Traduzione dal russo dell'articolo intitolato: *"Sugli zeri delle funzioni quasi periodiche generate da funzioni olomorfe in domini multicircolari"* di Lev Isaakovic Ronkin.

Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$, $H(\mathbb{C}^n)$ lo spazio delle funzioni olomorfe nel dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, e $T_S = \{z = x + iy \mid x \in \mathbb{R}^n,\ y \in S\}$, sia inoltre $\|f\|_S = \sup\{|f(z)| \mid z \in T_S\}$ ove $\|z\| = \max\{|z_j| \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Nel seguito le lettere $G, G', \ldots$ indicheranno sempre dei domini convessi di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che una funzione $f \in H(T_G)$ è detta quasi periodica (f.q.p.) se l'insieme $\{f(z+h) \in H(T_G) \mid h \in \mathbb{R}^n\}$ è compatto in $H(T_G)$ rispetto alla topologia della convergenza uniforme su ogni sottoinsieme del tipo $T_S$ con $S \Subset G$.[1]

In molti articoli relative alle f.q.p. di una variabile, si tratta della determinazione degli zeri di tali funzioni (vedi [2]-[6] etc), in [2] è stato dimostrato che la funzione

$$A_f = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} \ln |f(x+iy)| dx$$

gioca un ruolo molto importante. L'articolo [3] dà una descrizione completa di questa classe di funzioni. Da questa descrizione in particolare si ottiene la seguente implicazione: se $f$ è una f.q.p. olomorfa in $T_{(a,b)}$ e se possiede una base finita e intera[2], allora in ogni intervallo $(a_1, b_1)$, con $a < a_1 < b_1 < b$, la funzione $A_f(y)$ ha solo un numero finito di intervalli di linearità. Ciò è equivalente al fatto che ogni $T_{(a_1,b_1)}$ contiene solo un numero finito di domini massimali nei quali $f$ non si annulla. La dimostrazione di questo fatto data in [3] è valida nel caso di una variabile e non si estende al caso di più variabili, tuttavia con un altro metodo si può dimostrare un teorema simile per le f.q.p. generate (in senso da precisare) da funzioni olomorfe in domini multicircolari di $\mathbb{C}^n$ e si può dare inoltre una stima del numero delle regioni multicircolari corrispondenti. Per provarlo avremo bisogno di certe nuove proprietà degli zeri delle funzioni olomorfe in domini multicircolari. Queste proprietà sono semplici ma interessanti.

[1] Questa definizione è equivalente alla definizione in termini degli $\varepsilon$-quasi periodi.

[2] Per il concetto di base cf. [3]

# 1 Stima del numero dei domini multicircolari che non contengono zeri di una funzione olomorfa.

Nel seguito $\Omega, \Omega', \ldots$ saranno domini multicircolari centrati in $z = 0$. Per $r \in \mathbb{R}^n_+$, poniamo $\ln r = (\ln r_1, \ldots, \ln r_n)$. Introduciamo inoltre la funzione $\alpha z = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$. Ricordiamo che un dominio $\Omega$ si dice logaritmicamente convesso se il dominio $\ln \alpha\Omega$ è convesso. Sia $f$ una funzione olomorfa in $\Omega$, poniamo $Z_f = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ e $\tilde{\Omega}_f = \alpha^{-1}(\alpha\Omega \setminus \alpha Z_f)$. In virtù delle ben note proprietà generali delle funzioni olomorfe nei domini multicircolari, segue che ogni componente connessa dell'insieme aperto $\tilde{\Omega}_f$ è logaritmicamente convessa. Se $\Omega' \Subset \Omega$ allora $\nu_f(\Omega')$ denoterà il numero delle componenti connesse dell'intersezione $\tilde{\Omega}_f \cap \Omega'$. Siano

$$U^n(r) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < r_1, \ldots, |z_n| < r_n\},$$

$$\Delta^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = r_1, \ldots, |z_n| = r_n\},$$

$$U^n(r, R) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid r_1 < |z_1| < R_1, \ldots, r_n < |z_n| < R_n\},$$

$$N_f(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \ln |f(r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_n e^{i\theta_n})| \, d\theta_1 \ldots d\theta_n,$$

$$\tilde{N}_f(t) = N_f(e^{t_1}, \ldots, e^{t_n}).$$

Osserviamo, come è ben noto, che la funzione $\tilde{N}_f(t)$ è convessa (cf. [7][3]).

**Teorema 1.1** *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un dominio multicircolare logaritmicamente convesso $\Omega$ e sia $D$ un dominio convesso contenuto in $\ln \alpha\Omega$. Allora $f$ non si annulla nel dominio $\{z \in \mathbb{C}^n \mid \ln \alpha z \in D\}$ se e solo se la funzione $\tilde{N}_f(t)$ è lineare in $D$.*

