Une introduction aux amibes

Alain Yger

25 mars 2012

1 Fonctions Log et Arg, amibes, fonction de Ronkin

1.1 Fonctions Log et Arg

La fonction Log $: \mathbb{T}^n = (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui à $(z_1, ..., z_n)$ associe $(\log |z_1|, ..., \log |z_n|)$ jouera pour nous un rôle majeur. L'un des attraits de cette fonction est de permettre de « ramener » l'étude des phómènes asymptotiques (au voisinage de l'infini) à un domaine d'étude plus proche de l'origine.

Il faudrait aussi lui coupler la fonction Arg, elle aussi définie sur $\mathbb{T}^n = (\mathbb{C}^*)^n$, que l'on peut envisager sous sa forme non périodisée

$$(z_1, ..., z_n) \mapsto (\mathrm{Arg}_{]-\pi,\pi]}(z_1), ..., \mathrm{Arg}_{]-\pi,\pi]}(z_n)) \in]-\pi, \pi]^n$$

ou sous sa forme périodisée

$$(z_1, ..., z_n) \mapsto (\mathrm{Arg}\,(z_1), ..., \mathrm{Arg}\,(z_n)) \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^n \,.$$

1.2 Amibes en codimension 1

Soit Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction holomorphe dans $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$ [1]. On note $V(f)$ l'ensemble des zéros de f dans $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$.

1. Un exemple algébrique important pour nous par la suite sera celui de $\Omega = \mathbb{R}^n$ et

$$f(z) = F(z_1^{\pm 1}, ..., z_n^{\pm 1})\,,$$

$F(X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1})$ étant un polynôme de Laurent en n variables à coefficients complexes. Dans ce cas $\Omega = (\mathbb{C}^*)^n$.

Definition 1.1 *L'amibe* $\mathcal{A}_f$ *de* f *(il serait plus judicieux de parler de la noter* $\mathcal{A}_{V(f)}$ *mais pour simplifier nous garderons la notation* $\mathcal{A}_f$*) est par définition le sous-ensemble fermé de* Ω *défini comme l'ensemble*

$$\mathcal{A}_f := \mathrm{Log}\Big(\{z \in \mathrm{Log}^{-1}(\Omega)\,;\ f(z) = 0\}\Big) = \mathrm{Log}\,(V(f))\,.$$

Proposition 1 *Les composantes connexes de* $\Omega\backslash\mathcal{A}_f$ *sont des sous-ensembles ouverts de* Ω *convexes.*

En effet, si E est une telle composante et $x = \mathrm{Log}\,(z_0)$ un point de E, on peut développer au voisinage de z_0 la fonction méromorphe $1/f$ en série de Laurent des puissances des z_j, cette série de Laurent convergeant aussi absolument dans $\mathrm{Log}^{-1}(\widehat{E})$, où $\widehat{E}$ désigne l'enveloppe convexe de E dans l'ouvert convexe Ω ; comme $\widehat{E}$ est aussi un ouvert connexe de Ω contenant E, on a $E = \widehat{E}$, d'où la convexité de E. Cette notion d'amibe a été introduite pour la première fois dans [5] et la convexité des composantes de $\Omega \setminus \mathcal{A}_f$ a été prouvée (suivant l'argument évoqué ci-dessus) dans [3]. $\diamondsuit$

On donnera ici[2] l'exemple de l'amibe du polynôme de Laurent $X_1 + X_2 = 1$: les conditions pour qu'étant donnés deux nombres strictement positifs r_1, r_2, il puisse exister un triangle de côtés $r_1, r_2, 1$ sont

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &\geq 1 \\ r_1 + 1 &\geq r_2 \\ r_2 + 1 &\geq r_1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

et l'image du domaine défini comme l'intersection du fermé de $\mathbb{R}^2$ décrit par ce jeu d'inégalités (1.1) avec $]0, \infty[^2$ par l'application $(\rho_1, \rho_2) \mapsto (\log \rho_1, \log \rho_2)$ est précisément l'amibe de $X_1 + X_2 - 1$ dans $\mathbb{R}^2$. Il convient de souligner que l'amibe du polynôme de Laurent $X_1^m + X_2^m - 1$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, est simplement une version dilatée (par homothétie de rapport $m \in \mathbb{N}^*$) de l'amibe du polynôme $X_1 + X_2 - 1$, ce qui traduit le fait que le concept géométrique d'amibe (attachée ici à un polynôme de Laurent) ne prend aucunement en ligne de compte certaines propriétés géométriques de la courbe, par exemple ici le genre !

Le « contour » de l'amibe de $V(f)$ est par définition l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de Log à l'hypersurface $V = V(f)$; outre la frontière topologique de l'amibe, ce contour contient aussi l'image par Log du lieu singulier de $V = V(f)$. C'est par le tracé du coutour que l'on peut aborder numériquement

2. Je ferai un dessin et expliquerai le pourquoi de la terminologie avec la comparaison avec la figuration des amibes en biologie.

(par exemple lorsque $V(f)$ se présente comme une courbe paramétrée, au moins localement hors du lieu singulier de f) le tracé de l'amibe de $V(f)$ à partir du tracé de sa frontière (dans le $n = 2$) : si z_1 et z_2 sont, le long de $V(f)$, fonctions d'un paramètre complexe $t = u + iv$, on exprimera l'une des variables u, v (par exemple u) en fonction de l'autre (ici v) en écrivant la nullité du Jacobien de $(u, v) \mapsto (\log |z_1(u + iv)|, \log |z_2(u + iv)|)$ et on représentera la courbe obtenue par la paramétrisation $u \mapsto (\log |z_1(\varphi(v), v)|, \log |z_2(\varphi(v), v)|)$.

1.3 Amibes en codimension supérieure

On peut également imaginer la notion d'amibe $\mathcal{A}_{f_1,...,f_k}$ attachée à un système $(f_1, ..., f_k)$, $1 \leq k \leq n$, de fonctions holomorphes (toujours dans $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$, où Ω désigne un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$) [3], telles que

$$V(f_1, ..., f_k) = \{z \in \mathrm{Log}^{-1}(\Omega)\,;\, f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0\}$$

soit un sous-ensemble analytique de codimension pure k de $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$.

