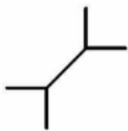
Du monde projectif au monde « tropical »

Retour à la « géométrie » des images (pensées comme des surfaces)

Conclusion

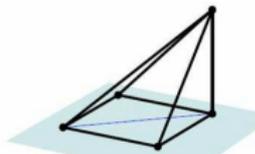
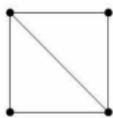
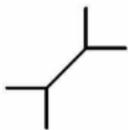
Avec parfois des coefficients nuls (en tropical) « forcés »

Avec parfois des coefficients nuls (en tropical) « forcés »

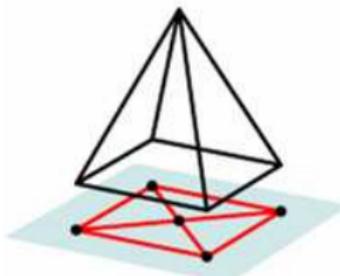
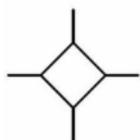


$$F(x, y) = (0 \otimes 1) \oplus (2 \otimes x) \oplus (0 \otimes x \otimes y) \oplus (0 \otimes y)$$

Avec parfois des coefficients nuls (en tropical) « forcés »

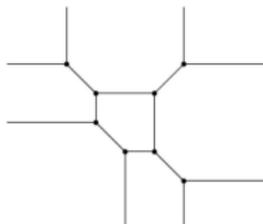
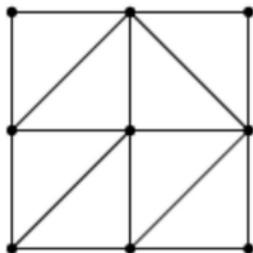


$$F(x, y) = (0 \otimes 1) \oplus (2 \otimes x) \oplus (0 \otimes x \otimes y) \oplus (0 \otimes y)$$

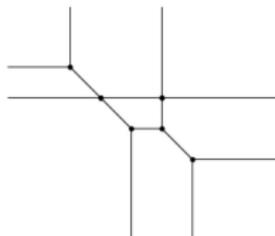
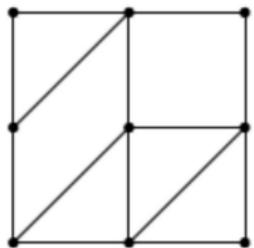
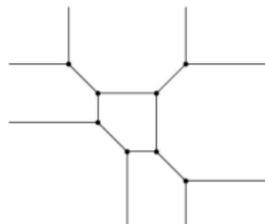
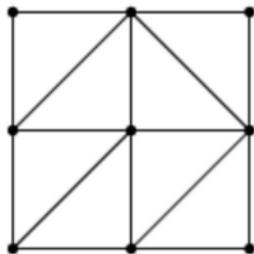


$$F(x, y) = (1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2}) \oplus (1 \otimes x^{\otimes 2} \otimes y^{\otimes 2}) \oplus (1 \otimes y^{\otimes 2}) \oplus (3 \otimes x \otimes y)$$

Encore d'autres exemples



Encore d'autres exemples



$$\#(S_{T_F}) = \#(F_{\Gamma_F})$$

$$\#(A_{T_F}) = \#(A_{\Gamma_F})$$

$$\#(F_{T_F}) = \#(S_{\Gamma_F})$$

L'« amibe » d'un polynôme de $\mathbb{C}[z, w]$

$$P(z, w) = \sum_{j=1}^N c_j z^{p_j} w^{q_j} \quad (P(z, w) = 1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2)$$

L'« amibe » d'un polynôme de $\mathbb{C}[z, w]$

$$P(z, w) = \sum_{j=1}^N c_j z^{p_j} w^{q_j} \quad (P(z, w) = 1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2)$$

$$\mathcal{A}_{(P)} = \text{Log} \left(\left\{ (z, w) \in (\mathbb{C}^*)^2; P(z, w) = 0 \right\} \right)$$

$$\text{Log}((z, w)) = (\log |z|, \log |w|).$$

L'« amibe » d'un polynôme de $\mathbb{C}[z, w]$

$$P(z, w) = \sum_{j=1}^N c_j z^{p_j} w^{q_j} \quad (P(z, w) = 1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2)$$

$$\mathcal{A}_{(P)} = \text{Log} \left(\left\{ (z, w) \in (\mathbb{C}^*)^2; P(z, w) = 0 \right\} \right)$$

$$\text{Log}((z, w)) = (\log |z|, \log |w|).$$

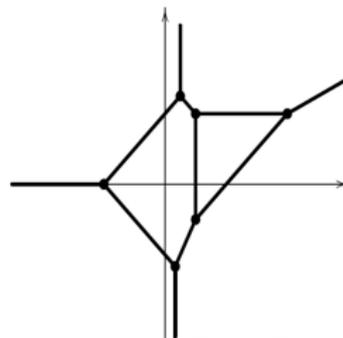


L'« amibe » d'un polynôme de $\mathbb{C}[z, w]$

$$P(z, w) = \sum_{j=1}^N c_j z^{p_j} w^{q_j} \quad (P(z, w) = 1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2)$$