**Dimostrazione.** Sia $'z = (z_2, \ldots, z_n)$. Nel seguito supporremo che sia sempre $U^n(r, R) \Subset \Omega$. Sia $n_1(r_1, R_1; 'z)$ il numero di radici (contate con la dovuta molteplicità) della funzione $f(z_1, 'z)$ nell'anello $r_1 < |z_1| < R_1$. Poniamo anche

$$\begin{aligned} n(r_1, R_1; 'r) &= \left(\frac{1}{2n}\right)^{n-1} \int_{\Delta^{n-1}('r)} n_1(r_1, R_1; 'z) \, d'\theta \\ &:= \left(\frac{1}{2n}\right)^{n-1} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} n_1(r_1, R_1; r_2 e^{i\theta_2}, \ldots, r_n e^{i\theta_n}) \, d\theta_2 \ldots d\theta_n, \end{aligned}$$

$$N_1(r_1, R_1; 'z) = \int_{r_1}^{R_1} n_1(r_1, s; 'z) \frac{ds}{s},$$

[3] In [7] questo fatto è dimostrato nel caso di un dominio $\Omega$ completo ma di fatto la dimostrazione vale anche nel caso di un dominio multicircolare.

$$N(r_1, R_1; 'r) = \int_{r_1}^{R_1} n(r_1, s; 'r) \frac{ds}{s} .$$

Osserviamo che

$$N(r_1, R_1; 'r) = \left(\frac{1}{2n}\right)^{n-1} \int_{\Delta^{n-1}} n_1(r_1, R_1; 'z)\, d'\theta$$

e che la quantità

$$\Pi_1(r, R) = \int_{U^{n-1}('r,'R)} n_1(r_1, R_1; 'z)\, d'z \tag{1}$$

è uguale (cf. [7] per esempio) al volume $(2n-2)$-dimensionale (contando la molteplicità delle componenti) della proiezione dell'insieme $Z_f \cap U^n(r, R)$ su $\mathbb{C}^{n-1}$. Nel seguito ci sarà utile una formula di Jensen per l'anello.

**Lemma 1.1** *Sia $F(\zeta)$ una funzione olomorfa nell'anello $r_1 \leqslant |\zeta| \leqslant R_1$, $\zeta \in \mathbb{C}$. Sia anche $n_F(s)$ il numero di zeri (contando la molteplicità) nell'anello $r_1 \leqslant |\zeta| \leqslant s$, $0 < r_1 < s < R_1$. Allora*

$$\int_{r_1}^{R_1} \frac{n_F(s)}{s}\, ds \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(R_1 e^{i\varphi})|\, d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(r_1 e^{i\varphi})|\, d\varphi - r_1 \ln \frac{R_1}{r_1} \kappa_F(r_1) ,$$

*dove*

$$\kappa_F(r_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r_1} \ln |F(r_1 e^{i\varphi})|\, d\varphi ,$$

*se $F(\zeta) \neq 0$ quando $|\zeta| = r_1$ e*

$$\kappa_F(r_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r_1' \to r_1 + 0} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r_1} \ln |F(r_1' e^{i\varphi})|\, d\varphi ,$$

*se sulla circonferenza $|\zeta| = r_1$ ci sono zeri di $F(z)$.*

Per dimostrare il lemma basta fare la seguente osservazione. Se si prende al posto di $\ln |F(\zeta)|$ una funzione qualunque $u(\zeta)$ e al posto di $n_F(s)$ l'integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{r_1 < |\zeta| < s} \Delta u(\zeta)\, d\zeta ,$$

allora il lemma si dimostra facilmente se $u$ è liscia, poiché $\ln |F(\zeta)|$ è limite decrescente di una successione di funzioni lisce subarmoniche $u_j(\zeta)$, si conclude passando al limite sotto il segno di integrale. Se la funzione $F(\zeta)$ ha uno zero sulla circonferenza si passa al limite per $r_1' \to r_1 + 0$. Lasciamo i dettagli al lettore. Ora, se $f \in H(\Omega)$, usando (2) otteniamo

$$\int_{r_1}^{\tilde{r}_1} n(r_1, s; '\tilde{r}) \frac{ds}{s} = N_f(\tilde{r}) - N_f(r_1, '\tilde{r}) + r_1 \ln \frac{\tilde{r}_1}{r_1} \kappa_f(r_1, 'r), \quad \forall \tilde{r} \in \alpha U^n(r, R),$$

ove $\kappa_f(r_1, '\tilde{r})$ è il valore medio su $\Delta^{n-1}('\tilde{r})$ della quantità $\kappa_F(r_1)$ definita come in (2) per $F(\zeta) = f(\zeta, 'z)$. Di conseguenza,

$$\frac{\partial N_f(\tilde{r}_1, '\tilde{r})}{\partial \ln \tilde{r}} = n(r_1, \tilde{r}_1; '\tilde{r}) + r_1 \kappa_f(r_1, '\tilde{r}), \qquad \forall \tilde{r}_1 \in (r_1, R_1). \tag{3}$$

Supponiamo adesso che la funzione $\tilde{N}_f(t)$ sia lineare nel dominio $Q(r, R) = \ln \alpha U^n(r, R)$. Ciò equivale al fatto che $\operatorname{grad} \tilde{N}_f(t)$ sia costante in $Q(r, R)$. Allora da (3) segue che $n(r_1, \tilde{r}_1; '\tilde{r})$ è indipendente da $\tilde{r}_1 \in (r_1, R_1)$. Osserviamo inoltre che dalla definizione di $n_1(r_1, \tilde{r}_1; '\tilde{z})$ segue che

$$\lim_{\tilde{r}_1 \to r_1} n_1(r_1, \tilde{r}_1; '\tilde{z}) = 0,$$

e da questo è chiaro che

$$\lim_{\tilde{r}_1 \to r_1} n(r_1, \tilde{r}_1; '\tilde{r}) = 0, \qquad \forall '\tilde{r} \in U^{n-1}('r, 'R).$$

