Un sujet pour MEJ (de la seconde à la terminale)

(proposé par Alain Yger (*))

LE MONDE TROPICAL et les amibes
Des êtres « biologiques » en mathématiques

Une idée de sujet pour MEJ 2009

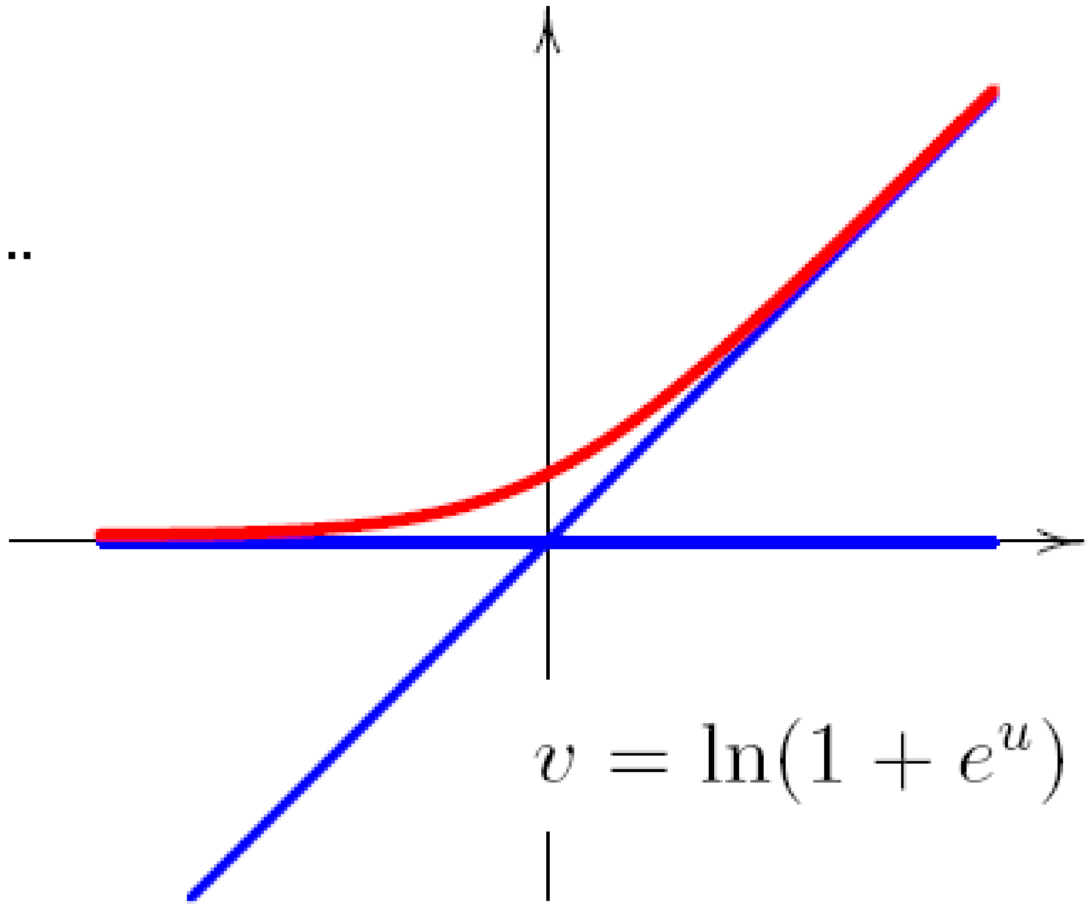
(*) Je me suis servi d'un exposé de mon collègue et ami August Tsikh (Université de Krasnoiarsk, Russie) pour des lycéens de sa région (en pleine Sibérie, regardez un globe) pour l'adapter en un sujet pour MEJ.

Que devient le graphe d'une droite (dans le premier quadrant) si l'on remplace les variables par le logarithme ?

Voici la droite :

$$y = 1 + x$$

et ce qu'elle devient …



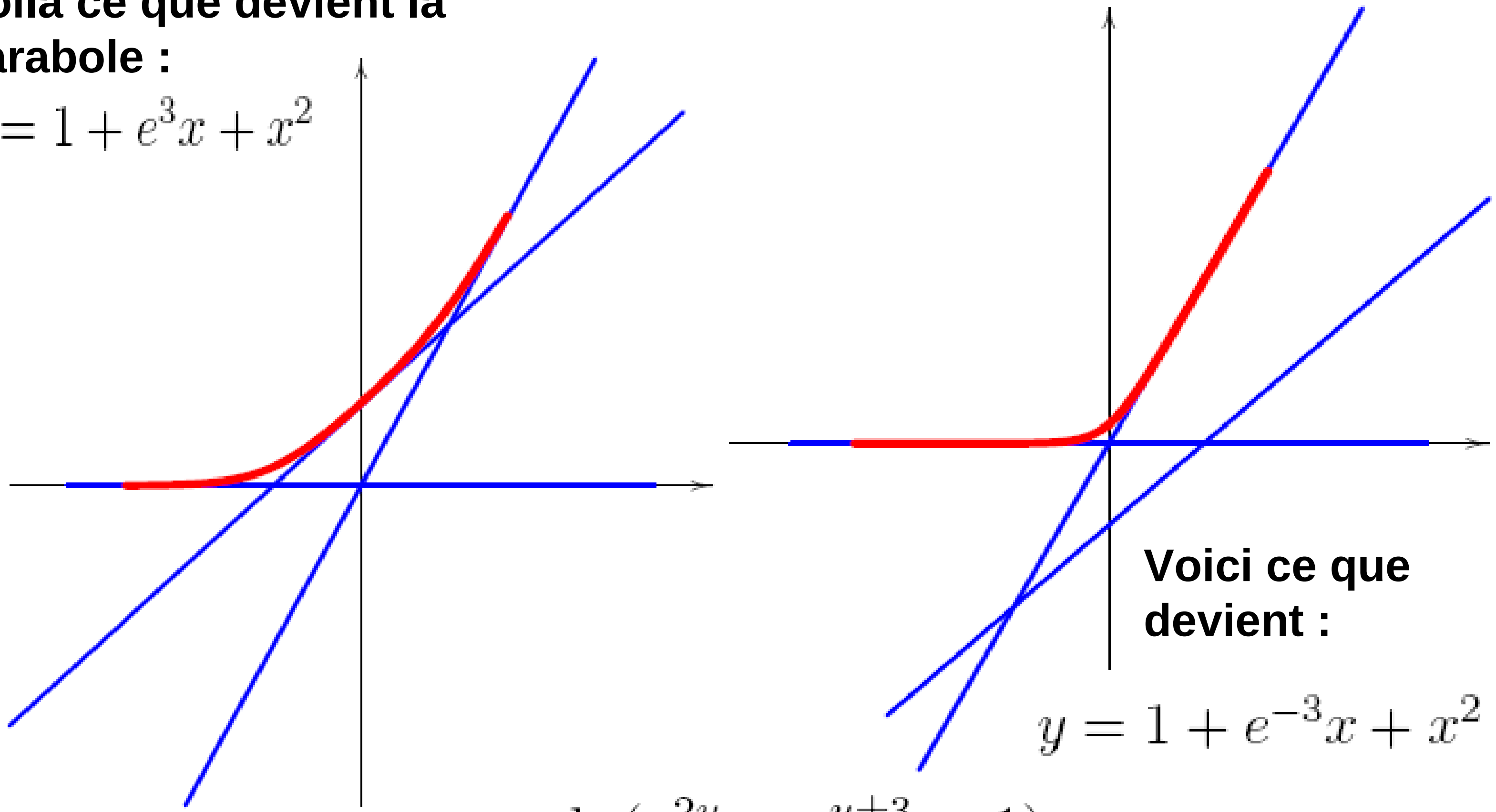
$$\begin{cases} u = \ln x \\ v = \ln y. \end{cases}$$

Une parabole maintenant

$$\begin{cases} u = \ln x \\ v = \ln y. \end{cases}$$

Voilà ce que devient la parabole :

$y = 1 + e^3 x + x^2$



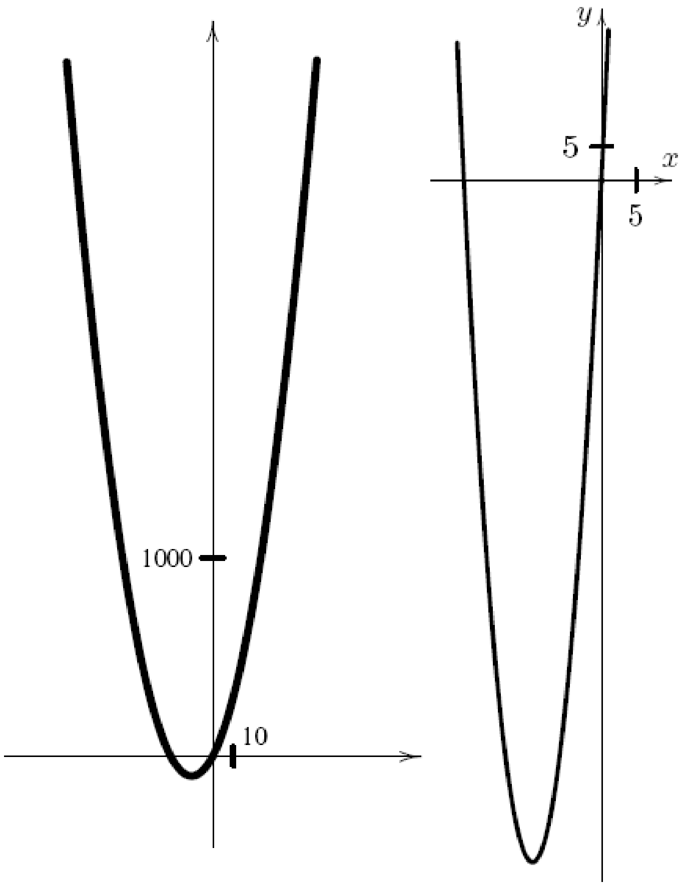
Voici ce que devient :