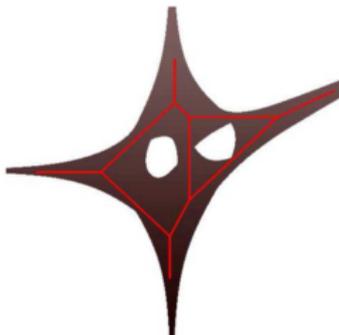
$$\mathcal{A}_{(P)} = \text{Log} \left(\left\{ (z, w) \in (\mathbb{C}^*)^2; P(z, w) = 0 \right\} \right)$$

$$\text{Log}((z, w)) = (\log |z|, \log |w|).$$

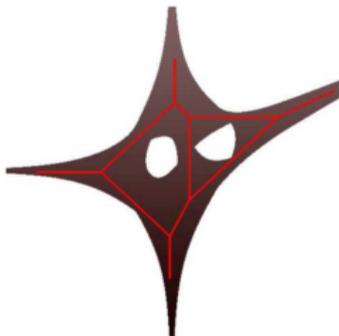


Comme en biologie, l'« amibe » d'un polynôme est
« vertébrée » : elle semble pouvoir se rétracter sur un
« squelette »

Comme en biologie, l'« amibe » d'un polynôme est
« vertébrée » : elle semble pouvoir se rétracter sur un
« squelette »



Comme en biologie, l'« amibe » d'un polynôme est « vertébrée » : elle semble pouvoir se rétracter sur un « squelette »



Les composantes connexes du complémentaire de l'amibe sont **convexes**.
Chacune correspond à une manière de développer :

$$\frac{1}{P(z, w)} = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2} \gamma_{k_1, k_2} z^{k_1} w^{k_2}.$$

Où l'analyse de Fourier suggère une piste ...

$$(x, y) \in \mathcal{A}_{(P)}^c \longmapsto \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{x+i\theta_1}, e^{y+i\theta_2})| d\theta_1 d\theta_2$$

est une fonction affine par morceaux dans chaque composante du complémentaire.

Où l'analyse de Fourier suggère une piste ...

$$(x, y) \in \mathcal{A}_{(P)}^c \longmapsto \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{x+i\theta_1}, e^{y+i\theta_2})| d\theta_1 d\theta_2$$

est une fonction affine par morceaux dans chaque composante du complémentaire.

Où l'analyse de Fourier suggère une piste ...

$$(x, y) \in \mathcal{A}_{(P)}^c \longmapsto \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{x+i\theta_1}, e^{y+i\theta_2})| d\theta_1 d\theta_2$$

est une fonction affine par morceaux dans chaque composante du complémentaire.

Dans une composante U , elle s'écrit

$$N(x, y) = a_U x + b_U y + c_U, \quad c_U \in \mathbb{R}, (a_U, b_U) \in \Delta(P) \cap \mathbb{N}^2,$$

où $\Delta(P)$ est l'enveloppe convexe des exposants (p_j, q_j) de P (la « base » de la toiture du polynôme tropical correspondant à P).

Où l'analyse de Fourier suggère une piste ...

$$(x, y) \in \mathcal{A}_{(P)}^c \longmapsto \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P(e^{x+i\theta_1}, e^{y+i\theta_2})| d\theta_1 d\theta_2$$

est une fonction affine par morceaux dans chaque composante du complémentaire.

Dans une composante U , elle s'écrit

$$N(x, y) = a_U x + b_U y + c_U, \quad c_U \in \mathbb{R}, (a_U, b_U) \in \Delta(P) \cap \mathbb{N}^2,$$

où $\Delta(P)$ est l'enveloppe convexe des exposants (p_j, q_j) de P (la « base » de la toiture du polynôme tropical correspondant à P).

Un même (a_U, b_U) ne saurait être attaché à deux composantes connexes distinctes !

Un polynôme, une surface, une forme

Un polynôme, une surface, une forme

L'amibe de P peut se rétracter sur la courbe tropicale correspondant au polynôme

$$\bigoplus_U c_U \otimes x^{\otimes a_U} \otimes y^{\otimes b_U}.$$

Chaque sommet s de Δ génère une composante non bornée U_s dont le « cône de récession » est le cône (« dual » de s) déterminé par les normales extérieures aux deux arêtes de Δ se rencontrant en s .