Definition 1.2 *L'amibe $\mathcal{A}_{f_1,...,f_k}$ (ou plutôt $\mathcal{A}_{V(f_1,...,f_k)}$)* [4] *est par définition le sous-ensemble fermé de Ω défini par*

$$\mathcal{A}_{f_1,...,f_k} := \mathrm{Log}\Big(\{z \in \mathrm{Log}^{-1}(\Omega)\,;\, f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0\}\Big) = \mathrm{Log}\left(V(f_1, ..., f_k)\right).$$

Il n'est plus question ici de convexité des composantes du complémentaire ! Avoir en tête l'ossature métallique de la tour Eiffel est une bonne manière de se représenter une amibe correspondant à la codimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ (donc à deux fonctions f_1 et f_2 définissant une courbe dans un ouvert multicerclé $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$ de $\mathbb{T}^3$).

Cependant, le complémentaire de l'amibe $\mathcal{A}_{F_1,...,F_k}$ (où $F_1, ..., F_k$ sont des polynômes de Laurent définissant une suite quasi-régulière dans $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$ est dans ce cas $k-1$-convexe, au sens introduit par A. Henriques [6] : pour tout sous-espace affine Π de $\mathbb{R}^n$ de dimension k, le morphisme

$$\widetilde{H}_{k-1}(\Pi \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_{F_1,...,F_k}), \mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_{F_1,...,F_k}, \mathbb{Z}) \tag{1.2}$$

n'envoie pas de classes non-négatives [5] (c'est-à-dire ayant, pour tout point x appartenant à $\mathcal{A}_{F_1,...,F_k} \cap \Pi$, une image non négative dans $\widetilde{H}_{k-1}(\Pi \setminus \{x\}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$) sur la

3. On verra plus loin (voir la remarque 3.3 de la section 3) qu'il serait plus judicieux de parler d'amibe attachée à l'idéal $(f_1, ..., f_k)$ plutôt qu'à la variété des zéros de cet idéal.

4. Le cas global où $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $F_1, ..., F_k$ sont k polynômes de Laurent définissant une suite quasi-régulière dans $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$ sera aussi pour nous le cas global intéressant (ici $\mathcal{A}_{F_1,...,F_k}$) dans ce contexte d'amibes en codimension supérieure.

5. G. Mikhalkin dans [8] a su lever cette restriction en se contentant de définir la $(k-1)$-convexité (en un sens ici fort) de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_{F_1,...,F_k}$ comme le fait que tous les morphismes (1.2) soient injectifs pour tout sous-espace affine Π de dimension k (toute droite affine si $k = 1$).

classe nulle. Dans le cas $k = 1$, la 0-convexité de $\mathcal{A}_F^c$ équivaut à la convexité des composantes connexes du complémentaire de l'amibe $\mathcal{A}_F$.

1.4 Définition de la fonction de Ronkin en codimension 1

Si Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction holomorphe dans $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$, L.Ronkin a défini dans [16] la fonction suivante N_f (de Ω dans $\mathbb{R}$) comme la fonction

$$\begin{aligned} x \quad \longmapsto \quad & \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \log |f(\zeta_1, ..., \zeta_n)| \, \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d\zeta_n}{\zeta_n} \\ = \quad & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} \log |f(e^{x_1+i\theta_1}, ..., e^{x_n+i\theta_n})| \, d\theta_1 \dots d\theta_n \, . \end{aligned}$$

La fonction N_f est convexe car le logarithme du module de la fonction f est une fonction plurisousharmonique dans $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$. Dans le complémentaire $\Omega \setminus \mathcal{A}_f$, on voit immédiatement que la fonction N_f est régulière (de classe C^1) et que, pour tout $j = 1, ..., n$,

$$\frac{\partial N_f}{\partial x_j} = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \frac{\partial f}{\partial \zeta_j} \frac{\zeta_j}{f(\zeta)} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d\zeta_n}{\zeta_n} \, . \tag{1.3}$$

Comme on le constate immédiatement grâce au thórème de Rouché (expression pour le nombre des zéros-pôles comptés avec multiplicité ou ordre *via* la formule des résidus [6]), le gradient de N_f dans $\Omega \setminus \mathcal{A}_f$ prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}^n$ et est donc constant sur chacune des composantes connexes de $\Omega \setminus \mathcal{A}_f$; on notera $\nu_f(E)$ sa valeur dans la composante E de $\Omega \setminus \mathcal{A}_f$ (on appelle ce vecteur d'entiers la *multiplicité* de la composante E).

Remarque 1.1. La fonction N_f s'interprète en dimension 1 comme une fonction de comptage pour les zéros de f puisque l'on peut écrire, pourtout $r > 0$, si $a_1, a_2, ..., a_{N(r)}$ rangés dans l'ordre des modules croissants sont les zéros d'une fonction entière telle que $f(0) \neq 0$ dans le disque ouvert $D(0, r)$, la formule de Jensen :

$$\frac{1}{(2i\pi)} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta = N(r)x + \log |f(0)| - \sum_{k=1}^{N} \log |a_k|$$

(avec $x = \log r$). Notons que, si $f = P$ est un polynôme, la fonction $\zeta \mapsto \log |f(\zeta)|$ ainsi moyennisée sur le tore réel $\mathbb{S}^1$ est la solution de l'équation de Green

$$dd^c \log |P(\zeta)| = [Z(P)] \, , \; (dd^c = (i/\pi)\partial \circ \overline{\partial}) \, .$$

où $[Z(P)]$ est cycle géométrique (avec multiplicités) correspondant au diviseur $\mathrm{div}\,(P)$.

---

6. On examine d'abord le cas particulier où f est un polynôme de Laurent F, puis le cas celui d'une série de Laurent convergente, s'approchant donc uniformément sur tout compact de $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$ par une suite de polynômes de Laurent.