$y = 1 + e^{-3} x + x^2$

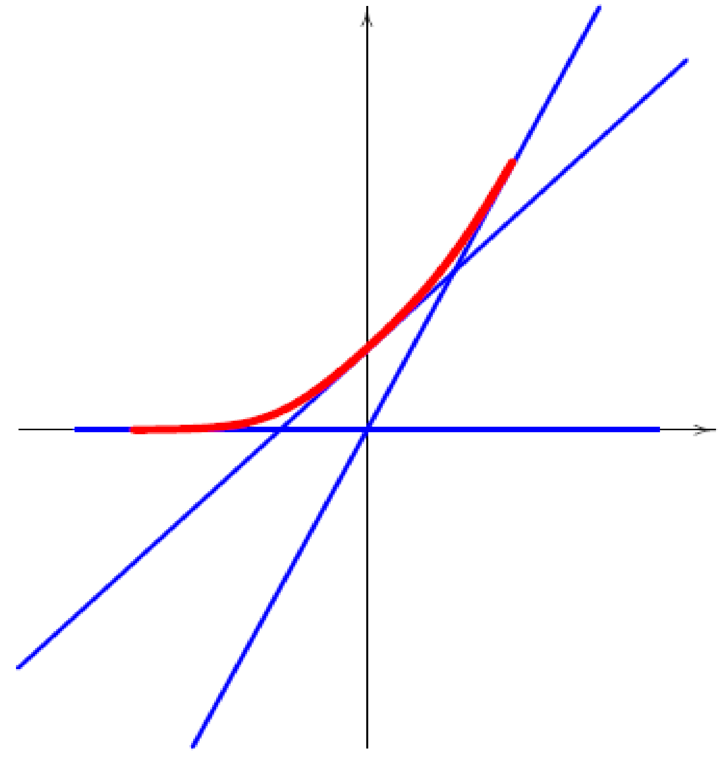
$$v = \ln(e^{2u} + e^{u \pm 3} + 1)$$

Prendre le log permet de rapprocher les distances
De voir de plus près ce qui se passe loin.
Pourquoi ? Prenez d'autres exemples.

$$\begin{cases} u = \ln x \\ v = \ln y. \end{cases}$$



$$y = 1 + e^3 x + x^2$$



$$v = \ln(e^{2u} + e^{u+3} + 1)$$

Les secondes ou les premières peuvent faire cela.

Si on faisait de l’arithmétique « tropicale »?

Décidons de travailler sur les nombres réels auxquels
on ajoute un objet plus petit qu’eux tous.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Cela a-t-il un sens de définir deux opérations comme ci-dessous ?
Essayez de faire de petits tests … d’énoncer des règles de calcul plutôt
Inattendues par rapport aux régles usuelles ….

$$x \oplus y = \max\{x, y\}$$

$$x \odot y = x + y$$

Les secondes ou les premières peuvent faire cela.

Savez vous ce qu'est un monôme en deux, en trois variables ?
Comment écrivez vous l'équation d'un cercle, d'une parabole en coordonnées (x,y) si ce n'est avec des monômes ?

Et si on décidait de penser les monômes avec nos nouvelles règles ?
Pour simplifier, contentez vous de prendre juste deux variables au lieu de n et faites des exemples … Multipliez une puissance de x par une puissance de y, puis le tout par un coefficient, mais faites cela avec nos nouvelles règles .

$$c \odot x_1^{a_1} \odot \cdots \odot x_n^{a_n},$$

$$x_i^{a_i} \mapsto a_i \cdot x_i$$

$$\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + c$$

Les secondes ou les premières peuvent faire cela.

Additionner des monômes, c'est construire ce que l'on appelle un polynôme. Faites le sur des exemples en essayant de « décoder » ce que j'ai écrit dans le cadre en dessous. Mais faites le avec des monômes et des polynômes « tropicaux » !

$$F = \oplus\{c_j \odot x_1^{a_{j1}} \odot \cdots \odot x_n^{a_{jn}}\}.$$

Voilà au dessus (on l'a appelé F) un polynôme « tropical », que l'on a défini ici comme la somme de r monômes tropicaux. Si vous traduisez les opérations, est-ce que cela ne correspond pas à écrire ?

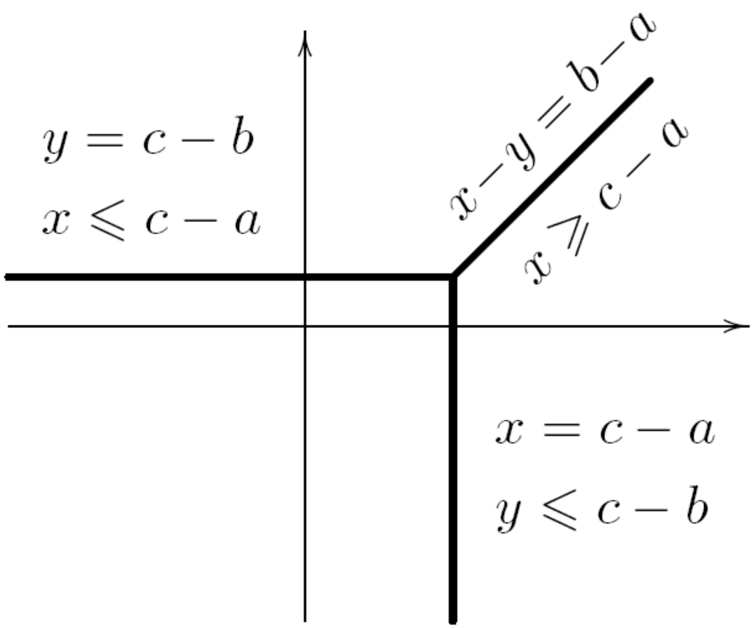
$$F(x_1, \ldots, x_n) = \max_{1 \leqslant j \leqslant r}\{a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n + c_j\}.$$

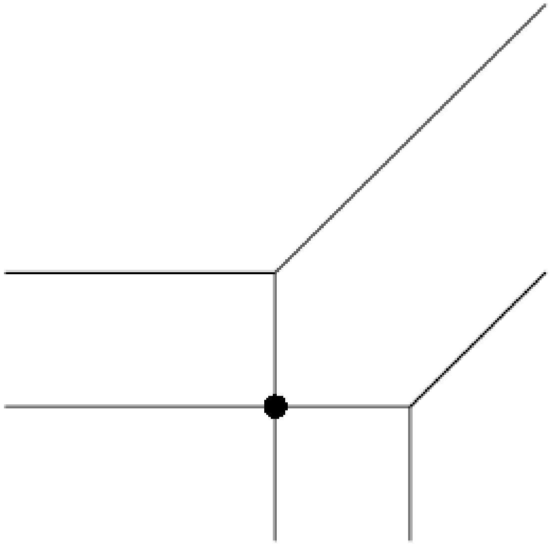
Prenez des exemples de polynômes tropicaux simples (avec deux, trois monômes) en deux variables x et y)

Les secondes ou les premières peuvent faire cela.

Essayez maintenant de dessiner dans le plan l'ensemble des points où le « graphe » du polynôme tropical présente une « brisure ». Pourquoi cela donne-t-il ce que j'ai représenté ?

$\max\{a+x, b+y, c\}$





Ce que vous avez tracé est une droite tropicale (car les exposants des monômes sont 0 ou 1)

Le polynôme f dont on est parti

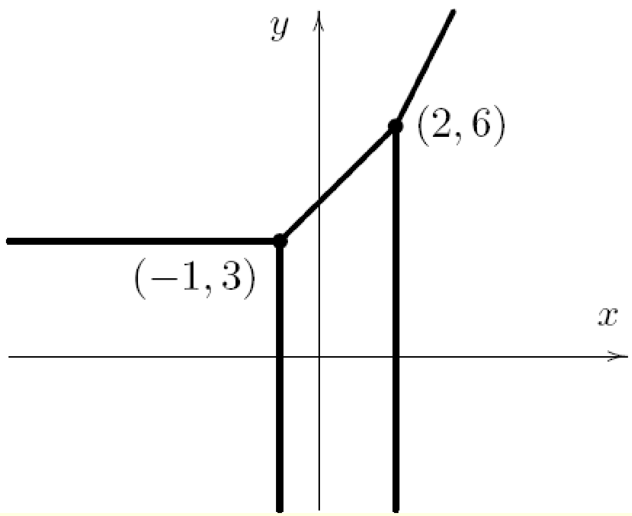
$$f(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$$

En combien de points se coupent deux droites tropicales ?

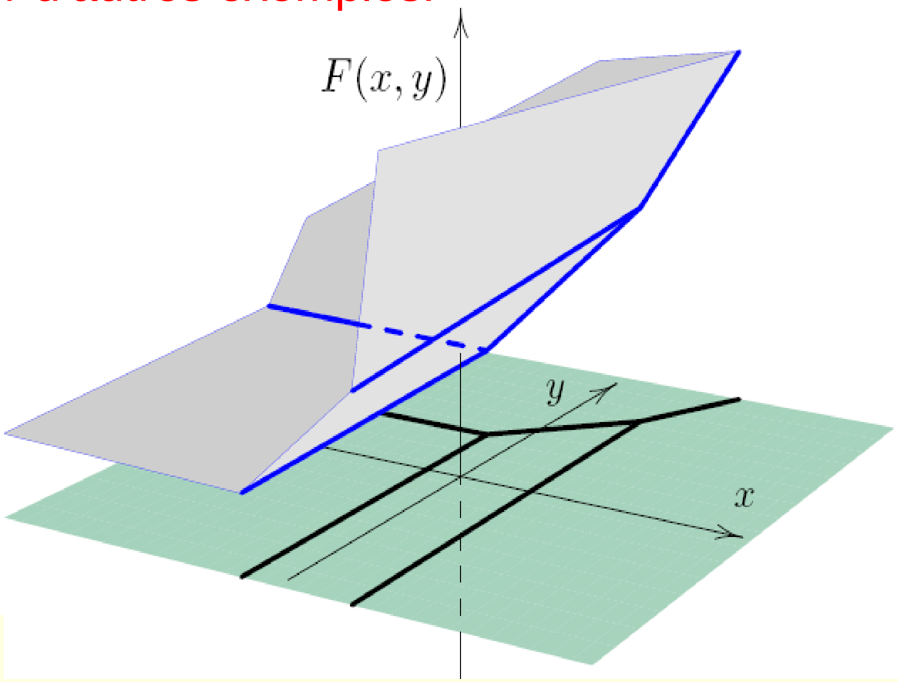
Les secondes ou les premières peuvent faire cela (avec l'aide des terminales ?)