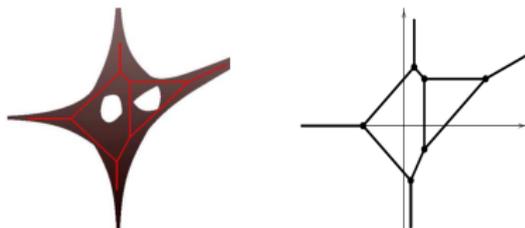


Un polynôme, une surface, une forme

L'amibe de P peut se rétracter sur la courbe tropicale correspondant au polynôme

$$\bigoplus_U c_U \otimes x^{\otimes a_U} \otimes y^{\otimes b_U}.$$

Chaque sommet s de Δ génère une composante non bornée U_s dont le « cône de récession » est le cône (« dual » de s) déterminé par les normales extérieures aux deux arêtes de Δ se rencontrant en s .

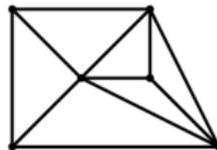
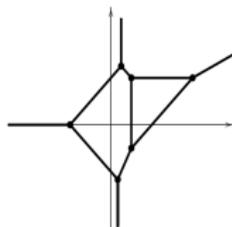


Un polynôme, une surface, une forme

L'amibe de P peut se rétracter sur la courbe tropicale correspondant au polynôme

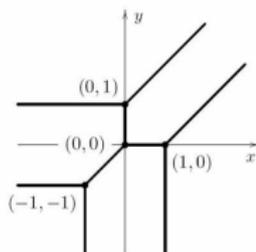
$$\bigoplus_U c_U \otimes x^{\otimes a_U} \otimes y^{\otimes b_U}.$$

Chaque sommet s de Δ génère une composante non bornée U_s dont le « cône de récession » est le cône (« dual » de s) déterminé par les normales extérieures aux deux arêtes de Δ se rencontrant en s .

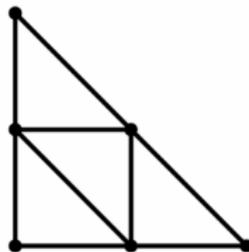
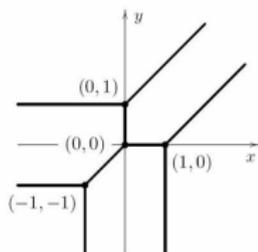


$c_{U_s} = \log |c_s|$ si s est un sommet de Δ . Sinon ...

« Tesselisations » de convexes en dualité

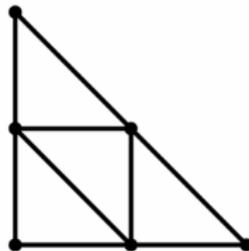
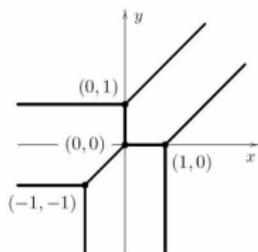


« Tesselisations » de convexes en dualité



Si K et K^* sont deux convexes des deux univers duaux \mathbb{R}^2 et $(\mathbb{R}^2)^*$, une « tessellation » convexe de K et une « tessellation » convexe de K^* sont **en dualité** s'il existe une bijection $\sigma \leftrightarrow \sigma^*$ entre les cellules convexes de K et celles de K^*

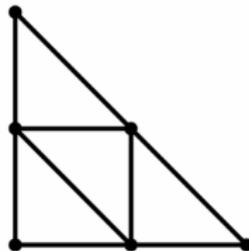
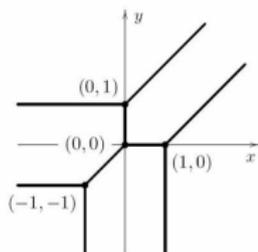
« Tesselisations » de convexes en dualité



Si K et K^* sont deux convexes des deux univers duaux \mathbb{R}^2 et $(\mathbb{R}^2)^*$, une « tessellation » convexe de K et une « tessellation » convexe de K^* sont **en dualité** s'il existe une bijection $\sigma \leftrightarrow \sigma^*$ entre les cellules convexes de K et celles de K^*

- ▶ renversant l'inclusion (si τ est face de σ , σ^* est face de τ^*);

« Tesselisations » de convexes en dualité



Si K et K^* sont deux convexes des deux univers duaux \mathbb{R}^2 et $(\mathbb{R}^2)^*$, une « tessellation » convexe de K et une « tessellation » convexe de K^* sont **en dualité** s'il existe une bijection $\sigma \leftrightarrow \sigma^*$ entre les cellules convexes de K et celles de K^*

- ▶ renversant l'inclusion (si τ est face de σ , σ^* est face de τ^*);
- ▶ telle que :

$$\{t(X - Y); X \in \sigma, Y \in \tau, t \geq 0\}^{\text{dual}} := [C(\sigma, \tau)]^{\text{dual}} = C(\tau^*, \sigma^*).$$

pour tout σ , pour toute face τ de σ .