Poiché $n(r_1, \tilde{r}_1; '\tilde{r})$ è indipendente da $\tilde{r}_1$ otteniamo che $n(r_1, \tilde{r}_1; '\tilde{r}) = 0$ per ogni $\tilde{r}_1 \in (r_1, R_1)$ ed ogni $'\tilde{r} \in U^{n-1}('r, 'R)$. Calcolando

$$\begin{aligned} \Pi_1(r, R) &= \int_{U^{n-1}('r, 'R)} n_1(r_1, R_1; 'z)\, d'z \\ &= \int_{r_2}^{R_2} \cdots \int_{r_n}^{R_n} n(r_1, R_1; '\tilde{r})\, \tilde{r}_2 \cdots \tilde{r}_n\, d\tilde{r}_2 \ldots d\tilde{r}_n, \end{aligned}$$

si vede che $\Pi_1(r, R) = 0$. Così abbiamo dimostrato che il volume della proiezione di $Z_f \cap U^n(r, R)$ su $\mathbb{C}^{n-1}_{('z)}$ è uguale a zero. Per analogia sarà nullo anche il volume delle proiezioni sugli altri iperpiani coordinati. Siccome il volume dell'insieme degli zeri di una funzione olomorfa (contando le molteplicità) è pari alla somma dei volumi delle proiezioni (contando le molteplicità delle proiezioni) sugli iperpiani coordinati, il volume di $Z_f \cap U^n(r, R)$ è nullo. Di conseguenza nella nostra situazione, (cioè $\operatorname{grad} \tilde{N}_f(t)$ costante su $Q(r, R)$), $Z_f \cap U^n(r, R) = \varnothing$. Così abbiamo dimostrato la necessità della condizione dell'enunciato. Viceversa supponiamo che $f \in H(\Omega)$ non abbia zeri in $\Omega' \Subset \Omega$, allora la funzione $1/f$ è olomorfa in $\Omega'$ e così entrambe le funzioni $\tilde{N}_{1/f}(t)$ e $\tilde{N}_f(t)$ sono convesse su $\ln \alpha \Omega'$. Poiché $\tilde{N}_{1/f}(t) = -\tilde{N}_f(t)$ segue che $\tilde{N}_f(t)$ è al tempo stesso concava e convessa, dunque lineare. □

Si può estendere il teorema 1.1 al seguente

**Teorema 1.2** *Sia $f \in H(\Omega)$, allora* $\operatorname{grad} \tilde{N}_f(t)$ *appartiene* $\mathbb{Z}^n$ *per ogni* $t \in \ln \alpha\tilde{\Omega}_f$. *Se* $\Omega$ *è un dominio multicircolare completo allora* $\operatorname{grad} \tilde{N}_f(t) \in \mathbb{N}^n$ *per ogni* $t \in \ln \alpha\tilde{\Omega}$.

**Dimostrazione.** Cominciamo con il caso di un dominio $\Omega$ completo. Si può allora calcolare $\tilde{N}_f(t)$ in modo simile a quello della dimostrazione del teorema 1 (cf. la dimostrazione di (3)), con la sola differenza che al posto della formula di Jensen valida per l'anello si usa quella valida per il cerchio. Dunque se $n_1(r_1, 'z)$ è il numero di radici della funzione $f(z_1, 'z)$ nel cerchio $|z_1| < 1r_1$, poiché

$$n(r_1, 'r) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int_{\Delta^{n-1}('r)} n_1(r_1, 'z)\, d'\theta\,,$$

otteniamo con lo stesso metodo di prima

$$\frac{\partial N_f(r)}{\partial \ln r_1} = n(r_1; 'r)\,. \tag{4}$$

Supponiamo che $\alpha U^n(r, R) \Subset \alpha\tilde{\Omega}_f$. Allora la quantità $n_1(r_1, 'z)$ è uguale a un certo numero naturale $m_1$ che non dipende da $'z \in U^{n-1}('r, 'R)$. Di conseguenza, $n(\tilde{r}_1, '\tilde{r}) = m_1$ per ogni $\tilde{r}_1 \in (r_1, R_1)$ ed ogni $'\tilde{r} \in U^{n-1}('r, 'R)$. Da (4) otteniamo allora

$$\frac{\partial \tilde{N}_f(t)}{\partial t_1} = m_1\,, \qquad \forall t \in Q(r, R)\,.$$

Analogamente

$$\frac{\partial \tilde{N}_f(t)}{\partial t_j} = m_j\,, \qquad \forall j, \forall t \in Q(r, R)\,.$$