Essayez vous à des figures plus compliquées (comme des représentations de faîtes de toiture en trois dimensions) et essayez de deviner à partir de mon exemple comment j'ai fait pour représenter dans le plan la courbe tropicale qui correspond à un polynôme F donné.

Avec Scilab, vous pourrez regarder d'autres exemples!
et faire de jolis dessins en 3D !



La courbe tropicale
(correspondant à F)



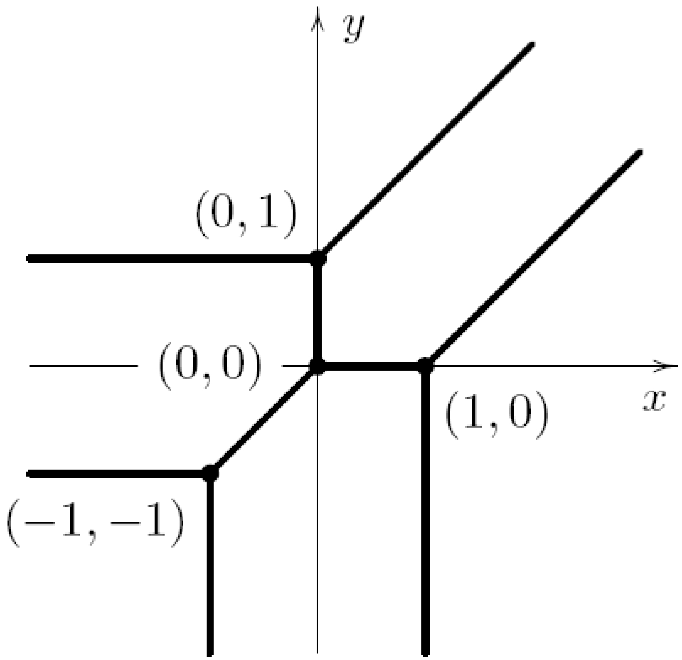
Le faîte de la toiture et le polynôme F

$$F(x,y) = \max\{y-1; 2x+1; x+3; 1\}$$

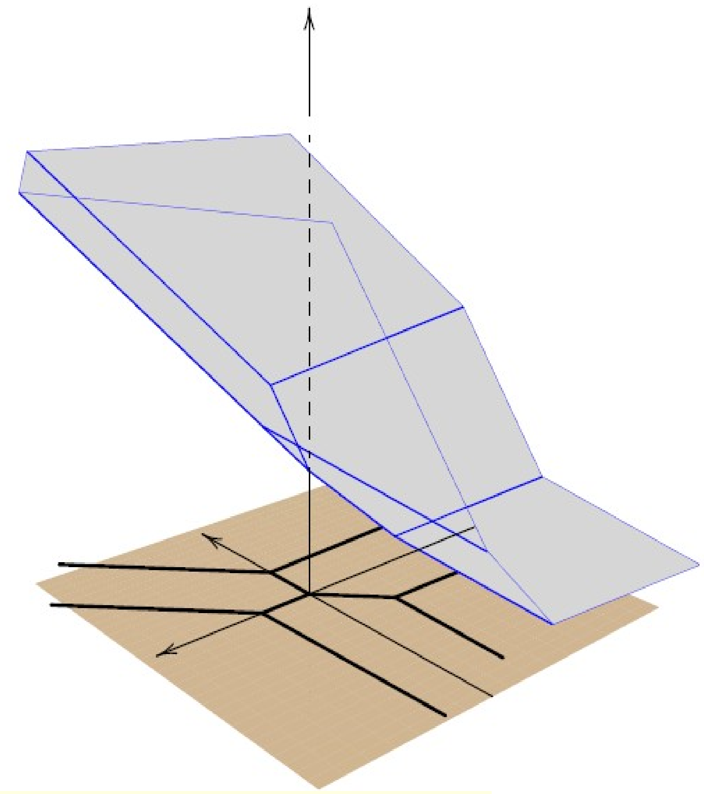
Pourquoi puis-je dire que j'ai tracé à gauche une parabole tropicale ?

Les secondes ou les premières peuvent faire cela (avec l'aide des terminales ?)

En voilà un autre, plus compliqué, pour vous aider à deviner ma méthode.



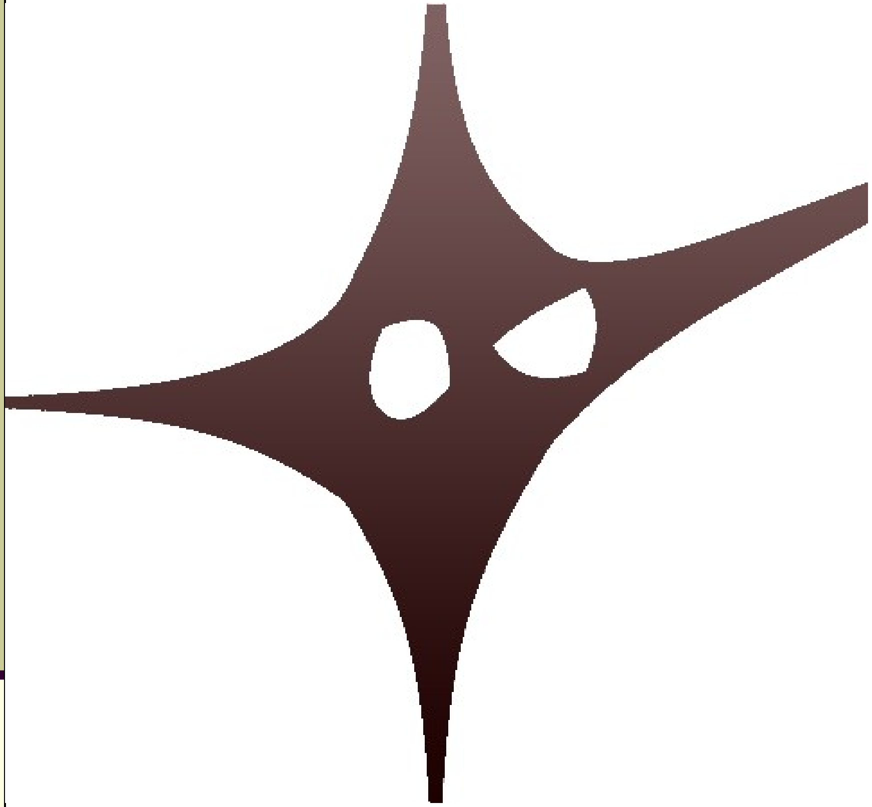
La courbe correspondant à F



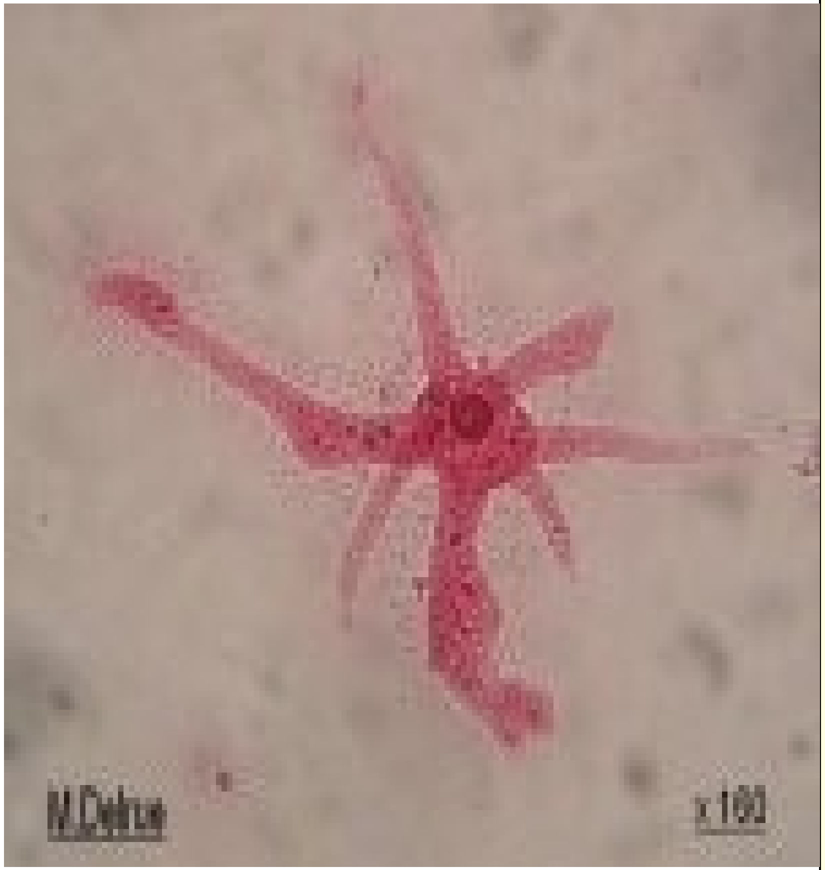
La fonction F : $F(x, y) = \max\{1+2x; 1+2y; 2+x+y; 2+x; 2+y; 1\}$

Quel est le vrai polynôme dont F est la version tropicale ? Bizarre, non ?