« Patrons » de surfaces, triangulations, classification

Surfaces et polynômes

Du monde projectif au monde « tropical »

Retour à la « géométrie » des images (pensées comme des surfaces)

Conclusion

La dualité de Legendre-Fenchel

La dualité de Legendre-Fenchel

$$F(x, y) = \max_U (a_U x + b_U y + c_U) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

La dualité de Legendre-Fenchel

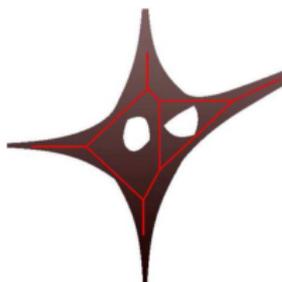
$$F(x, y) = \max_U (a_U x + b_U y + c_U) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\xi, \eta) \in \overline{\Delta} \mapsto F^*(\xi, \eta) = \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} (x\xi + y\eta - F(x, y)) \in]-\infty, \infty[$$

La dualité de Legendre-Fenchel

$$F(x, y) = \max_U (a_U x + b_U y + c_U) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

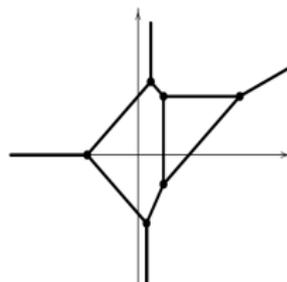
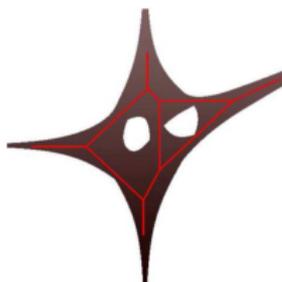
$$(\xi, \eta) \in \overline{\Delta} \mapsto F^*(\xi, \eta) = \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} (x\xi + y\eta - F(x, y)) \in]-\infty, \infty[$$



La dualité de Legendre-Fenchel

$$F(x, y) = \max_U (a_U x + b_U y + c_U) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

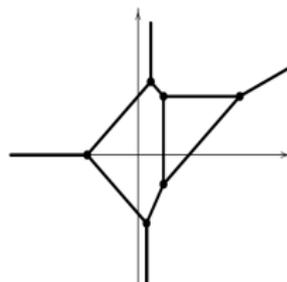
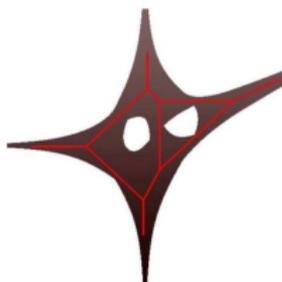
$$(\xi, \eta) \in \overline{\Delta} \mapsto F^*(\xi, \eta) = \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} (x\xi + y\eta - F(x, y)) \in]-\infty, \infty[$$



La dualité de Legendre-Fenchel

$$F(x, y) = \max_U (a_U x + b_U y + c_U) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\xi, \eta) \in \overline{\Delta} \mapsto F^*(\xi, \eta) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} (x\xi + y\eta - F(x, y)) \in]-\infty, \infty[$$



$$\begin{aligned} \sigma_{(\xi, \eta)} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; F(x, y) + F^*(\xi, \eta) - x\xi - y\eta = 0\}, (\xi, \eta) \in \overline{\Delta} \\ \sigma_{(x, y)}^* &:= \{(\xi, \eta) \in \overline{\Delta} ; F(x, y) + F^*(\xi, \eta) - x\xi - y\eta = 0\}, (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Approcher le squelette de l'amibe d'un polynôme *via* les coefficients

$$\mathbf{P}_m(z, w) = \prod_{k_1=0}^{m-1} \prod_{k_2=0}^{m-1} P(e^{2i\pi k_1/m} z, e^{2i\pi k_2/m} w) = \rho_{A,m}(z^{a_U} w^{b_U})^{m^2} + \dots$$