On remarque (voir la proposition 2.5 de [3] qu'il est aisé de transporter du cadre où f est un polynôme de Laurent et $\Omega = \mathbb{R}^n$ au cas plus général ici) que si E et E' sont deux composantes connexes distinctes de $\Omega \setminus \mathcal{A}_f$, alors $\nu_f(E) \neq \nu_f(E')$: pour montrer cela, on prend deux points $x \neq x'$ dans $\Omega \setminus \mathcal{A}_f$, à coordonnées rationnelles (pris respectivement dans E et E') et on montre que $\langle \nu_f(E), v\rangle \neq \langle \nu_f(E'), v\rangle$ si $v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ est le vecteur directeur de $x' - x$: il suffit pour cela d'approcher f uniformément par une suite de polynômes de Laurent au voisinage de $\mathrm{Log}^{-1}([x, x'])$ et d'interpréter chacun des deux nombres entiers $\langle \nu_f(E), v\rangle$ et $\langle \nu_f(E'), v\rangle$ comme le nombre de zéros-pôles (ordres et multiplicités prises en compte) d'un polynôme de Laurent $P(X^{\pm 1})$ dans deux disques $D(0, r_x)$ et $D(0, r_{x'})$ du plan complexe (pas de zéros sur la frontière) tels que la couronne $D(0, r_{x'}) \setminus D(0, r_x)$ contienne au moins un zéro de $P(X^{\pm 1})$.

Sur une telle composante connexe E de $\Omega \setminus \mathcal{A}_f$, la fonction

$$x \mapsto N_f(x) - \langle \nu_f(E), x\rangle$$

est donc égale à une constante $c(E)$. Si l'on note

$$A = \{a \in \mathbb{Z}^n\,;\, a = \nu_f(E_a),\ \text{où } E_a \text{ est une composante connexe de } \Omega \setminus \mathcal{A}_f\}\,,$$

on peut définir, comme dans [11], la fonction convexe

$$S_f \ : x \in \Omega \longmapsto \sup_{a \in A} (c(E_a) + \langle a, x\rangle)\,, \tag{1.4}$$

où E_a désigne la composante connexe de $\Omega \setminus \mathcal{A}_f$ de multiplicité a.

Comme chaque fonction affine $x \mapsto c(E_a) + \langle a, x\rangle$ coïncide avec N_f sur un sous-ensemble ouvert (à savoir E_a), la minoration de N_f par cette fonction affine a lieu automatiquement dans tout l'ouvert convexe Ω. On a donc

$$S_f(x) \leq N_f(x) \qquad \forall\, x \in \Omega$$

(avec égalité dans le complémentaire de l'amibe).

1.5 Le « squelette » de l'amibe et le point de vue « tropical »

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, f une fonction holomorphe dans l'ouvert polycerclé $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$ de $\mathbb{T}^n$ et $\mathcal{A}_f$ l'amibe de sa variété de zéros. On introduit la fonction de Ronkin N_f et la fonction convexe S_f définie en (1.4).

L'ensemble des points où la fonction convexe S_f n'est pas régulière est un sous-ensemble fermé de l'amibe $\mathcal{A}_f$ que l'on appelera le *squelette* de l'amibe.

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$ et où $f = F$ est un polynôme de Laurent, l'ensemble A est un ensemble fini dont l'enveloppe convexe est égale au polyèdre de Newton de f puisque chaque sommet $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ de ce polyèdre est en correspondance *via* la correspondance $E \leftrightarrow \nu_f(E)$ avec une composante connexe (d'ailleurs non bornée) du complémentaire de $\mathcal{A}_F$, à savoir l'image par l'application Log du domaine de convergence de la série de Laurent

$$\frac{1}{F(z)} = \rho_\xi^{-1} z^{-\xi} \Big(1 + \sum_{\gamma \neq \xi} \frac{\rho_\gamma}{\rho_\xi} \, z^{\gamma - \xi} \Big)^{-1} \tag{1.5}$$

si

$$F(X) = \sum \rho_\gamma X^\gamma \, .$$

Si les opérations d'addition + et de multiplication × sont respectivement remplacées par la prise de max (notée ⊕) et l'addition (notée ⊗), ce qui correspond à l'addition et multiplication dites « tropicales » (opérations induisant une géométrie algébrique réelle particulière, dite tropicale, qui les accompagne [7]), le polynôme

$$\bigoplus_{a \in A} c(E_a) \otimes x_1^{a_1} \otimes \cdots \otimes x_n^{a_n}$$

se lit

$$\max_{a \in A} (c(E_a) + \langle a, x \rangle)$$

et l'on retrouve l'expression de S_f.

Pour décrire proprement le squelette $\mathcal{S}_f$ de l'amibe $\mathcal{A}_f$, il convient d'introduire deux subdivisions convexes duales l'une de l'autre, l'une de l'enveloppe convexe de l'ensemble A dans $\mathbb{R}^n$ (qui, si A est fini, est un polyèdre convexe, égal d'ailleurs au polyèdre de Newton $\Delta(F)$ de F lorsque $f = F$ est un polynôme de Laurent, l'autre de l'ouvert convexe Ω. Ce seront l'ensemble des cellules de cette subdivision convexe de Ω de dimension strictement inférieure à n qui constitueront de fait le squelette $\mathcal{S}_f$ de l'amibe $\mathcal{A}_f$.

La notion de *subdivision convexe* d'un sous-ensemble convexe C de $\mathbb{R}^n$ étend (les convexes n'étant plus ici nécessairement des cônes fermés) celle d'« éventail », classique en géométrie torique (voir par exemple [4]) : une subdivision convexe de K est une collection (finie ou non) de sous-ensembles convexes fermés de K (on les appelle « cellules ») recouvrant K, stable par intersection finie et telle que si σ et τ font partie de la collection avec $\tau \subset \sigma$, alors τ est une face [8] de σ. Si chaque cellule σ est un polytope, alors la subdivision est dite polytopale.