Où se croisent les êtres mathématiques et les êtres biologiques ….



Une amibe mathématique



Une amibe biologique

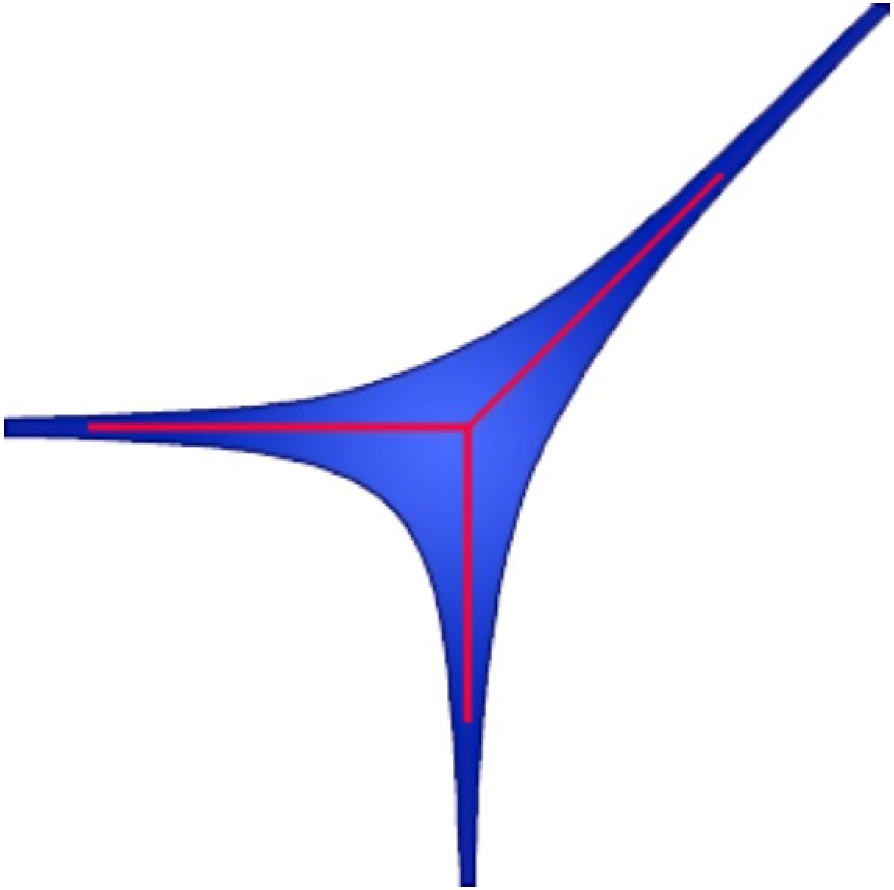
Les secondes peuvent se mettre à cette question, avec l'aide des terminales

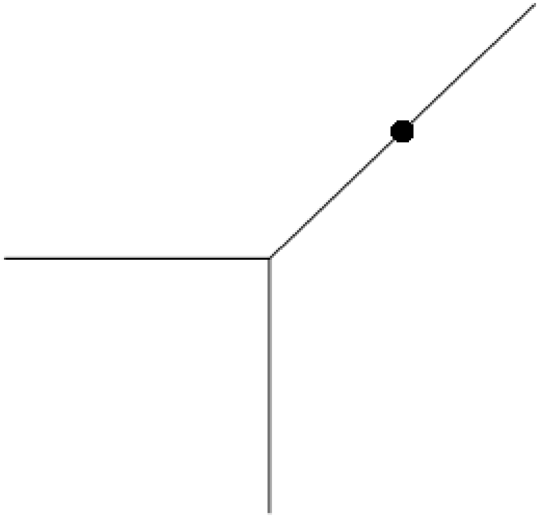
Prenez l'ensemble E des couples de nombres complexes non nuls (z,w) (pour les secondes, on peut penser à des vecteurs du plan) tels que z+w=1 et essayez de dessiner (dans le plan), l'image de cet ensemble par l'application qui à (z,w) associe (|z|,|w|).

Ensuite (avec l'aide des terminales), dessiner l'image de E par l'application qui à (z,w) associe (log |z|,log |w|). Vous devez avoir ainsi construit une amibe « mathématique » . Pourquoi dit-on que c'est l'amibe d'une droite ?

Là aussi, tout le monde peut collaborer (secondes, premières, terminales)

Les amibes ont un squelette le long duquel elles peuvent se rétracter !





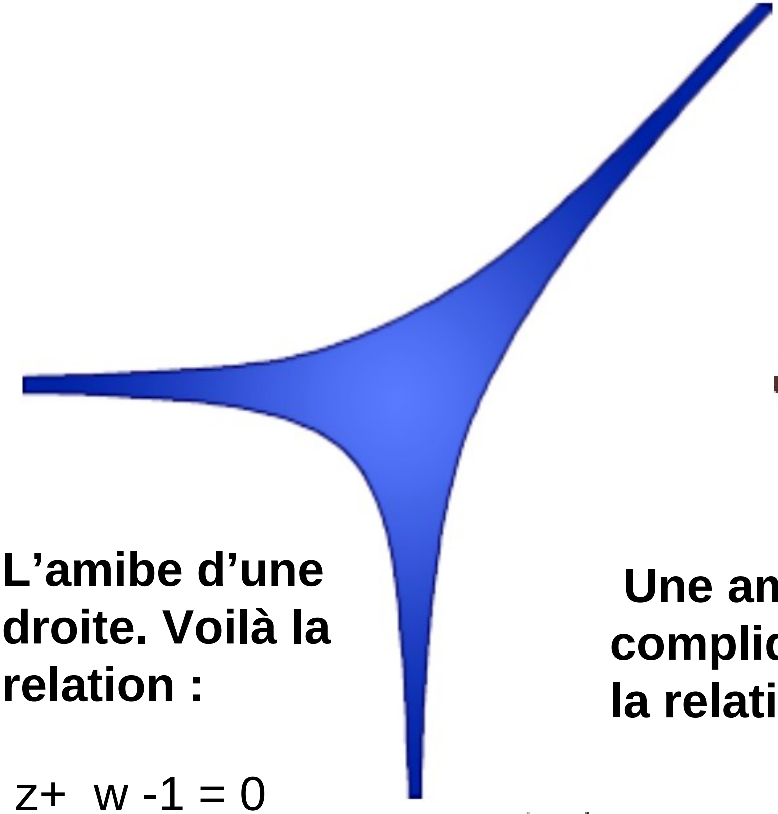
Est-ce que cela ne vous fait pas penser à la droite tropicale de tout à l'heure (avec des valeurs à ajuster pour a,b,c) ?

Comment retrouver la droite tropicale liée à trois paramètres a,b,c donnés ?

Pour les terminales (il y a des nombres complexes) mais tout le monde peut s'y mettre…

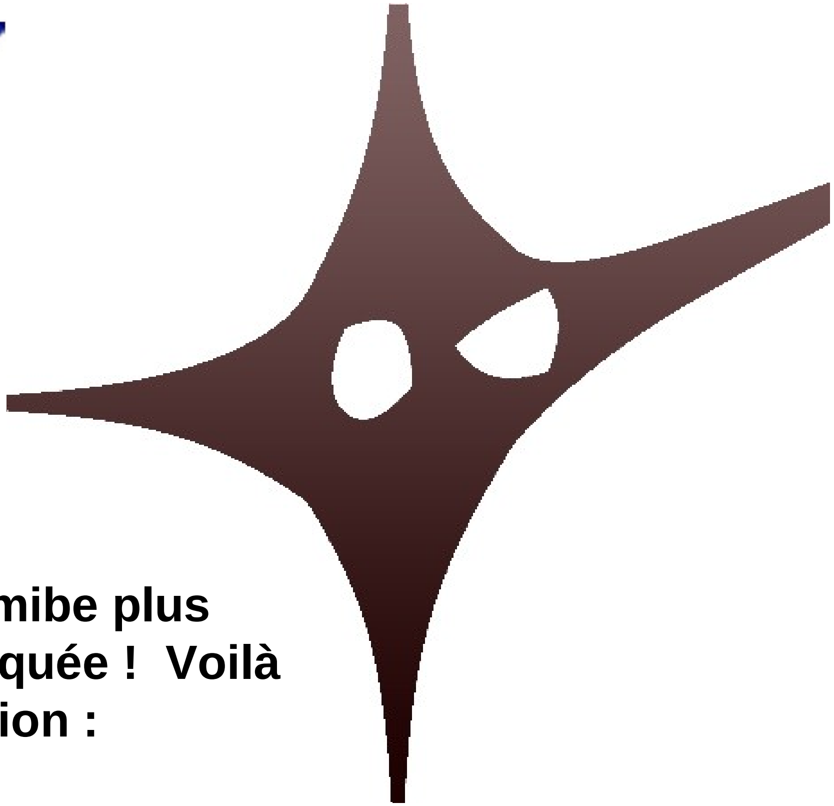
On peut continuer à jouer avec les nombres complexes, à prendre cette fois pour ensemble E l'ensemble de tous les couples (z,w) de nombres complexes non nuls liés par une équation (comme l'exemple), puis prendre l'image par l'application Log que je définis ici.   J'ai pris un exemple et fait le dessin.

$$\mathrm{Log} : (\mathbb{C} \setminus 0)^2 \to \mathbb{R}^2 : (z, w) \mapsto (\log|z|, \log|w|)$$