Approcher le squelette de l'amibe d'un polynôme *via* les coefficients

$$\mathbf{P}_m(z, w) = \prod_{k_1=0}^{m-1} \prod_{k_2=0}^{m-1} P(e^{2i\pi k_1/m} z, e^{2i\pi k_2/m} w) = \rho_{A,m}(z^{a_U} w^{b_U})^{m^2} + \dots$$

$$F_m(x, y) := \max_U (\log |\rho_{A,m}| + m^2(a_U x + b_U y))$$

Approcher le squelette de l'amibe d'un polynôme *via* les coefficients

$$\mathbf{P}_m(z, w) = \prod_{k_1=0}^{m-1} \prod_{k_2=0}^{m-1} P(e^{2i\pi k_1/m} z, e^{2i\pi k_2/m} w) = \rho_{A,m}(z^{a_U} w^{b_U})^{m^2} + \dots$$

$$F_m(x, y) := \max_U (\log |\rho_{A,m}| + m^2(a_U x + b_U y))$$

La courbe tropicale attachée à F_m tend, lorsque m tend vers l'infini, vers le squelette de l'amibe $\mathcal{A}(P)$.

« Patrons » de surfaces, triangulations, classification

Surfaces et polynômes

Du monde projectif au monde « tropical »

Retour à la « géométrie » des images (pensées comme des surfaces)

Conclusion

La mesure « surfacique » des aiguilles de Chamonix ?



La mesure « surfacique » des aiguilles de Chamonix ?



Comment « mesurer » les surfaces ?

La mesure « surfacique » des aiguilles de Chamonix ?



Comment « mesurer » les surfaces ? Une conférence d'Yves Meyer à la Bibliothèque Nationale (Janvier 2006).

smf.emath.fr/

Publications/Gazette/2006/109/smf_gazette_109_23-36.pdf

Surfaces et images

Erwan Le Pennec, Stéphane Mallat, Gabriel Peyré :

l'analyse en « bandelets »

Le site de Gabriel Peyré :

<http://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/bandelets/>

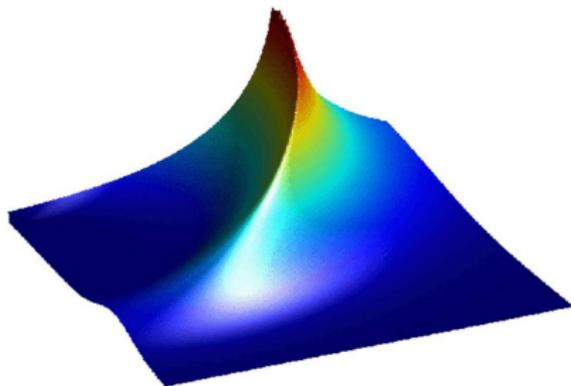
Surfaces et images

Erwan Le Pennec, Stéphane Mallat, Gabriel Peyré :

l'analyse en « bandelets »

Le site de Gabriel Peyré :

<http://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/bandelets/>



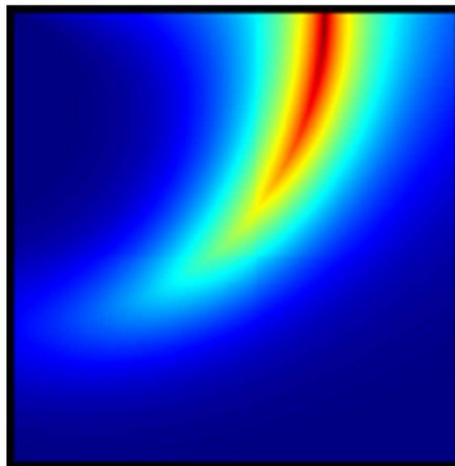
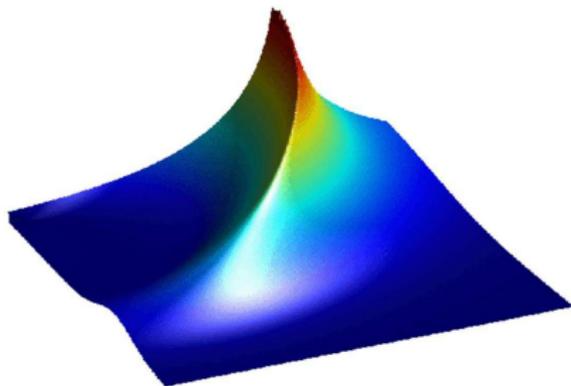
Surfaces et images

Erwan Le Pennec, Stéphane Mallat, Gabriel Peyré :

l'analyse en « bandelets »

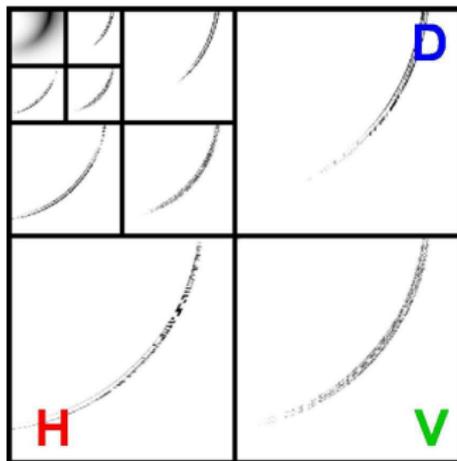
Le site de Gabriel Peyré :