Così abbiamo dimostrato che nel caso considerato $\operatorname{grad} \tilde{N}_f(t) \in \mathbb{N}^n$ per ogni punto $t \in \ln \alpha\tilde{\Omega}_f$. In quanto segue consideriamo il caso di un dominio $\Omega \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ e di un polinomio di Laurent

$$f(z) = \sum_{k_1=-m}^{m} \cdots \sum_{k_n=-m}^{m} a_k z^k\,. \tag{5}$$

Mettendo in evidenza si ha

$$f(z) = z_1^{-m} \cdots z_n^{-m} P(z)\,,$$

ove

$$P(z) = \sum_{k_1=0}^{2m} \cdots \sum_{k_n=0}^{2m} a_{k_1-m,\ldots,k_n-m}\, z^k\,,$$

cosicché

$$\tilde{N}_f(t) = -m(t_1 + \cdots + t_n) + \tilde{N}_P(t)\,. \tag{6}$$

Dalla prima parte della dimostrazione segue che $\operatorname{grad} \tilde{N}_P(t) \in \mathbb{N}^n$, per ogni $t \in \ln \alpha\tilde{\Omega}_P$. Dunque da (6) otteniamo che $\operatorname{grad} \tilde{N}_f(t) \in \mathbb{N}^n$, per ogni $t \in \ln \alpha\tilde{\Omega}_f$. Passiamo ora al caso generale di un dominio $\Omega$ multicircolare e di una funzione $f \in H(\Omega)$. Ogni funzione siffatta si rappresenta come somma di una serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k z^k\,.$$

I polinomi di Laurent

$$P_m(z) = \sum_{k_1=-m}^{m} \ldots \sum_{k_n=-m}^{m} a_k z^k$$

convergono, per $m \to \infty$, uniformemente a $f$ su ogni $\Omega' \Subset \Omega$. Prendiamo un dominio $\Omega' \Subset \tilde{\Omega}_f$. Siccome $\inf\{|f(z)| \mid z \in \Omega'\} > 0$, per ogni $m$ sufficientemente grande abbiamo $\inf\{|P_m(z)| \mid z \in \Omega'\} > 0$. Se $m \to \infty$, le funzioni pluriarmoniche $\ln |P_m(z)|$ convergono uniformemente in $\Omega'$ a $\ln |f(z)|$, da cui segue che

$$\lim_{m \to \infty} \operatorname{grad} \tilde{N}_{P_m}(t) = \operatorname{grad} \tilde{N}_f(t)\,, \qquad t \in \ln \alpha\Omega'\,. \tag{7}$$

Poiché sappiamo che $\operatorname{grad} \tilde{N}_{P_m}(t) \in \mathbb{Z}^n$, da (7) segue che $\operatorname{grad} \tilde{N}_f(t) \in \mathbb{Z}^n$ per ogni $t \in \ln \alpha\Omega'$. Il teorema segue per l'arbitrarietà di $\Omega'$. $\square$

Con l'ausilio dei teoremi 1.1 e 1.2, il problema della stima di $\nu_f(\Omega')$ si riduce alla stima della funzione $|\tilde{N}_f(t)|$ oppure $|N_f(z)|$.

**Teorema 1.3** *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un dominio logaritmicamente convesso multicircolare $\Omega$, $\Omega' \Subset \Omega$ un dominio logaritmicamente convesso multicircolare e $\delta > 0$ tali che il $\delta$-intorno $(\ln \alpha\Omega')_\delta$ sia contenuto in $\ln \alpha\Omega$. Allora*

$$\nu_f(\Omega') \leqslant V_n \cdot \Big(\sqrt{n} + \frac{2}{\delta} \sup\{|\tilde{N}_f(t)| \mid t \in (\ln \alpha\Omega')_\delta\}\Big)^n\,, \tag{8}$$

*ove $V_n$ è il volume della palla unità di $\mathbb{R}^n$. Se inoltre $\Omega$ è completo e $f(0) \neq 0$, si ottiene*

$$\nu_f(\Omega') \leqslant 2^{-n} V_n \cdot \Big(\sqrt{n} + \frac{2}{\delta} \sup\{\ln |f(z)| - \ln |f(0)| \mid \ln |z| \in (\ln \alpha\Omega')_\delta\}\Big)^n\!. \tag{9}$$

**Dimostrazione.** Dai teoremi (1) e (2) segue che su ogni componente connessa dell'aperto $\alpha\tilde{\Omega}_f$, il gradiente $\operatorname{grad} \tilde{N}_f(t)$ è costante ed appartiene a $\mathbb{Z}^n$. D'altra parte, due componenti connesse distinte di $\ln \alpha\tilde{\Omega}_f$ non possono essere entrambe contenute in uno stesso dominio $D \subset \ln \alpha\Omega$ su cui grad $\tilde{N}_f(t) \equiv$ const. Inoltre, in vista del fatto che la funzione $\tilde{N}_f(t)$ è convessa, ad ogni coppia $D_1$ e $D_2$ di domini massimali distinti su cui grad $\tilde{N}_f(t)$ è costante, ovvero ad ogni coppia di componenti connesse distinte di $\alpha\tilde{\Omega}_f$, corrisponde una coppia di costanti distinte valori di grad $\tilde{N}_f(t)$. Infatti se questi due valori coincidessero e fossero uguali a $\kappa$, allora grad $\tilde{N}_f(t)$ sarebbe uguale a $\kappa$ su tutto l'inviluppo convesso dell'unione $D_1 \cup D_2$, il che contraddice la massimalità dei domini $D_1$ e $D_2$. Così $\nu_f(\Omega_f)$ non eccede il numero di punti di $\mathbb{Z}^n$ contenuti nella palla di $\mathbb{R}^n$ di centro 0 e raggio

$$\varrho(\Omega', f) := \sup\{\text{grad}\, \tilde{N}_f(t)| \mid t \in \ln \alpha\Omega'\}.$$