L'amibe d'une droite. Voilà la relation :

z+ w -1 = 0

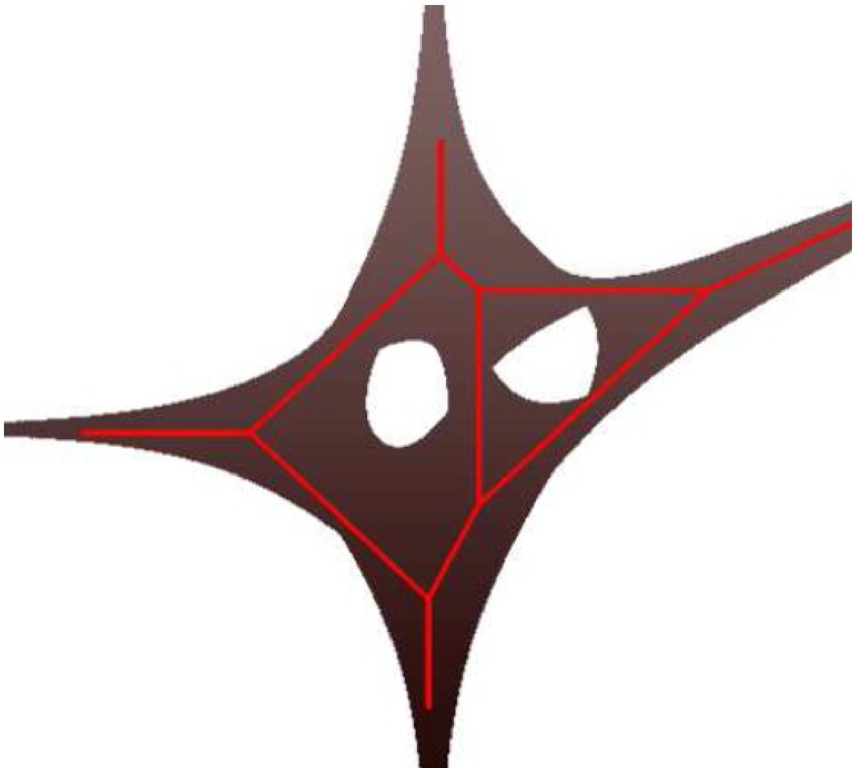


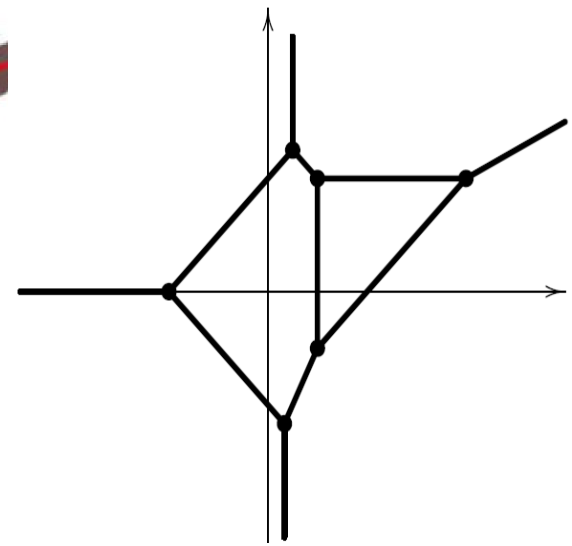
Une amibe plus compliquée ! Voilà la relation :

$1 + 5zw + w^2 - z^3 + 3z^2w - z^2w^2 = 0$

Là, il faut plein d'intuition et bien analyser ce qui se passe pour les droites. Tout le monde peut s'y mettre…

Cette amibe aussi a un squelette ! Je l'ai dessiné à droite.

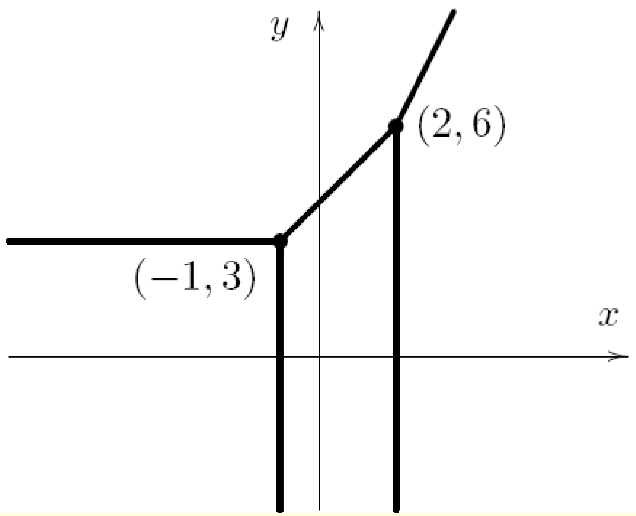




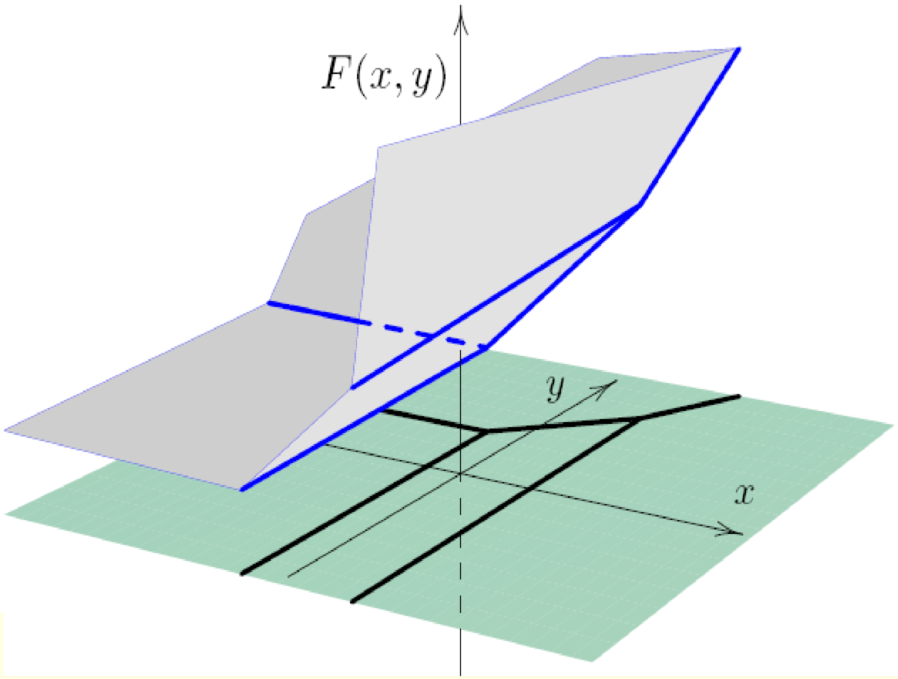
Quel polynôme tropical il y aurait fallu prendre pour le construire ?
A vous d'essayer de deviner … et, si vous avez le temps, de vérifier …
Si vous réussissez, vous savez passer du monde complexe au monde tropical !

Essayez maintenant de faire l’inverse et de passer du monde tropical au monde complexe …

Reprenez la parabole tropicale de tout à l’heure ? Auriez vous une idée de la relation qu’il faut écrire entre deux nombres complexes z et w pour construire une amibe dont le squelette sera cette parabole tropicale ?



La parabole tropicale (correspondant à F)

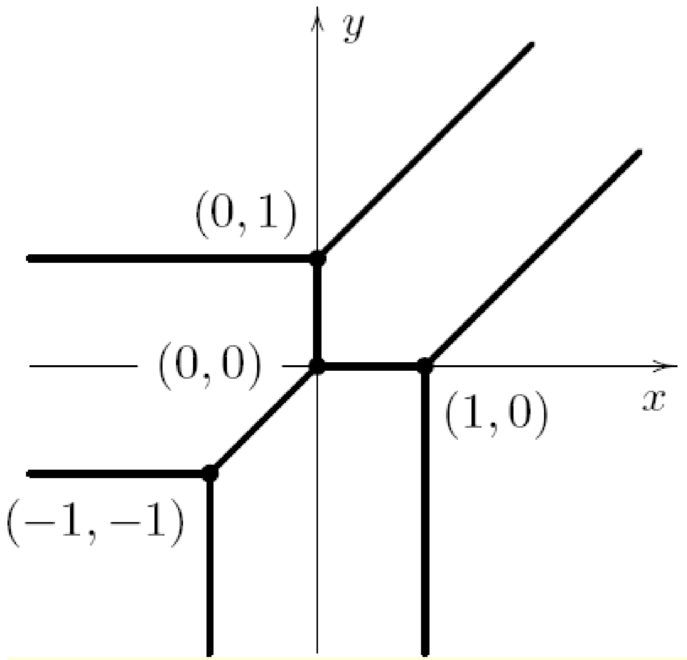


Le faîte de la toiture et le polynôme F

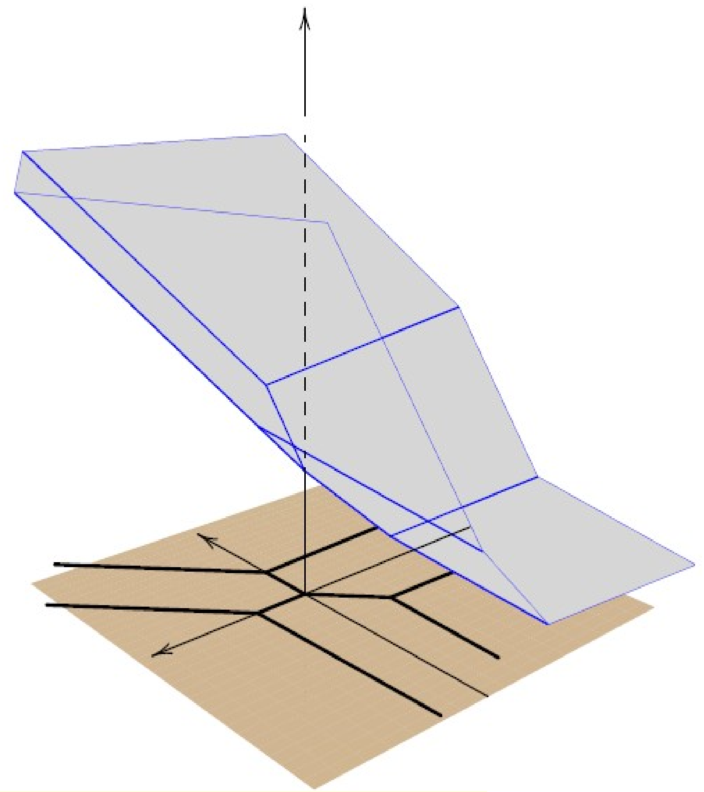
$$F(x,y) = \max\{y-1; 2x+1; x+3; 1\}$$

Encore un exemple …

Quelle peut bien être la relation entre z et w qui nous permette de trouver une amibe dont le squelette soit la courbe tropicale que l'on a construit tout à l'heure ?