<http://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/bandelets/>

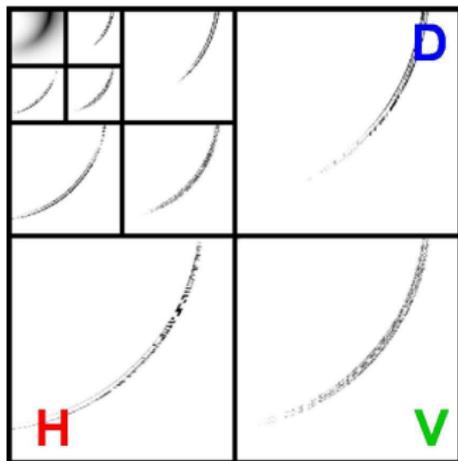


D'une surface S à une image digitale / ...

L'analyse espace-échelles 2D (sur le principe de l'analyse d'Alfred Haar)



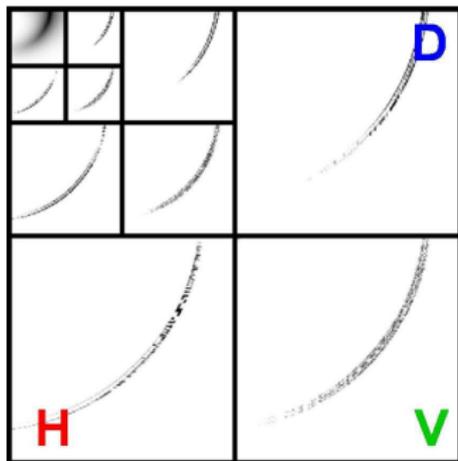
L'analyse espace-échelles 2D (sur le principe de l'analyse d'Alfred Haar)



On affiche les coefficients de corrélation avec les « atomes » du dictionnaire d'exploration espace-échelles :

$$c_{j,k_1,k_2} := \left\langle I, [\varphi_R \text{ ou } \psi_D](2^{-j}x - k_1) \otimes [\varphi_R \text{ ou } \psi_D](2^{-j}y - k_2) \right\rangle, j, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

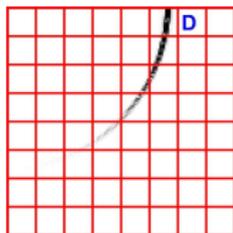
L'analyse espace-échelles 2D (sur le principe de l'analyse d'Alfred Haar)



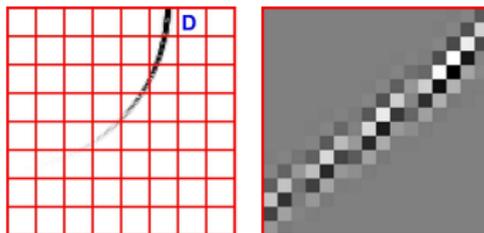
On affiche les coefficients de corrélation avec les « atomes » du dictionnaire d'exploration espace-échelles :

$$c_{j,k_1,k_2} := \left\langle I, [\varphi_R \text{ ou } \psi_D](2^{-j}x - k_1) \otimes [\varphi_R \text{ ou } \psi_D](2^{-j}y - k_2) \right\rangle, j, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

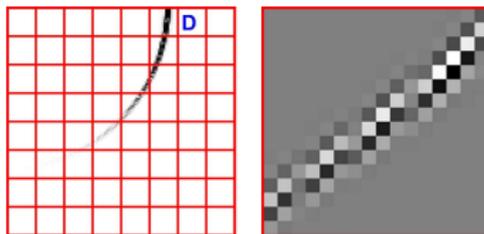
À la recherche de structures anisotropes géométriquement cohérentes : la traque des « contours »



À la recherche de structures anisotropes géométriquement cohérentes : la traque des « contours »

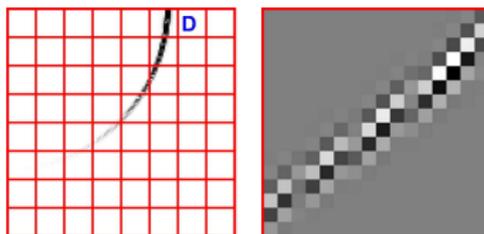


À la recherche de structures anisotropes géométriquement cohérentes : la traque des « contours »