Di conseguenza

$$\nu_f(\Omega') \leqslant V_n \cdot (\sqrt{n} + \varrho(\Omega', f))^n. \tag{10}$$

Per stimare $\varrho(\Omega', f)$ facciamo uso della disuguaglianza seguente (cf. [7,pag. 16])

$$|\Phi(t + t')_\Phi(t)| \leqslant \frac{2|t'|}{\delta} \sup\{|\Phi(t + s)| \mid |s|\delta\}, \tag{11}$$

ove $\Phi$ è una funzione convessa sulla palla $|\xi - t| < \delta$. Da questa disuguaglianza segue che, se in un punto $t \in \ln \alpha\Omega'$ esiste il grad $\tilde{N}_f(t)$, allora

$$|\tilde{N}_f(t)| \leqslant \frac{2}{\delta} \sup\{|\tilde{N}_f(t + s)| \mid |s| < \delta\}.$$

Dunque

$$\varrho(\Omega', f) \leqslant \frac{2}{\delta} \sup\{|\,\text{grad}\, \tilde{N}_f(t)| \mid t \in\in (\ln \alpha\Omega')_\delta\}.$$

Da ciò e da (10) concludiamo la dimostrazione di (8). Se ora $\Omega$ è logaritmicamente convesso multicircolare completo e $f(0) \neq 0$, la funzione $\tilde{N}_f(t) - \ln|f(0)|$ non solo è convessa ma altresì, per ogni $t_1, \ldots, t_n$, la funzione parziale è positiva e crescente. Per una funzione $\Phi$ siffatta, la stima (11) diventa

$$|\Phi(t + t') - \Phi(t)| \leqslant \frac{|t'|}{\delta} \sup\{\Phi(t + s) \mid |s| < \delta\}.$$

Nel nostro caso ciò implica

$$0 \leqslant \text{grad}\, \tilde{N}_f(t) \leqslant \frac{1}{\delta} \sup\{\tilde{N}_f(t + s) - \ln|f(0)| \mid |s| < \delta\}.$$

Da ciò e poiché

$$N_f(r) \leqslant \sup\{\ln|f(z)| \mid z \in \Delta^n(r)\},$$

otteniamo

$$\varrho(\Omega', f) \leqslant \frac{1}{\delta} \sup\{\ln|f(z)| - \ln|f(0)| \mid \ln \alpha z \in (\ln \alpha\Omega')_\delta\}. \tag{12}$$

Sapendo che per un dominio completo $\Omega$, il gradiente grad $\tilde{N}_f(t) \in \mathbb{N}^n$ per ogni $t \in \ln \alpha \tilde{\Omega}_f$, otteniamo

$$\nu_f(\Omega') \leqslant \operatorname{card}\{k \in \mathbb{Z}_+^n \mid |k| \leqslant \varrho(\Omega', f)\} \leqslant 2^{-n}(\sqrt{n} + \varrho(\Omega', f))^n ,$$

da cui in vista di (12), segue la stima (9) il che conclude la dimostrazione. □

**Osservazione 1.1** Se $P(z)$ è un polinomio di grado $\deg P$ allora da (9) otteniamo

$$\nu_P(\mathbb{C}^n) \leqslant 2^{-n} V_n \cdot (\sqrt{n} + \deg P)^n . \tag{13}$$

Per verificarlo per $P(0) \neq 0$, prendiamo al posto di $\Omega'$ una palla di raggio arbitrario e facciamo tendere $\delta$ all'infinito. Se invece $P(0) = 0$, consideriamo dapprima i polinomi $P_\varepsilon(z) = P(z) + \varepsilon$ e poi passiamo al limite per $\varepsilon \longrightarrow 0$. Osserviamo che nel caso $n = 1$ la stima (13) è stretta.

**Osservazione 1.2** Se $f(z)$ è un polinomio di Laurent (5), allora

$$\nu_f(\mathbb{C}^n) \leqslant V_n \cdot (\sqrt{n} + 2mn)^n . \tag{14}$$

Questa stima segue direttamente da (13).

## 2 Domini tubulari non contenenti zeri di funzioni quasi periodiche.

Sia $f(z)$ una f.q.p. olomorfa definita in un dominio tubulare $T_G \subset \mathbb{C}^n$, con $G$ convesso. Indichiamo con $\beta$ l'operatore di proiezione sullo spazio $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} \mathbb{C}^n$. Così $\beta(x+iy) = y$. Consideriamo l'aperto $G_f = G \backslash \overline{\beta Z_f}$ e sia $\gamma_f(G')$ il numero di componenti connesse di $G_f \cap G'$. Adesso il nostro problema è di dare una stima di $\gamma_f(G')$ per una f.q.p. $f(z)$ generata in un certo senso da funzioni olomorfe in domini multicircolari. Più precisamente, andiamo a considerare funzioni $f(z)$ del tipo

$$f = F \circ \Psi , \tag{15}$$

ove $F = F(w)$ è una funzione olomorfa in u dominio logaritmicamente convesso multicircolare $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ e $\Psi = \Psi(z)$ è un'applicazione olomorfa del dominio $T_G$ nel dominio $\Omega$ definita dall'uguaglianza

$$\Psi(z) = (e^{i\langle z, \mu^{(1)} \rangle}, \dots, e^{i\langle z, \mu^{(N)} \rangle})$$

ove i vettori $\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(N)} \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$.[4] Prendiamo l'immagine $\Psi(D)$ di un dominio convesso qualsiasi secondo l'applicazione $\Psi : z \to w$. Poiché l'insieme