7. Initiée au départ sous l'impulsion d'informaticiens, elle doit ce qualificatif à ses origines brésiliennes.

8. On appelle face d'un convexe σ l'intersection de ce convexe avec un hyperplan d'appui.

Si K est un convexe de $\mathbb{R}^n$, K^* un convexe de $(\mathbb{R}^n)^*$, on dira qu'une subdivision convexe $\mathcal{C}$ de K et une subdivision convexe $\mathcal{C}^*$ de K^* sont en dualité si et seulement si il existe une bijection $\sigma \mapsto \sigma^*$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}^*$ qui d'une part renverse l'inclusion (τ face de $\sigma \Longrightarrow \sigma^*$ face de τ^*), d'autre part est telle que si τ est une face de σ (éléments de $\mathcal{C}$), alors le cône fermé de $\mathbb{R}^n$

$$\{t(x-y)\,;\, x \in \sigma\,,\ y \in \tau\,,\ t \geq 0\}$$

est dual au cône fermé de $(\mathbb{R}^n)^*$

$$\{t(x-y)\,;\, x \in \tau^*\,,\ y \in \sigma^*\,,\ t \geq 0\}\,.$$

Nous nous limiterons ici au cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$ (ce sera en fait pour nous le convexe K) et où f est donc une fonction holomorphe dans $\mathbb{T}^n$ (pas nécessairement cependant un polynôme de Laurent). L'ensemble K^* sera pour nous l'enveloppe convexe de A dans $\mathbb{R}^n$. À la fonction S_f convexe dans $\mathbb{R}^n$, on associe sa transformée de Legendre

$$S_f^* \ : \xi \in K^* \longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\langle x, \xi\rangle - S_f(x)\right) \in]-\infty, +\infty[$$

et la fonction positive

$$(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times K^* \longmapsto S(x) + S^*(\xi) - \langle \xi, x\rangle\,.$$

Cette fonction permet de définir deux subdivisions convexes (l'une de $\mathbb{R}^n$, l'autre de K^*, en dualité. La première, $\mathcal{C}$ est la subdivision convexe de $\mathbb{R}^n$ dont les cellules sont les

$$\sigma_\xi \ := \{x \in \mathbb{R}^n\,; P(x,\xi) = 0\}\,,\ \xi \in K^*\,.$$

La seconde, $\mathcal{C}^*$, est la subdivision convexe de K^* dont les cellules sont les

$$\sigma_x^* \ := \{\xi \in K^*\,;\, P(x,\xi) = 0\}\,,\ x \in \mathbb{R}^n\,.$$

La dualité entre ces deux subdivisions convexes est réalisée par la correspondance qui à σ dans $\mathcal{C}$ associe $\sigma^* := \bigcap_{x\in\sigma} \sigma_x^*$ (réciproquement qui à $\sigma^* \in \mathcal{C}^*$ associe $\sigma := \bigcap_{\xi \in \sigma^*} \sigma_\xi$).

Si F est un polynôme de Laurent, $K^* = \Delta(F)$ et les deux subdivisions convexes en dualité $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^*$ ainsi construites sont des subdivisions polytopales. Voici dans ce cas particulier un moyen commode de les visualiser en exploitant la construction d'une « toîture » au dessus de K^*. On visualise la décomposition polytopale $\mathcal{C}^*$ de $K^* = \Delta(F)$ en projetant sur l'espace des n-premières coordonnées l'enveloppe convexe de

$$\mathbf{P} := \{(a,t) \in A \times \mathbb{R}\,;\, t \leq c(E_a)\}$$

et en considérant la subdivision polytopale de $\Delta(F)$ marquée par les sommets des polyèdres obtenus en projetant les faces bornées du polyèdre non borné $\mathbf{P}$. On associe à cette décomposition polytopale $\mathcal{C}^*$ de $\Delta(F)$ une décomposition polytopale « duale » $\mathcal{C}$ de Ω, où la cellule « duale » d'une cellule σ^* de $\mathcal{C}^*$ est

$$\{x \in \Omega\,;\, S(x) = c(E_a) + \langle a\,,\, x\rangle \text{ pour tout sommet de } \sigma^*\}\,.$$

Le squelette $\mathcal{S}_F$ de l'amibe $\mathcal{A}_F$ est par définition l'ensemble de toutes les cellules de dimension strictement inférieure à n de cette subdivision polytopale de $\mathbb{R}^n$.

Le point important à souligner concernant la relation entre amibe et squelette dans le cas particulier où $f = F$ est un polynôme de Laurent est, outre le fait que $\mathcal{S}_F \subset \mathcal{A}_F$ (puisque S_F est régulière dans le complémentaire de $\mathcal{A}_F$), que le squelette $\mathcal{S}_F$ se présente comme un « retract » de l'amibe. Pour se convaincre de cela, on prend un point particulier x_a dans chacune des composantes E_a, $a \in A$, du complémentaire de $\mathcal{A}_F$ et on considère, pour chaque $a \in A$, le bouquet de segments de $\mathbb{R}^n$ d'origine x_a et d'extrémité un point de la frontière de l'ensemble

$$F_a \;:= \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, S_F(x) = c(E_a) + \langle x, a\rangle\}\,.$$

L'union de tous ces bouquets de segments, lorsque $a \in A$ contient l'amibe $\mathcal{A}_F$; de plus une demi-droite issue de x_a et ne rencontrant pas la frontière de F_a ne rencontre pas non plus l'amibe $\mathcal{A}_F$ (on laisse ici la preuve un peu technique basée sur le principe du maximum et non sans analogie avec la preuve montrant l'injectivité de l'application $E \mapsto \nu(E)$; on trouvera les détails dans la preuve du point (*iii*) du théorème 1 de [11]).

2 Convexité et volume

2.1 Le cadre réel

Si N est une fonction convexe régulière dans un ouvert convexe Ω de $\mathbb{R}^n$, on peut lui associer sa *mesure de Monge-Ampère réelle* définie comme la mesure positive à densité

$$x \longmapsto \text{Hessien}\,(N)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle dans Ω. Cette mesure de Monge-Ampère peut aussi être définie sans hypothèse de régularité sur la fonction convexe N. On définit pour cela l'application ensembliste *gradient image* suivant la règle :

$$\xi \in \text{gradient image}(x_0) \Longleftrightarrow N - \langle \xi, \cdot\rangle \text{ atteint son minimum en } x_0\,.$$