Il s'agit d'identifier la **régularité anisotrope** et de détecter dans chaque cellule (ou groupe de cellules) la direction géométrique le long de laquelle l'image (ou la surface correspondante) présente le plus de régularité (en même temps que de trouver la mosaïque de cellules la plus cohérentes) :

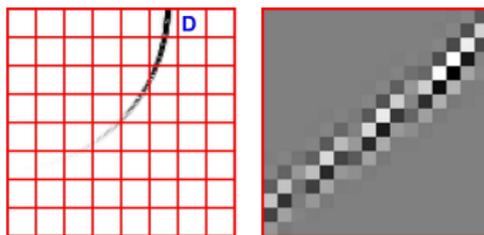
À la recherche de structures anisotropes géométriquement cohérentes : la traque des « contours »



Il s'agit d'identifier la **régularité anisotrope** et de détecter dans chaque cellule (ou groupe de cellules) la direction géométrique le long de laquelle l'image (ou la surface correspondante) présente le plus de régularité (en même temps que de trouver la mosaïque de cellules la plus cohérentes) :

Plus de « régularité » = moins de « gros » coefficients dans l'analyse espace-échelles 2D le long de la direction à choisir.

À la recherche de structures anisotropes géométriquement cohérentes : la traque des « contours »



Il s'agit d'identifier la **régularité anisotrope** et de détecter dans chaque cellule (ou groupe de cellules) la direction géométrique le long de laquelle l'image (ou la surface correspondante) présente le plus de régularité (en même temps que de trouver la mosaïque de cellules la plus cohérentes) :

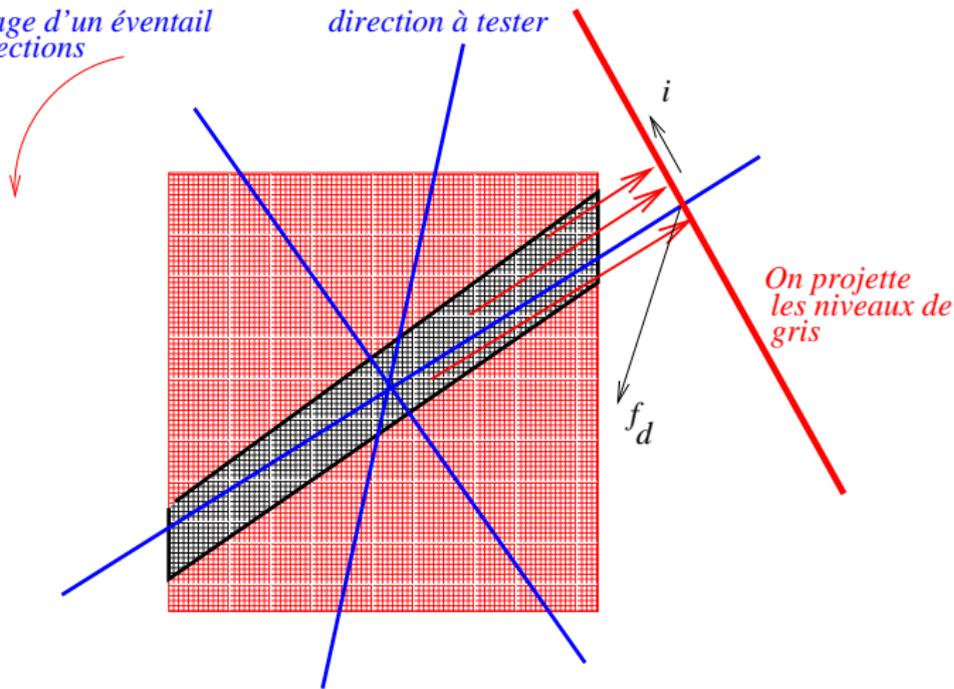
Plus de « régularité » = moins de « gros » coefficients dans l'analyse espace-échelles 2D le long de la direction à choisir.

Mais aussi ! moins de « gros » coefficients dans l'analyse espace-échelles 1D suivant cette direction !

Le balayage des directions

*balayage d'un éventail
de directions*

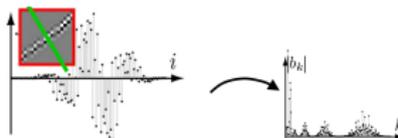
direction à tester



*On projette
les niveaux de
gris*

Des signaux irrégulièrement échantillonnés et leur analyse temps-échelles

Une « mauvaise » direction :

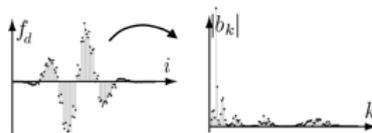


Des signaux irrégulièrement échantillonnés et leur analyse temps-échelles

Une « mauvaise » direction :



Une « bonne » direction :



Le choix de **seuils de tolérance** et la **minimisation d'une fonctionnelle** (liée à ces choix de seuils) conduisent à des groupements optimaux d'atomes permettant de réaliser un meilleur dictionnaire (fonction de l'image, donc de la surface, cette fois) dans lequel on pourra faire une décomposition « pré-organisée ».