La courbe tropicale correspondant à F



La fonction F : $F(x,y) = \max\{1+2x; 1+2y; 2+x+y; 2+x; 2+y; 1\}$

On peut faire plein de choses encore. Revenons au monde tropical et prenez un polynôme tropical comme celui que j'ai pris en dessous.

$$F_1 = 0 \oplus 2 \odot x \oplus 0 \odot x \odot y \oplus 0 \odot y$$

Il y a 4 monômes et voici ici les paires d'exposants : d'accord ?

$(0,0),\ (1,0),\ (1,1),\ (0,1)$

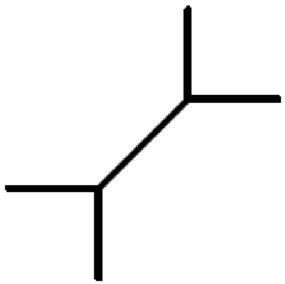
A chaque paire, ajoutez le coefficient ; est-ce bien cela ?

(0,0,0) (1,0,2) (1,1,0) (0,1,0)

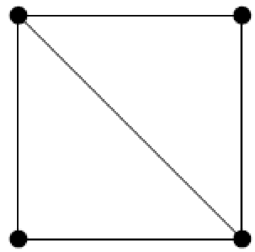
Dessinez maintenant dans l'espace la figure dont ces quatre points sont les sommets ; cela s'appelle un tétraèdre.

Imaginez que ce tétraèdre est transparent et que seules les arêtes sont coloriées en noir. Regardez le ensuite comme si vous étiez à la verticale au dessus. Que voyez vous ?

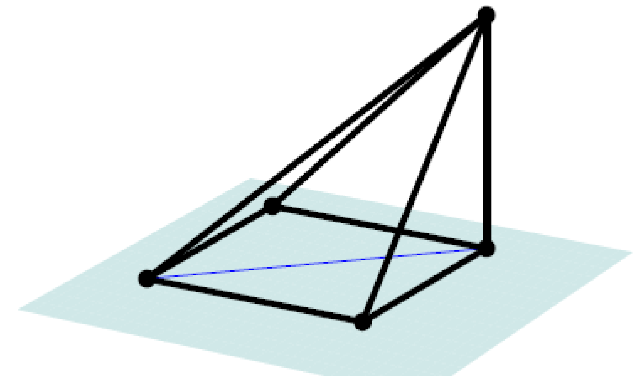
Ce que vous devez voir de dessus est dessiné sur la figure centrale. D’accord ? A gauche, c’est la courbe tropicale du polynôme, toujours d’accord ?



La courbe tropicale



Ce que l’on doit voir de dessus …



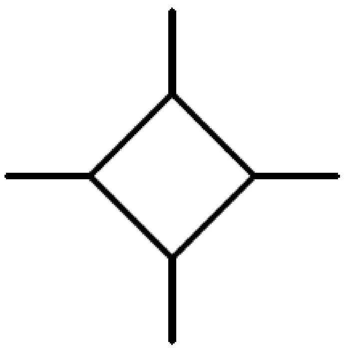
Le tétraèdre

$$F_1 = 0 \oplus 2 \odot x \oplus 0 \odot x \odot y \oplus 0 \odot y$$

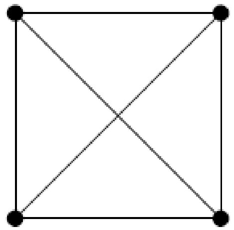
Comptez les sommets de votre figure centrale et comptez en combien de régions la courbe tropicale du polynôme partage le plan. Comptez ensuite les arêtes de cette même figure centrale et le nombre d’arêtes de votre graphe tropical. Comptez enfin en combien de régions votre figure centrale est divisée, puis le nombre de sommets de votre graphe tropical.

Une conjecture ??

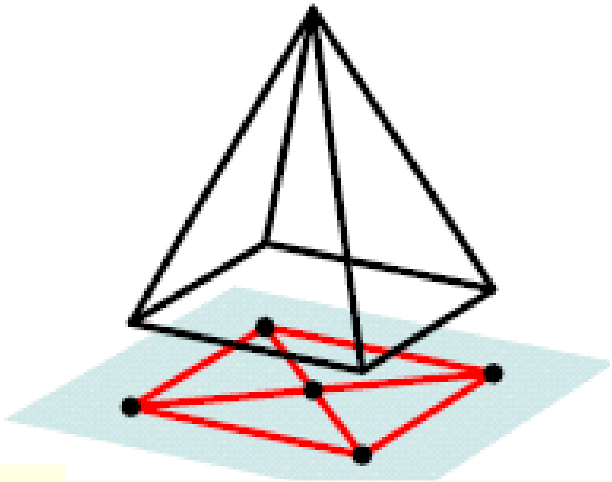
Encore un exemple; vérifiez que je ne me suis pas trompé.



Le graphe tropical



Ce que l'on voit de dessus



Le tétraèdre (il y a encore quatre monômes)

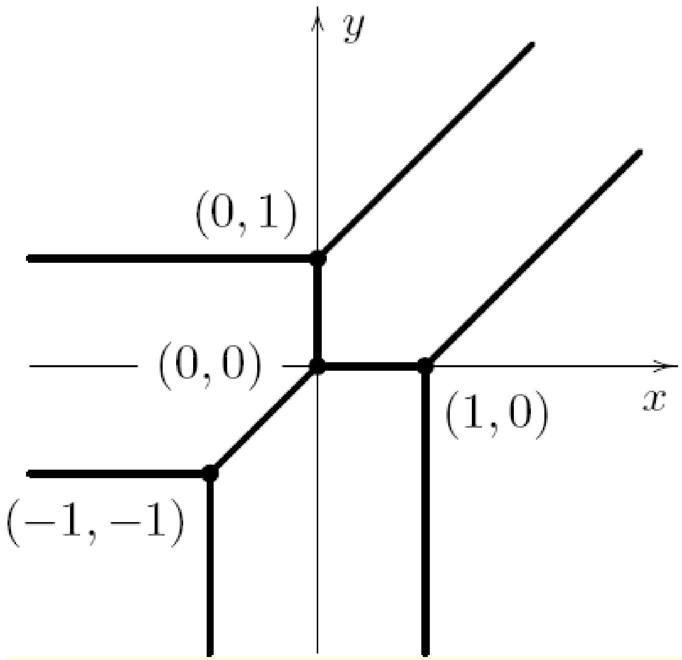
$$F_2 = 1 \oplus 1 \odot x^2 \oplus 1 \odot x^2 \odot y^2 \oplus 1 \odot y^2 \oplus 3 \odot x \odot y$$

Les exposants des monômes : $(0,0),\ (2,0),\ (0,2),\ (2,2)$

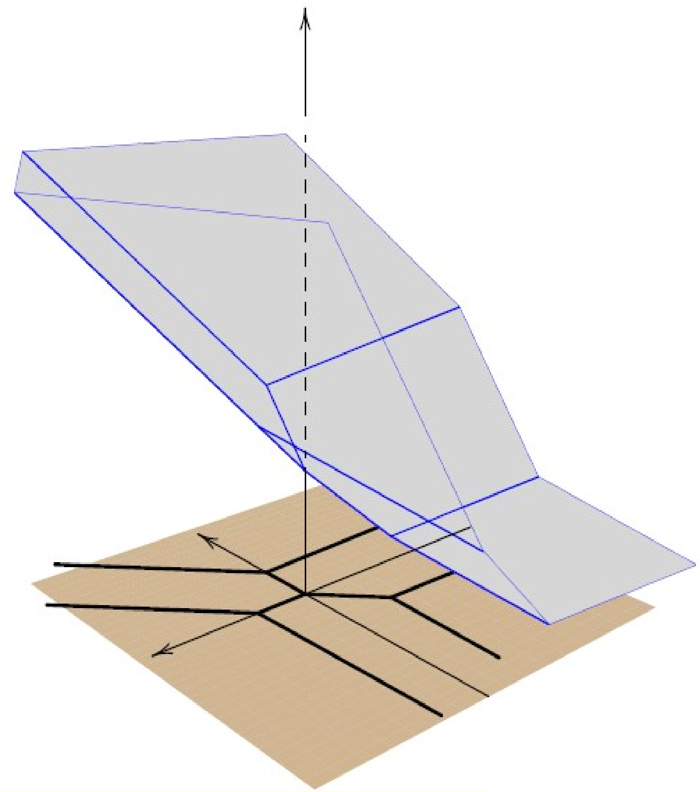
Les sommets du tétraèdre : $(0,0,1), (2,0,1), (0,2,1), (2,2,1), (1,1,3)$

Recommencez à compter comme tout à l'heure et à comparer …

Refaites la même chose avec cet exemple …. un peu plus compliqué.