Il est assez facile de voir (c'est un lemme d'Aleksandrov, dont l'énoncé et la preuve sont donnés dans [15]) que l'ensemble des $\xi \in \mathbb{R}^n$ qui sont gradient images de plus d'un point $x_0 \in \Omega$ est un sous-ensemble Lebesgue-négligeable de $\mathbb{R}^n$ (en un tel point, la transformée de Legendre

$$N^* \ : \xi \longmapsto \sup_{x \in \Omega}(\langle x, \xi \rangle - N(x))$$

ne serait pas différentiable, alors qu'elle doit l'être *a priori* en presque tout point). Dans le cas où S est régulière, la formule de changement de variable dans l'intégration Lebesgue (le changement de variable est $x \mapsto \nabla(x)$) nous assure que, si B est un borélien de Ω, la mesure de Monge-Ampère réelle de B est exactement égale à la mesure (dans le dual $(\mathbb{R}^n)^*$) de l'ensemble des ξ tels que $x \mapsto N(x) - \langle \xi, x \rangle$ atteigne son minimum dans B. C'est cette définition géométrique que l'on peut introduire (comme dans l'article de Rauch et Taylor [15]) pour définir la mesure de Monge-Ampère réelle dans le cas où N n'est plus régulière.

Reprenons la fonction de Ronkin $N = N_f$ associée à une fonction $f \in \mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$, où Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Du fait que la fonction N_f est affine dans chaque composante E du complémentaire de l'amibe $\mathcal{A}_f$, la mesure de Monge-Ampère réelle de N_f, notée μ_{N_f}, ou, pour faire plus court, μ_f, charge uniquement l'amibe $\mathcal{A}_f$.

Proposition 2 *Si F est un polynôme de Laurent, la mesure de Monge-Ampère totale de l'amibe $\mathcal{A}_F$ est exactement égale au volume n-dimensionnel du polyèdre de Newton de F.*

Esquisse de preuve [11]. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $f = F$ est un polynôme de Laurent, l'ensemble W des $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$ tels que $x \mapsto N_F(x) - \langle \xi, x \rangle$ atteint son minimum dans $\mathbb{R}^n$ est inclus dans le sous ensemble $\widetilde{W}$ des $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$ tels que $x \mapsto N_F(x) - \langle \xi, x \rangle$ est bornée inférieurement tandis que l'intérieur de $\widetilde{W}$ est lui inclus dans W. En fait, on voit que l'enveloppe convexe du support de F est contenue dans $\widetilde{W}$ car

$$x \mapsto N_F(x) - \langle \xi, x \rangle \geq c_\xi > -\infty$$

pour tout sommet ξ du polyèdre de Newton de F ; la fonction

$$x \mapsto N_F(x) - \langle \xi, x \rangle$$

est donc bornée inférieurement pour tout ξ dans le polyèdre de Newton $\Delta(F)$ de F. Si $\xi \notin \Delta(F)$, on peut trouver un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\langle \xi, v \rangle > \sup_{\xi' \in \Delta_F} \langle \xi', v \rangle = \langle \alpha, v \rangle \,,$$

où α est un sommet particulier de $\Delta(F)$, donc correspondant à une composante connexe E_α du complémentaire de l'amibe $\mathcal{A}_F$. Si $x \in E_\alpha$, c'est aussi le cas de $x+tv$ pour tout $t > 0$ tandis que

$$N_F(x+tv) - \langle \xi, x+tv\rangle = c(E_a) - \langle \xi - \alpha, x+tv\rangle \to -\infty$$

lorsque t tend vers $-\infty$. En conclusion $\Delta(F) = \widetilde{W}$ et donc

$$\mu_F(\mathbb{R}^n) = \mu_F(\mathcal{A}_F) = \mathrm{vol}_n(\Delta(F))\,.$$

Remarque 2.1. Si f est une fonction holomorphe de deux variables dans un ouvert bicerclé $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$, Passare et Rullgård ont montré (théorème 7 de [11]) que la mesure de Monge-Ampère de N_f est minorée par la mesure $\pi^{-2}dx_1dx_2$, ce qui implique donc, si $f = F$ est un polynôme de Laurent du fait de la proposition 2, que le volume de l'amibe de F (donc d'une courbe algébrique de $\mathbb{T}^2$) est majoré par $\pi^2\mathrm{vol}\,(\Delta(F))$. En dimension supérieure, la question d'une telle majoration ne se pose plus car le volume de l'amibe d'un polynôme de Laurent F est en général infini dans ce cas. Dans [9], G. Mikhalkin et H. Rullgård ont caractérisé les courbes algébriques de $\mathbb{T}^2$ pour lesquelles le volume de l'amibe coïcide avec π^2 fois le volume du polyèdre de Newton du polynôme de Laurent dont la courbe est l'ensemble des zéros : ce sont les courbes de Harnack.

2.2 Le cadre complexe

On peut maintenant passer du cadre convexe réel au cadre plurisousharmonique (cette fois complexe) en transportant une fonction convexe réelle N définie dans un ouvert convexe Ω de $\mathbb{R}^n$ en la fonction

$$N \circ \mathrm{Log}\ : z \longmapsto N(\mathrm{Log}\, z)$$

définie dans l'ouvert polycerclé $U = \mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$; la propriété de convexité se transporte en une propriété de plurisousharmonicité pour la fonction $N \circ \mathrm{Log}$ dans l'ouvert U.

L'opérateur différentiel « adapté » au cadre de la plurisusharmonicité dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$ (comme c'est le cas ici pour l'ouvert U) est l'opérateur dd^c (dit aussi de Lelong-Poincaré [9])

$$dd^c = -\frac{i}{2\pi}(\partial + \overline{\partial}) \circ (\partial - \overline{\partial}) = \frac{i}{\pi}\partial \circ \overline{\partial}\,.$$

9. Attention ! Il y a deux écoles, suivant que l'on choisisse le facteur $-i/2\pi$ ou le facteur $-i/4\pi$; dans le premier cas, on a, si f désigne une fonction holomorphe dans U, $dd^c \log|f| = [Z(f)]$, où $[Z(f)]$ désigne le courant d'intégration (les multiplicités étant prises en compte) sur la variété analytique des zéros de f dans U, tandis que dans le second cas (souvent choisi dans les travaux en théorie d'Arakelov, par exemple dans les travaux de J.F. Bost, H. Gillet et C. Soulé), cette formule, dite formule de Lelong-Poincaré, doit se lire $dd^c \log|f|^2 = [Z(f)]$. On adoptera ici le premier point de vue.