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^N} \{t \in \mathbb{R}^N \mid t_1 = \langle x, \mu^{(1)}\rangle + k_1, \ldots, t_N = \langle x, \mu^{(N)}\rangle + k_N,\ x \in \mathbb{R}^n\}$$

è denso in $\mathbb{R}^n$,[5] allora

$$\overline{\Psi(D)} = \{w \in \mathbb{C}^N \mid \alpha w = \Psi(iy),\ y \in D\}.$$

Poniamo

$$S_\Psi(D) = \bigcup_{D'\Subset D} \overline{\Psi(D')}.$$

È chiaro che

$$S_\Psi(D) = \{w \in \mathbb{C}^N \mid \ln \alpha w = -(\langle y, \mu^{(1)}\rangle, \ldots, \langle y, \mu^{(N)}\rangle),\ y \in D\}.$$

**Lemma 2.1** *Se la funzione $f(z)$ è definita come in* (15) *e il dominio $G'$ è relativamente compatto in $G \setminus \overline{\beta Z_f}$, allora*

$$S_\Psi(G') \subset \tilde{\Omega}_f := \alpha^{-1}(\alpha\Omega \setminus \alpha Z_f).$$

**Dimostrazione.** Dalla definizione di $S_\Psi(G)$ segue che l'insieme

$$\{w \in \mathbb{C}^N \mid w_1 = \exp(i\langle z, \mu^{(1)}\rangle + i\theta_1), \ldots, w_N = \exp(i\langle z, \mu^{(N)}\rangle + i\theta_N),\, z \in T_{G'}\}$$

è incluso in $S_\Psi(G') \Subset \Omega$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}^N$. Così le funzioni

$$f_\theta(z) = F(\exp(i\langle z, \mu^{(1)}\rangle + i\theta_1), \ldots, \exp(i\langle z, \mu^{(N)}\rangle + i\theta_N)), \qquad \theta \in \mathbb{R}^N,$$

sono ben definite in $T_{G'}$, olomorfe in $T_{G'}$ e uniformemente continue rispetto a $\theta \in \mathbb{R}^N$ e $z \in T_{G'}$. Poniamo

$$\tau\mu = (\langle \tau, \mu^{(1)}\rangle, \ldots, \langle \tau, \mu^{(N)}\rangle).$$

Dal teorema di Kronecker cui abbiamo accennato, segue che per ogni $\theta \in \mathbb{R}^N$ si può trovare una successione $\tau^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ tale che in $T_{G'}$, per $j \to \infty$, le funzioni $f_{\tau^{(j)}\mu}(z)$ convergono uniformemente a $f_\theta(z)$. Tuttavia

$$f_{\tau^{(j)}\mu} = f(z + \tau^{(j)}) \neq 0 \qquad \forall z \in T_{G'}, \tag{16}$$

[4]Nel caso di una qualsiasi $f(z)$ f.q.p. olomorfa in $T_G$, con una base intera e finita, la rappresentazione (15) è vera con la stessa applicazione $\Psi$ e con una certa funzione $F$ CR, (Cauchy-Riemann). Le relazioni fra le funzioni f.q.p. con una base intera e finita e le funzioni CR saranno studiate in un altro articolo dell'autore.

[5]Questa è una variante del teorema di Kronecker relativo al caso di un avvolgimento multidimensionale di un toro (cf. per esempio [1]).

e così la funzione limite $f_\theta(z)$ non si annulla in $T_{G'}$ per alcun valore di $\theta \in \mathbb{R}^n$. Di conseguenza $F(w) \neq 0$ per ogni $w \in S_\Psi(G')$, cioè $S_\Psi(G') \subset \tilde{\Omega}_F$. Il lemma è dimostrato. □

Dal Lemma 2.1 e dalla definizione degli insiemi $\alpha\tilde{\Omega}_F$ e $G_f$ a causa della connessione di $S_\Psi(G')$, segue che ad ogni componente $G'$ dell'insieme $G_f$ corrisponde una componente $\omega'$ di $\tilde{\Omega}_F$ contenente $S_\Psi(G')$. Osserviamo anche che

$$\alpha S_\Psi(G') \cap \alpha Z_F = \varnothing \,,$$

se $G' \cap \beta Z_f = \varnothing$. Da tutto ciò, tenuto conto del fatto che l'insieme $\ln \alpha S_\Psi(G)$ è una varietà lineare e che le componenti connesse dell'insieme $\ln \alpha\tilde{\Omega}_f$ sono convesse, concludiamo che ogni componente connessa di $\alpha\tilde{\Omega}_F$ contiene al più uno solo degli insiemi $S_\Psi(G')$, ove $G'$ è una componente connessa di $G_f$. Di conseguenza il numero $\gamma_F(G^*)$, con $G^* \Subset G$, non supera il numero $\nu_f(\Omega^*)$, ove $\Omega^*$ è un qualsiasi dominio contenuto in $\tilde{\Omega}_F$ e contenente $S_\Psi(G^*)$. Combinando queste osservazioni con le stime del numero $\nu_F(\Omega^*)$ della sezione precedente, otteniamo il seguente teorema.