Et pour finir, un procédé enfin cher aux informaticiens : le « *matching* » contre un dictionnaire

On dispose d'un dictionnaire \mathcal{D} d'atomes contre lequel on veut tester un objet S dans un univers où l'on dispose d'une notion d'**orthogonalité**, donc de **corrélation**. Tous les « atomes » sont normalisés.

Et pour finir, un procédé enfin cher aux informaticiens : le « *matching* » contre un dictionnaire

On dispose d'un dictionnaire \mathcal{D} d'atomes contre lequel on veut tester un objet S dans un univers où l'on dispose d'une notion d'**orthogonalité**, donc de **corrélation**. Tous les « atomes » sont normalisés.

$$|\langle S, d_1 \rangle| = \max_{d \in \mathcal{D}} |\langle S, d \rangle| \quad R_1 = \text{Proj}_{\mathbb{R}d_1}(S).$$

On continue

$$|\langle S - R_1, d_2 \rangle| = \max_{d \in \mathcal{D}} |\langle S - R_1, d \rangle| \quad R_2 = \text{Proj}_{\mathbb{R}d_2}(S - R_1) \dots$$

Et pour finir, un procédé enfin cher aux informaticiens : le « *matching* » contre un dictionnaire

On dispose d'un dictionnaire \mathcal{D} d'atomes contre lequel on veut tester un objet S dans un univers où l'on dispose d'une notion d'orthogonalité, donc de **corrélation**. Tous les « atomes » sont normalisés.

$$|\langle S, d_1 \rangle| = \max_{d \in \mathcal{D}} |\langle S, d \rangle| \quad R_1 = \text{Proj}_{\mathbb{R}d_1}(S).$$

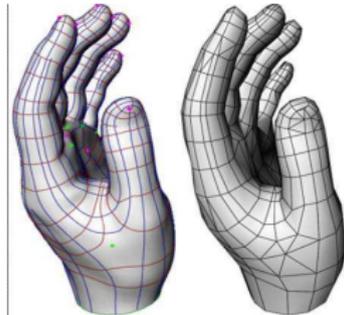
On continue

$$|\langle S - R_1, d_2 \rangle| = \max_{d \in \mathcal{D}} |\langle S - R_1, d \rangle| \quad R_2 = \text{Proj}_{\mathbb{R}d_2}(S - R_1) \dots$$

$$R_1 + R_2 + \dots + R_N \longrightarrow S.$$

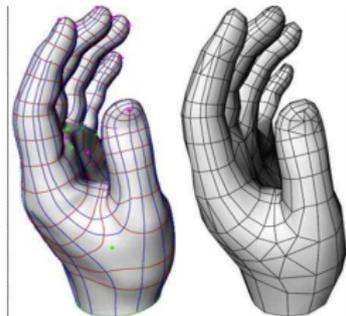
On peut même ré-orthonormaliser au fur et à mesure ...

Surfaces et images : des questions tant fondamentales qu'appliquées



Des objectifs divers, mais souvent appelés à se croiser ... Nous en avons juste ici esquissé un exemple de possibles échanges.

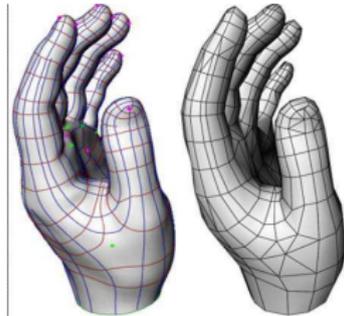
Surfaces et images : des questions tant fondamentales qu'appliquées



Des objectifs divers, mais souvent appelés à se croiser ... Nous en avons juste ici esquissé un exemple de possibles échanges.

- ▶ Présenter une vision « squelettique » de la géométrie algébrique complexe dans le monde réel « tropical » ;

Surfaces et images : des questions tant fondamentales qu'appliquées



Des objectifs divers, mais souvent appelés à se croiser ... Nous en avons juste ici esquissé un exemple de possibles échanges.

- ▶ Présenter une vision « squelettique » de la géométrie algébrique complexe dans le monde réel « tropical » ;
- ▶ Pister les lignes de rupture d'une image (donc d'une surface) aux fins de l'analyser, la stocker, la transmettre « comprimée », la débruiter ...

Merci !

Et maintenant les questions !