Si N est une fonction convexe C^∞ dans Ω, on vérifie immédiatement que

$$(dd^c[N\circ \mathrm{Log}^{-1}])^n = n!\,\det\Big|\Big[\frac{\partial^2[N\circ \mathrm{Log}^{-1}]}{\partial z_j\partial\overline{z_k}}\Big]_{1\leq j,k\leq n}\Big| \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\overline{z}_j\wedge dz_j}{2i}$$

$$= \frac{n!}{(2\pi)^n}\,\frac{1}{|z_1|^2\cdots|z_n|^2}\Big(\Big|\Big[\frac{\partial^2 N}{\partial x_j\partial x_k}\Big]_{1\leq j,k\leq n}\Big|\Big)_{x=\mathrm{Log}\,z} \bigwedge_{j=1}^n \frac{d\overline{z}_j\wedge dz_j}{2i}$$

(on trouvera ce calcul ainsi que ceux qui suivent par exemple dans [14]). Par changement de variables dans les intégrales de Lebesgue et puisque toutes les fonctions en jeu sont ici positives, on a, si E est un borélien de Ω et si μ_N désigne la mesure de Monge-Ampère associée à la fonction convexe N,

$$n!\,\mu_N(E) = \int_{\mathrm{Log}^{-1}(E)} (dd^c[N\circ\mathrm{Log}])^n\,.$$

Par simple moyennisation sur le tore réel $(\mathbb{S}^1)^n$, cette formule reste valable si on remplace $N\circ\mathrm{Log}$ par une fonction plurisousharmonique régulière quelconque Φ dans $\mathrm{Log}^{-1}(E)$ et N^Φ par la fonction convexe régulière

$$x\in\mathrm{Log}^{-1}(E)\longmapsto \frac{1}{(2i\pi)^n}\int_{\mathrm{Log}^{-1}(x)}\Phi(\zeta)\bigwedge_{j=1}^n\frac{d\zeta_j}{\zeta_j}\,.$$

On obtient ainsi, pour tout borélien E de Ω, la formule

$$n!\,\mu_{N^\Phi}(E) = \int_{[(\mathbb{S}^1)^n]^n}\Big[\int_{\zeta\in\mathrm{Log}^{-1}(E)}\bigwedge_{j=1}^n (dd^c\Phi(t_{j1}\zeta_1,...,t_{jn}\zeta_n)\Big]d\sigma(t_1,....,t_n)\,,$$

où

$$d\sigma(t_1,...,t_n) = \bigotimes_{j=1}^n d\sigma_{(\mathbb{S}^1)^n}(t_j)\,,$$

$d\sigma_{(\mathbb{S}^1)^n}$ désignant la mesure $d\theta_1\cdots d\theta_n/(2\pi)^n$. Suivant un procédé bien classique, on peut « polariser » cette formule : si $\Phi_1,...,\Phi_n$ sont n fonctions plurisousharmoniques régulières dans $\mathrm{Log}^{-1}(E)$ et si l'on désigne par $\mu_{N^{\Phi_1},...,N^{\Phi_n}}$ la version polarisée de $N^\Phi\mapsto\mu_{N^\Phi}$, c'est-à-dire

$$\mu_{N_1^{\Phi_1},...,N_n^{\Phi_n}} := \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^n\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n}(-1)^{n-k}\mu_{N^{\Phi_{j_1}}+\cdots+N^{\Phi_{j_k}}}\,,$$

on a, pour tout borélien E de Ω,

$$n!\,\mu_{N^{\Phi_1},...,N^{\Phi_n}}(E)$$
$$= \int_{[(\mathbb{S}^1)^n]^n}\Big[\int_{\zeta\in\mathrm{Log}^{-1}(E)}\bigwedge_{j=1}^n (dd^c\Phi_j)(t_{j1}\zeta_1,...,t_{jn}\zeta_n)\Big]d\sigma(t_1,....,t_n)\,.$$

Si maintenant $f_1, ..., f_n$ désignent n fonctions holomorphes dans l'ouvert polycerclé $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$, on peut introduire, si $\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ sont n nombres strictement positifs, les fonctions plurisousharmoniques $\Phi_{j,\epsilon} := (1/2)\log(|f_j|^2+\epsilon_j)$, auxquelles correspondent des fonctions convexes $N^{\Phi_{j,\epsilon}}$. Lorsque $\epsilon^{(k)} := (\epsilon_{k1}, ..., \epsilon_{kn})$ tend vers 0, il y a convergence (au sens par exemple des distributions) de chaque suite $(N^{\Phi_{j,\epsilon_k}})_k$ vers N_{f_k}. Les résultats liés à la positivité de l'opérateur de Monge-Ampère réel impliquent alors la convergence au sens des mesures (ou des distributions, c'est la même chose)

$$\mu_{N^{\Phi_{1,\epsilon_k}}, ..., N^{\Phi_{n,\epsilon_k}}} \longrightarrow \mu_{N_{f_1}, ..., N_{f_n}} .$$

Or, d'après les propriétés de positivité de l'opérateur de Monge-Ampère complexe et la formule de Lelong-Poincaré, on a, pour tout $(t_1, ..., t_n) \in ((\mathbb{S}^1)^n)^n$,

$$\bigwedge_{j=1}^{n} dd^c\Phi_{j,\epsilon_k} \longrightarrow [\{\alpha \in \mathrm{Log}^{-1}(E)\,;\; f_j(t_{j1}\alpha_1, ..., t_{jn}\alpha_n) = 0\,,\; j = 1, ..., n\}_{\text{points isolés}}]\,,$$

la convergence ayant lieu au sens des courants, le crochet dans le membre de gauche ci-dessus désignant la prise de courant d'intégration (les multiplicités étant prises en compte). On a alors la

Proposition 3 *Si E est un compact de Ω et $f_1, ..., f_n$ sont n fonctions holomorphes dans l'ouvert polycerclé $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$, la mesure de Monge-Ampère mixte $\mu_{N_{f_1}, ..., N_{f_n}}(E)$ (pour faire court $\mu_{f_1, ..., f_n}(E)$) du compact E est égal au nombre moyen de zéros isolés de*

$$(z_1, ..., z_n) \longmapsto \Big(f_1(t_{11}z_1, \ldots, t_{1n}z_n), \cdots, f_n(t_{n1}z_1, ..., t_{nn}z_n)\Big)$$

dans le compact $\mathrm{Log}^{-1}(E)$ lorsque $(t_1, ..., t_n)$ parcourt $((\mathbb{S}^1)^n)^n$, divisé par $n!$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ et si $f_1, ..., f_n$ sont des polynômes de Laurent $F_1, ..., F_n$, ce nombre est donc égal d'après la version polarisée de la proposition 2 au volume mixte de Minkowski des polyèdres de Newton de $F_1, ..., F_n$, divisé par $n!$.