**Teorema 2.1** *Sia $f(z)$ una f.q.p. olomorfa del tipo* (15) *in un dominio $T_G$ e siano $G^* \Subset G$ e $\Omega^* \Subset \Omega$ domini tali che $S_\Psi(G^*) \subset \Omega^*$. Allora*

$$\gamma_f(G^*) \leqslant V_N \cdot \left(\sqrt{N} + \frac{2}{\delta} \sup\{|\tilde{N}_f(t)| \mid t \in (\ln \alpha\Omega^*)_\delta\}\right)^n < \infty \tag{17}$$

*per ogni* $\delta < \operatorname{dist}(\ln \alpha\partial\Omega, \ln \alpha\partial\Omega^*)$.

Consideriamo a parte il caso di un quasi polinomio quasi periodico $f$

$$f(z) = \sum_{j=1}^{p} a_j e^{i\langle \lambda^{(j)}, z\rangle} \,, \tag{18}$$

dove $\lambda_j \in \mathbb{R}^n$ e $a_j \in \mathbb{C}$. In questo caso si può sempre scegliere un numero finito di vettori $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)} \in \mathbb{R}^n$, $N = N(f)$, liberi su $\mathbb{Q}$ tali che, per certi $k^{(j)} \in \mathbb{Z}^N$, $j = 1, \dots, p$, si ha

$$\lambda^{(j)} = \sum_{q=1}^{N} k_q^{(j)} \mu(q) \,, \qquad j = 1, \dots, p \,.$$

Poniamo $d(f) = \max\{\|k^{(j)}\| \mid 1 \leqslant j \leqslant p\}$. Gli stessi argomenti usati prima del Teorema 2.1 e la stima (14) dimostrano il seguente teorema.

**Teorema 2.2** *Sia $f(z)$ un quasi polinomio quasi periodico, allora*

$$\nu_f(\mathbb{C}^n) \leqslant 2^{-N} V_N \cdot (\sqrt{N} + 2Nd)^N \,, \tag{19}$$

*ove $N = N(f)$, $d = d(f)$ come sopra.*

Osserviamo che la stima (19) non sembra essere conosciuta neanche nel caso di un quasi polinomio quasi periodico di una sola variabile.

In fine mostreremo una relazione fra la funzione

$$A_f(y) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{(2l)^n} \int_{\|x\|<l} \ln|f(x+iy)|\, dx\,, \tag{20}$$

ove la funzione $f(z)$ è della forma (15), e la funzione $N_f(r)$. L'esistenza del limite in (20) per una qualsiasi f.q.p. olomorfa di più variabili è stata dimostrata in [8] (cf. anche [9] - [11]). In questo articolo è anche stabilita una relazione fra $A_f(y)$ e la distribuzione degli zeri di $f(z)$. In particolare si dimostra che la funzione $f(z)$ non si annulla su $T_{G'}$ (i.e. $G' \subset G \setminus \beta Z_f$) se e solo se la funzione $A_f(y)$ è lineare su $G'$.

**Teorema 2.3** *Se $f(z)$ è una f.q.p. olomorfa in $T_G$ della forma* (15), *allora*

$$A_f(y) = \tilde{N}_f(-\langle y, \mu^{(1)}\rangle, \dots, -\langle y, \mu^{(N)}\rangle)\,.$$

**Dimostrazione.** Sia $|f|_\varepsilon = \max\{\varepsilon, |f|\}$, $\varepsilon > 0$, e ugualmente $|F|_\varepsilon = \max\{\varepsilon, |F|\}$. È chiaro che $|f|_\varepsilon = |F|_\varepsilon \circ \Psi$. Osserviamo anche che $\ln|f(x + iy)|_\varepsilon$ è una f.q.p. continua su $\mathbb{R}^n$, per ogni $y \in \ln G$ prefissato. Cosicché esiste il limite

$$A_{f,\varepsilon}(y) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{(2l)^n} \int_{\|x\|<l} \ln|f(x+iy)|_\varepsilon\, dx\,.$$

In [8] durante la dimostrazione dell'esistenza della funzione $A_f(y)$, si dimostra che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{l\to\infty} \frac{1}{(2l)^n} \int_{\|x\|<l} (\ln|f| - \ln|f|_\varepsilon)\, dx = 0\,.$$

Osserviamo inoltre che la funzione $\ln|F(r_1e^{i\theta_1}, \dots, r_Ne^{i\theta_N})|$ è continua e periodica rispetto a $\theta_1, \dots, \theta_N$ e che il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} (\ln|F(r_1e^{i\theta_1}, \dots, r_Ne^{i\theta_N})| - \ln|F(r_1e^{i\theta_1}, \dots, r_Ne^{i\theta_N})|_\varepsilon), d\theta = 0\,.$$