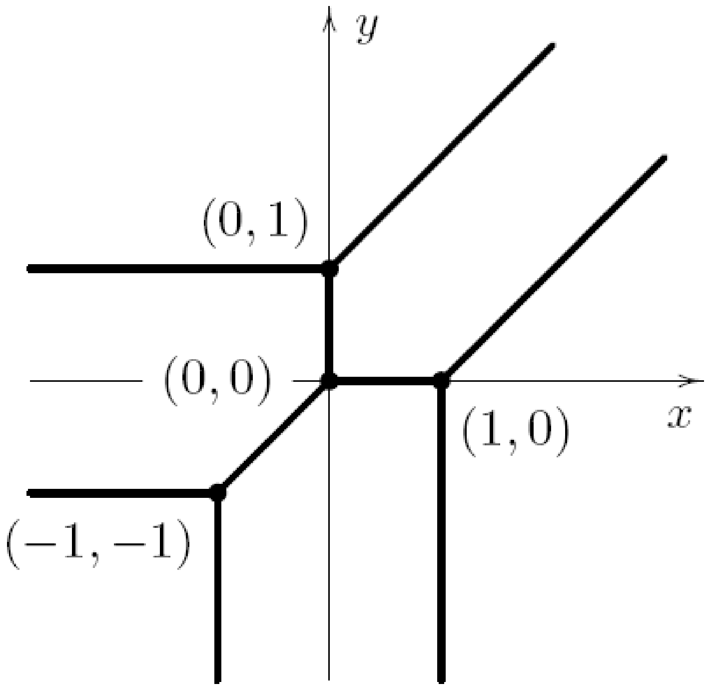


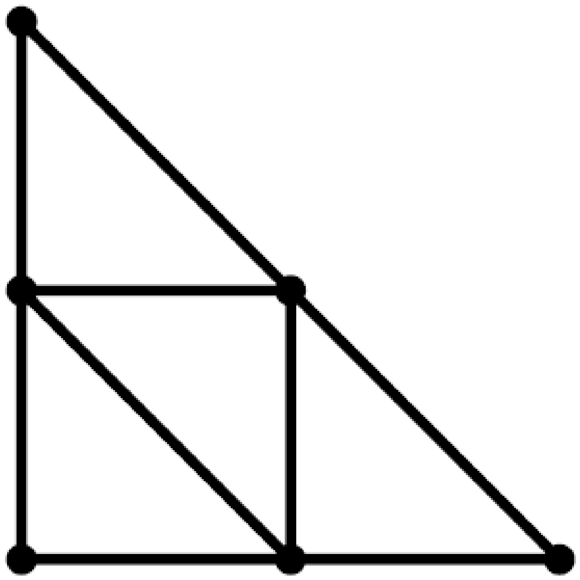
La courbe tropicale correspondant à F



La fonction F : $F(x,y) = \max\{1+2x; 1+2y; 2+x+y; 2+x; 2+y; 1\}$

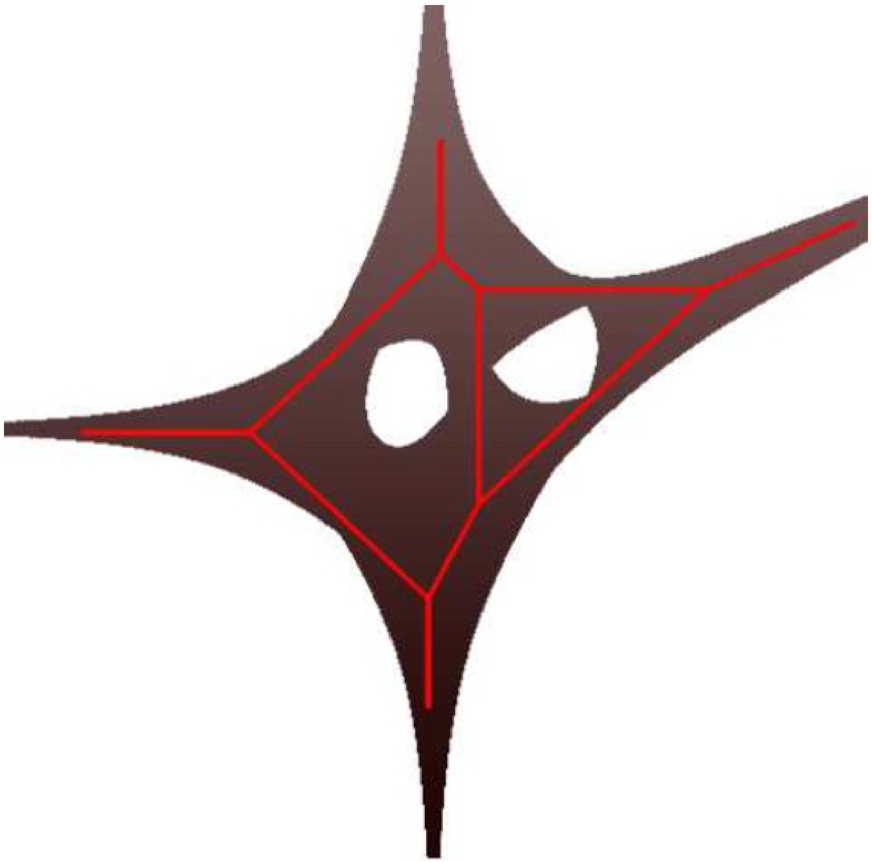
J’ai dessiné à gauche ce que l’on voit du haut en faisant le même travail qu’avant. Vérifiez que je ne me suis pas trompé, puis comptez encore et comparez. Votre conjecture tient-elle encore?

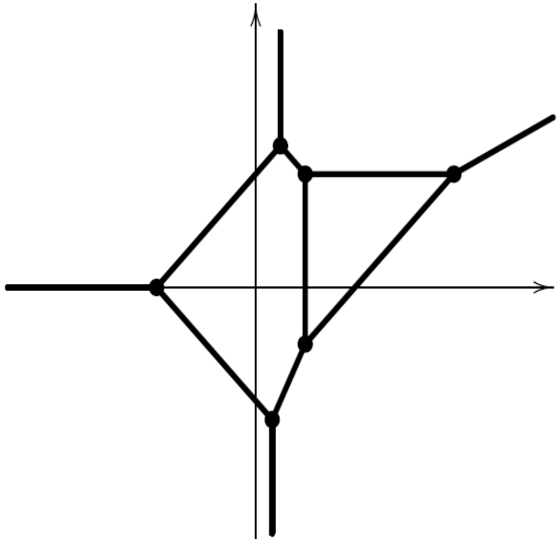




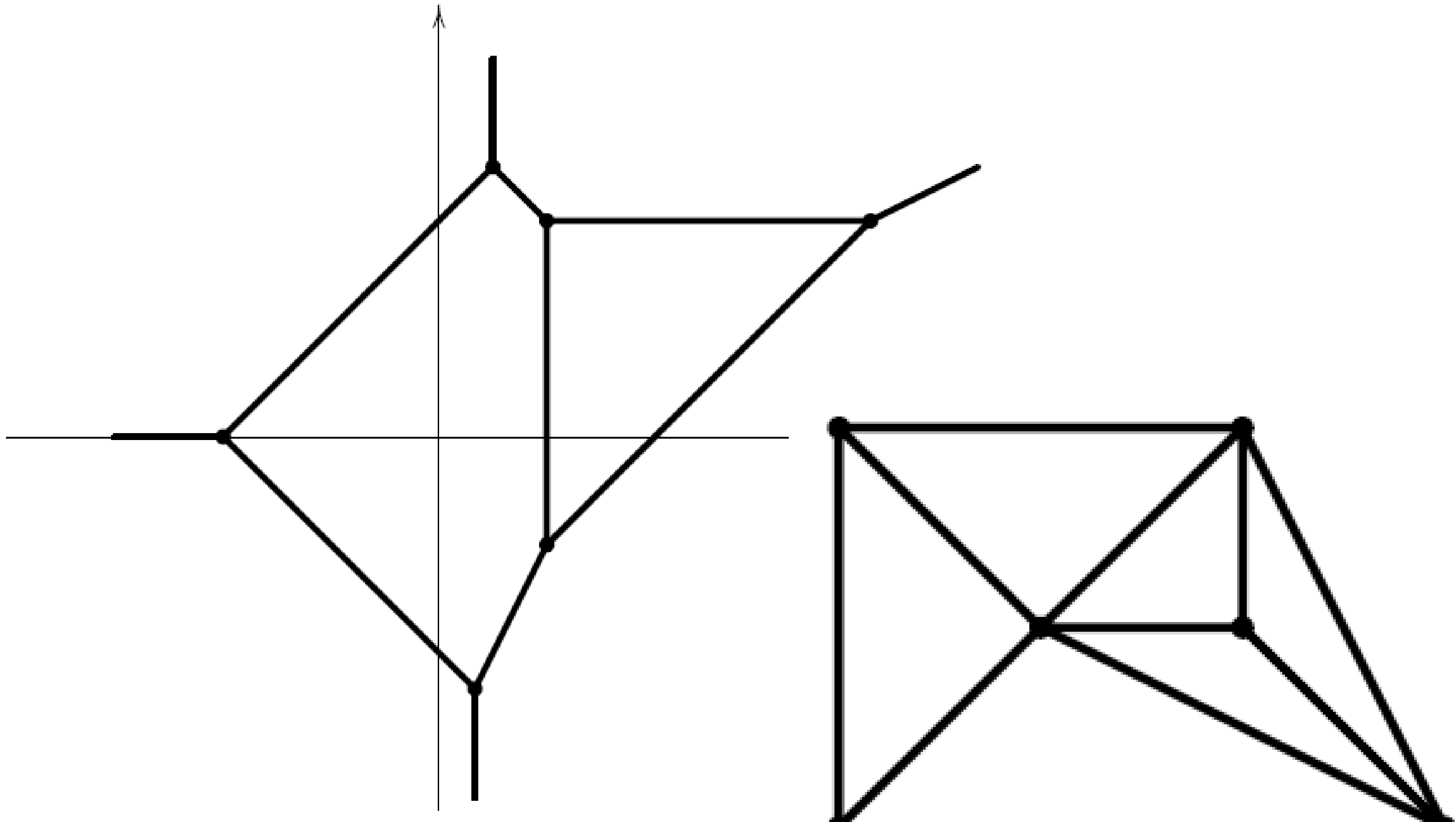
La vue de dessus de la figure construite dans l’espace sur le même principe que dans mes deux premiers exemples.