Remarque. Le second volet de cette proposition nous donne une nouvelle preuve du théorème de D. Bernstein [1] sur le nombre de zéros communs dans $\mathbb{T}^n$ d'un système de n polynômes de Laurent génériques à polyèdres de Newton prescrits.

3 Le « squelette » et ses approximations

Dans cette section, nous nous placerons dans le cadre algébrique où $\Omega = \mathbb{R}^n$ et où $f = F$ est un polynôme de Laurent $F(X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1})$ en n variables de polyèdre de Newton Δ dont on notera l'amibe $\mathcal{A}_F$.

Comme on l'a vu dans la section 1, à chaque composante connexe E de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_F$, on sait associer un vecteur $\nu(E) \in \mathbb{Z}^n$ tel que, dans cette composante, la fonction de Ronkin N_F se présente sous la forme

$$N_F(x) = c(E) + \langle x, \nu_F(E) \rangle \,. \tag{3.6}$$

Ce que l'on peut ajouter ici est que du fait de sa définition par les formules

$$\nu_{F,j}(E) := \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\mathrm{Log}^{-1}(x)} \frac{\partial F}{\partial \zeta_j} \frac{\zeta_j}{F(\zeta)} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d\zeta_n}{\zeta_n}\,,\ j = 1, ..., n\,,\ x \in E\,,$$

le vecteur $\nu_F(E)$ est un élément de $\Delta(F) \cap \mathbb{Z}^n$. Parmi les éléments de $\Delta(F) \cap \mathbb{Z}^n$ figurant comme candidats à être multiplicité attachée à une composante connexe du complémentaire de l'amibe $\mathcal{A}_F$ figurent d'office tous les sommets du polyèdre de Newton ; un tel sommet ξ est, on l'a vu, la multiplicité de la composante correspondant au développant de Laurent de $1/F$ obtenu en privilégiant, comme dans (1.5), le monôme X^ξ (que l'on met en facteur dans l'expression de F). Lorsque le complémentaire de l'amibe de F ne présente comme seules composantes connexes que celles correspondant aux sommets du polyèdre de Newton $\Delta(F)$, on dit que l'amibe est *solide*. C'est par exemple le cas (voir [12]) pour l'amibe du discriminant $\delta(X_1, ..., X_n)$ de l'équation algébrique (en Y)

$$Y^{n+1} + X_n Y^n + X_{n-1} Y^{n-1} + \cdots + X_1 Y - 1 = 0\,.$$

Plus généralement, ceci reste vrai pour l'amibe de toute hypersurface algébrique se présentant comme le lieu singulier d'une série de Laurent hypergéométrique en n variables complexes (voir aussi [12]). Mais comme l'a montré H. Rullgård dans [17], il existe des situations extrêmes dans l'autre direction : plus précisément, étant donné un polyèdre convexe Δ, il est possible de construire un polynôme de Laurent F de polyèdre de Newton prescrit Δ tel que l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{A}_F$ soit en bijection *via* l'application $E \mapsto \nu_F(E)$ avec l'ensemble $\Delta \cap \mathbb{Z}^n$. Une conjecture de Passare et Rullgård stipule que $\mathcal{A}_F$ est solide dès que le polynôme F se présente comme une somme

$$F(X) = \sum_{\xi \text{ sommet de } \Delta} \rho_\xi x^\xi\,,\ \rho_\xi \neq 0\,,$$

et une solution à cette conjecture (utilisant comme ingrédient majeur la notion de co-amibe) a été récemment proposée par M. Nisse [10] (mais le manuscrit présente encore des points nécessitant clarification).

Étant donné F de polyèdre de Newton Δ comme ci-dessus et A le sous-ensemble de $\Delta \cap \mathbb{Z}^n$ (contenant nécessairement, on vient de le voir, tous les sommets de Δ), la fonction convexe S_F régissant la définition du squelette est la fonction définie dans $\mathbb{R}^n$ par

$$S_F(x) = \max_{a \in A}(c(E_a) + \langle a, x\rangle) \leq N_F(x)\,. \tag{3.7}$$

Le squelette de l'amibe est défini comme l'ensemble des points critiques de S_F, c'est-à-dire en fait des points $x \in \mathbb{R}^n$ où le maximum dans (3.7) est atteint par deux formes affines $c(E_{a_1}) + \langle a_1, x\rangle$ et $c(E_{a_2}) + \langle a_2, x\rangle$ distinctes. La pierre d'achoppement dans la définition de S_F (donc de l'hypersurface tropicale attachée ainsi au polynôme de Laurent F) est le caractère non explicite de $c(E_a)$.

La question concernant le calcul de $c(E_a)$ lorsque E_a est une composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_F$ nous ramène à la raison première motivant l'introduction des amibes, à savoir l'ambigüité que soulève le problème du développement de la fraction rationnelle $1/F$ en série de Laurent. En effet, $c(E_a)$ se calcule aisément lorsque $a = \xi$ est un sommet du polyèdre de Newton Δ puisque F se développe dans $\mathrm{Log}^{-1}(E_a)$ en

$$F(z) = m_\xi(z) \times \Big(1 + \sum_\gamma \rho_\gamma \frac{z^\gamma}{m_\xi(z)}\Big)\,,$$

où m_ξ désigne le monôme « dominant » d'exposant précisément le sommet ξ. On peut alors développer sous l'intégrale (1.3) en série de puissances des ζ_j et $\overline{\zeta}_j$

$$\log|F(\zeta)| = \log|m_\xi(\zeta)| + \frac{1}{2}\log\Big|1 + \sum_\gamma \rho_\gamma \frac{\zeta^\gamma}{m_\xi(\zeta)}\Big|^2$$

en utilisant le développement en série de $\log(1+t)$ dans le disque unité du plan complexe. Le calcul montre alors immédiatement que dans ce cas $c(E_\xi) = \log|\rho_\xi|$, où ρ_ξ désigne le coefficient du monôme m_ξ. Évidemment, un calcul aussi élémentaire n'est plus envisageable lorsque E_a n'est pas une des composantes E_ξ et il faut alors imaginer une autre approche.