Così per dimostrare il teorema basta verificare che

$$A_{f,\varepsilon}(y) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} (\ln|F(e^{-\langle y,\mu^{(1)}\rangle}e^{i\theta_1}, \dots, e^{-\langle y,\mu^{(N)}\rangle}e^{i\theta_N})|_\varepsilon\, d\theta\,,$$

il che segue facilmente dalla variante multidimensionale di un ben noto lemma di Weil.[6]

[6] Questa variante può essere formulata come segue. Sia $\Phi(\theta_1, \dots, \theta_N)$ una funzione continua periodica di periodo $2\pi$ rispetto a ciascuna variabile $\theta_1, \dots, \theta_N$. Siano

**Corollario 2.1** *Sia $\Omega'$ una componente connessa di $\tilde{\Omega}_f$, ove $f \in H(\Omega)$. Allora l'inclusione*

$$\alpha S_\Psi(D) \subset \alpha\partial\Omega'$$

*è falsa per ogni dominio non vuoto $D \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geqslant 1$, e per ogni $N$-upla $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)} \in \mathbb{R}^n$ di vettori linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$.*

Per rendersene conto basta osservare che dal teorema 1, la funzione $\tilde{N}_f(t)$ è lineare su $\ln\alpha\Omega'$. Se supponiamo vera l'inclusione, dalla continuità di $\tilde{N}_f(t)$, questa funzione sarà lineare anche sulle parti affini del bordo dell'insieme $\ln\alpha\partial\Omega'$ e dunque su $\ln\alpha S_\Psi(D)$. Dal teorema 6 segue allora che la funzione $A_f(y)$, ove $f = F \circ \Psi$, sarà lineare sul dominio $D$. Ciò è possibile (cf. [8] [9]) se e solo se la funzione $f(z)$ non si annulla su $T_D$. In questo caso secondo il lemma 2.1, l'ipotesi che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in T_D$ implica l'inclusione $S_\Psi(D) \subset \tilde{\Omega}_F$, il che contraddice l'inclusione $\alpha S_\Psi(D) \subset \alpha\partial\Omega'$.

Osserviamo che il corollario è evidentemente vero anche se anziché prendere $S_\Psi(D)$ prendiamo

$$\{w \in \mathbb{C}^N \mid \ln\alpha w = (-\langle y, \mu^{(1)}\rangle + a_1, \dots, -\langle y, \mu^{(N)}\rangle + a_N)\}\,, \qquad a \in \mathbb{R}^N\,.$$

Osserviamo inoltre che in relazione con il corollario possiamo porci il problema di trovare una descrizione geometrica di quei domini $\Omega'$ che sono componenti dell'insieme $\ln\alpha\tilde{\Omega}_f$.

---

inoltre $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)} \in \mathbb{R}^n$ vettori linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$. Allora,

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{(2l)^n} \int_{\|\xi\|<l} \Phi(\langle\xi, \mu^{(1)}\rangle + a_1, \dots \langle\xi, \mu^{(N)}\rangle + a_N)\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \Phi(\theta_1, \dots, \theta_N)\, d\theta\,,$$

ove il limite è uniforme rispetto a $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$. La dimostrazione di questo fatto riprende quasi esattamente quella del ben noto lemma di Weil con $n = 1$ (vedi ad esempio [1]).

## Riferimenti bibliografici


[1] Levitan B. M. *Funzioni quasi periodche.* M.: Gostiekhisdat, 1953.

[2] Jessen B. *Über die Nullstellen einer analytischen fastperiodischen Function.* Math. Ann., 1983, **108**, 485-516.

[3] Jessen B., Tornehave H. *Mean motions and zeros of almost periodic functions.* Acta Math., 1945, **77**, 137-277.

[4] Potapov B. P. *Sui fattori di un polinomio quasi periodico.* Sbornik Trudov Inta Matiematiki. AN USSR, (1949), **12**, 36 - 81.

[5] Krein M. G., Levin B. J. *Sulle funzioni quasi periodiche intere di tipo esponenziale.* Doklady AN SSSR, 1949, **64**(3), 285 - 287.

[6] Tornehave H. *System of zeros of holomorphic almost periodic functions.* Preprint, Math. Inst. Copenhagen Univ., 1988, **30**.

[7] Ronkin L. I. *Introduzione alla teoria delle funzioni intere di più variabili,* Nauka, 1971.

[8] Ronkin L. I. *Teorema di Jessen per funzioni olomorfe quasi periodiche in domini tubolari,* Sibirskiĭ Matematiceskiĭ Jurnal, 1987, **28**(3), 199-204.

[9] Ronkin L. I. *Su una classe di funzioni olomorfe quasi periodiche,* Sibirskiĭ Matematiceskiĭ Jurnal, 1992, **33**(2), 135-141.

[10] Ronkin L. I. *Teoremi di Jessen per applicazioni olomorfe quasi periodiche,* Ukrainskiĭ Matematiceski Jurnal,1990, **42**(8), 1094-1107.

[11] Ronkin L. I. *Function of completely regular growth.* Dordrecht – Boston – London: Kluwer Acad. Publishers, 1992.