Reprenez la courbe tropicale que vous avez (si vous y êtes arrivé) construit un peu plut tôt et qui correspond au squelette de l’amibe grise. Listez les exposants du polynôme tropical, puis les coefficients dont ils sont affectés. Représentez ce qui remplace le tétraèdre (comme il y a cette fois 6 monômes, il devrait y avoir 6 points à relier dans l’espace pour obtenir cette figure). Regardez cette figure de dessus comme dans les exemples qui précèdent.





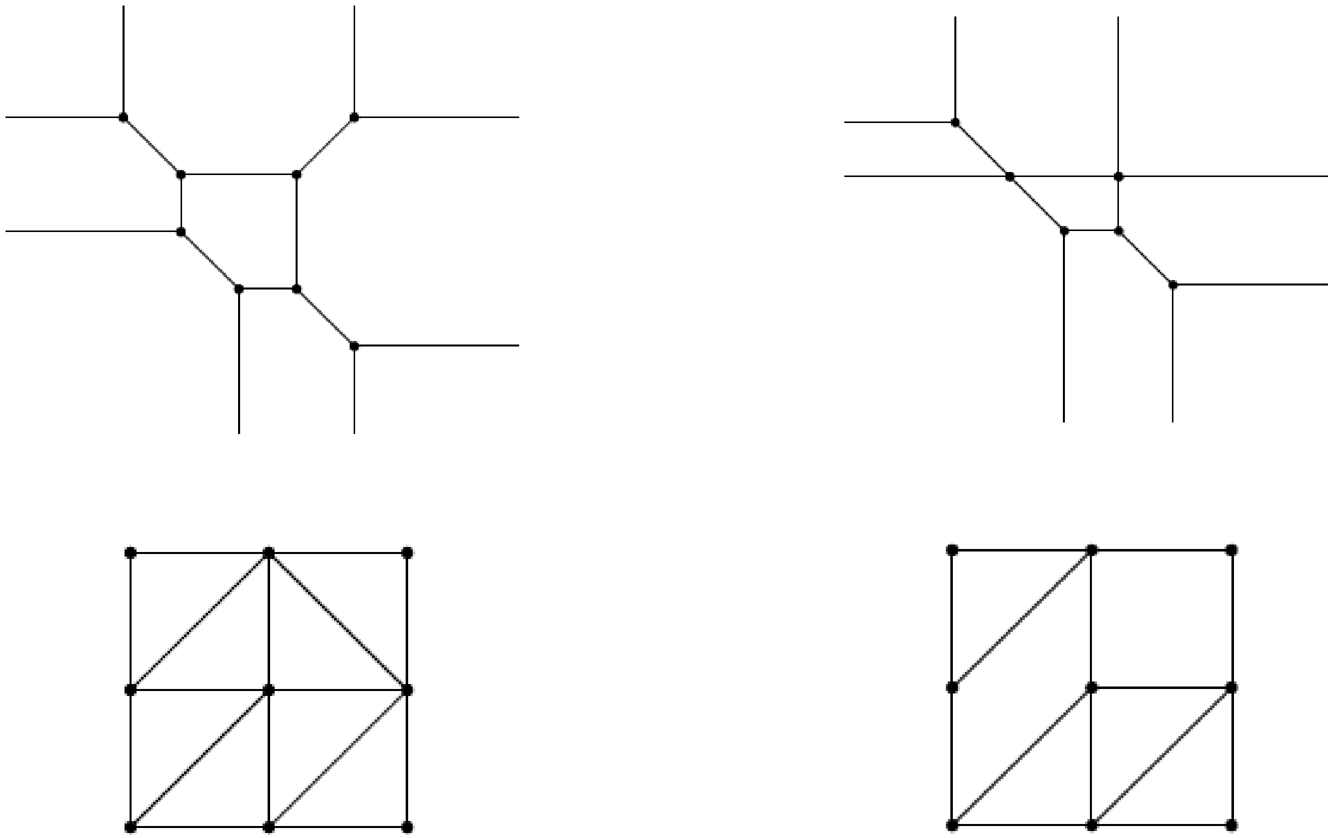
Voilà ce que vous devriez voir … Essayez de le retrouver …
Refaites les décomptes comparés des sommets, des arêtes et des pièces du puzzle dans la vue de dessus. Comparez avec le nombre de zones partitionnées, le nombre d’arêtes et le nombre de sommets de la courbe tropicale de gauche.



Votre conjecture s’affirme t –elle de plus en plus ?

Un problème pour tous (sûrement trop difficile, mais ce serait super d'avoir des idées !)

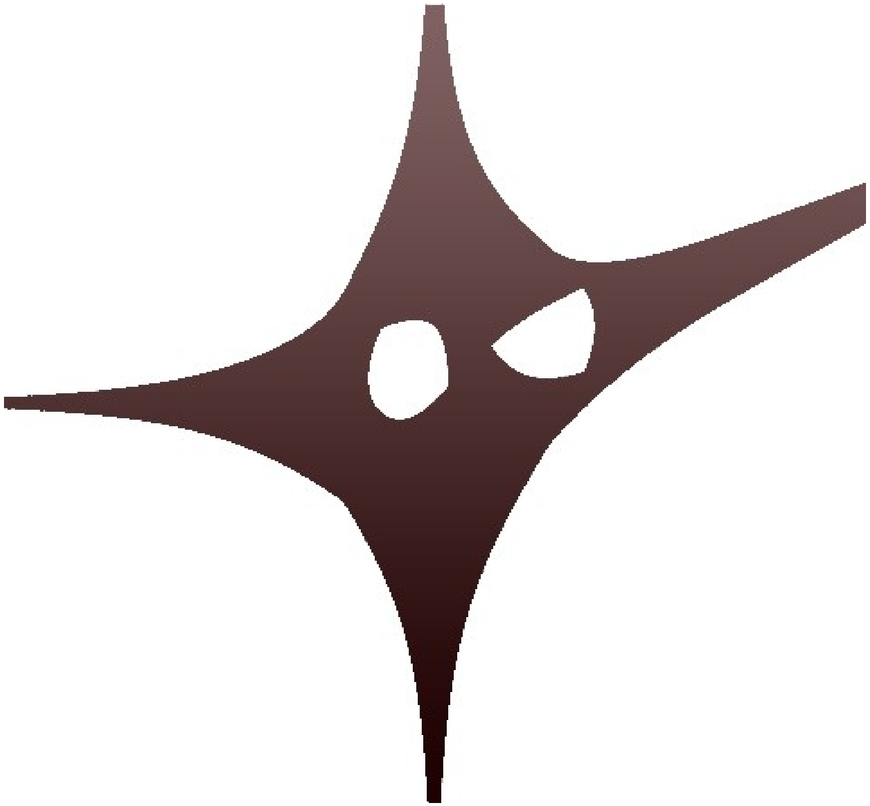
Vous avez fait une conjecture. Voilà deux autres exemples pour vous convaincre. Comptez encore …



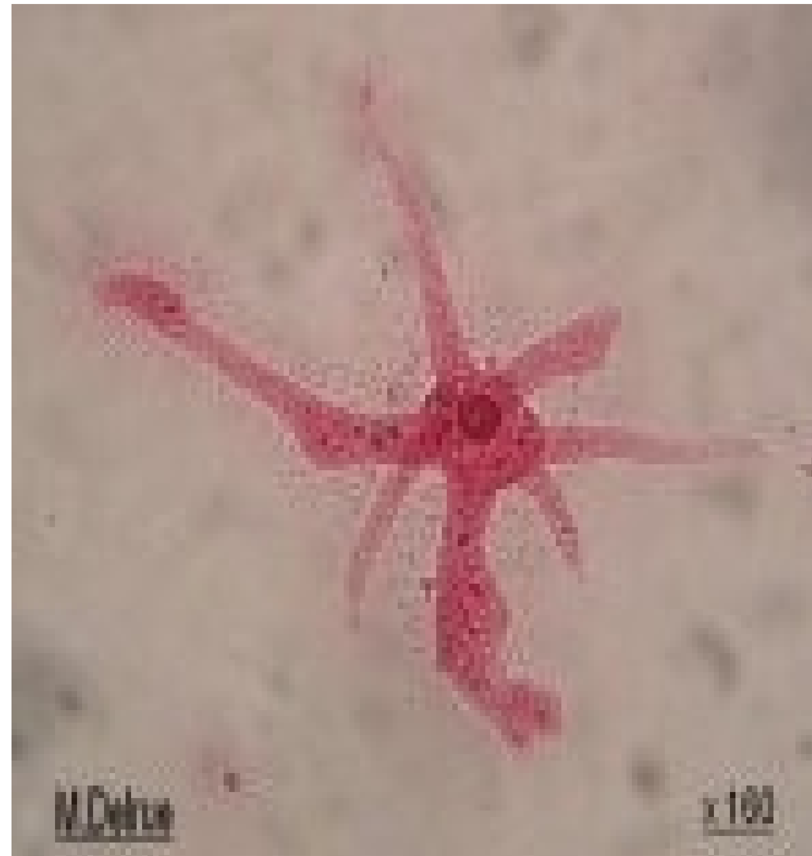
Cela colle t-il sur ces deux exemples ?

Avez-vous des idées pour démontrer cette conjecture ?

Voilà: vous voyez qu'il y a plein à faire ! Posez moi toutes les questions. Bon courage !



Une amibe mathématique



Une amibe biologique