Dans [13], K. Purbhoo introduit l'idée très simple consistant, pour calculer l'intégrale figurant dans (1.3) lorsque $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_F$, de l'approcher, x étant fixé dans une composante E_a, z étant un point de $\mathrm{Log}^{-1}(x)$, par les sommes de Riemann

$$\begin{aligned}\Sigma_p(z) &= \frac{1}{p^n}\sum_{k_1=0}^{p-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{p-1}\log|f(e^{2i\pi k_1/p}z_1,\ldots,e^{2i\pi k_n/p}z_n)| \\ &= \frac{1}{p^n}\log\Big|\prod_{k_1=0}^{p-1}\cdots\prod_{k_n=0}^{p-1} f(e^{2i\pi k_1/p}z_1,\ldots,e^{2i\pi k_n/p}z_n)\Big|\,.\end{aligned}$$

Cette somme dépend du point z choisi dans $\mathrm{Log}^{-1}(x)$, mais la limite de $\Sigma_p(z)$ lorsque p tend vers l'infini n'en dépend plus et donne $N_F(x) = N_F(\mathrm{Log}\, z)$. L'expression de cette ≪ somme de Riemann ≫ $\Sigma_p(z)$ fait donc apparaître un nouveau polynôme de Laurent, de polyèdre de Newton la somme de Minkowski $p\Delta := \Delta + \cdots + \Delta$ (p^n fois) si $\Delta := \Delta(F)$, à savoir le polynôme

$$\widetilde{F}_p(X) = \prod_{k_1=0}^{p-1} \cdots \prod_{k_n=0}^{p-1} f(e^{2i\pi k_1/p} X_1, ..., e^{2i\pi k_n/p} X_n)\,,$$

dont on remarque immédiatement qu'il a la même amibe que F, ce indépendamment de p. On note aussi que ce polynôme de Laurent ne contient que des monômes $\rho z^{p\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, puisqu'il est invariant sous l'action du groupe $(C_p)^n$, C_p désignant le groupe cyclique des racines p-èmes de l'unité, *via* l'action consistant à faire le changement de variables $(X_1, ..., X_n) \longleftrightarrow (u_1 X_1, ..., u_p X_p)$. Si $d(\Delta)$ est une borne supérieure pour

$$p \mapsto \frac{\#\{p\Delta \cap \mathbb{Z}^p\}}{p^n}\,,$$

on trouve que le polynôme $\widetilde{F}_p$ a au plus dp^{n^2-n} monômes (puisqu'il en a au plus le nombre de points entiers dans $p^n\Delta/p = p^{n-1}\Delta$). Il convient de plus d'insister sur sa lacunarité : si, pour chaque $i = 1, ..., n$, $\mathrm{diam}_i(\Delta) := \max_{\xi\in\Delta} \xi_i - \min_{\xi\in\Delta} \xi_i$, on a bien sûr $\mathrm{diam}_i(\Delta(\widetilde{F}_p)) = p^n\, \mathrm{diam}_i(\Delta)$; si l'on note $\mathrm{diam} = \max \mathrm{diam}_i$, on a donc $\mathrm{diam}(\Delta(\widetilde{F}_p)) = p^n \mathrm{diam}\,(\Delta)$.

Le résultat majeur de K. Purbhoo (théorème 1, volet 2 dans [13]) rejoignant la configuration se présentant dans le cas où a était un sommet de Δ est le suivant :

Theorem 3.1 *Si x est un point dans la composante E_a du complémentaire de l'amibe $\mathcal{A}_F$ et à une distance $\epsilon > 0$ de cette amibe, on peut écrire, pour tout p tel que*

$$p\epsilon \geq (n^2 - 1) \log p + \log \left[\frac{16}{3d(\Delta)\,\mathrm{diam}\,(\Delta)}\right],$$

pour tout $\zeta \in \mathrm{Log}^{-1}(x)$,

$$\widetilde{F}_p(\zeta) = \rho_{p,p^n a}\, \zeta^{p^n a} + \sum_{\gamma \neq p^n a} \rho_{p,\gamma} \zeta^{\gamma}\,, \tag{3.8}$$

avec

$$|\rho_{p,\gamma}\zeta^{\gamma}| < \frac{1}{d(\Delta) p^{n^2-n}}\, |\rho_{p,a}\zeta^{p^n a}|\,,$$

autrement dit, l'expression monomiale $\rho_{p,p^n a}\zeta^{p^n a}$ joue un rôle dominant dans l'expression de $\widetilde{F}_p(\zeta)$.

Remarque 3.1. Pour tenter de comprendre le pourquoi d'un tel résultat, il faut revenir au cas $n = 1$, avec le cas particulier d'un polynôme unitaire de degré ayant d racines complexes simples telles que $|\alpha_1| > |\alpha_2| > \cdots > |\alpha_d| > 0$. On a, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_p(X) &= \pm \prod_{j=1}^{d} (X^p - \alpha_j^p) \\ &= \pm(X^{pd} - (\alpha_1^p + \dots))X^{p(d-1)} + \cdots + (-1)^{d-1}((\alpha_1 \cdots \alpha_{d-1})^p + \cdots)X^p + (-1)^d (\alpha_1 \cdots \alpha_d)^p) \end{aligned}$$

(on a mit en exergue les termes dominants) et manifestement, si $x \in]\log|\alpha_{k+1}|, \log|\alpha_k|[$ ($1 \le k \le d$, avec par convention $\alpha_{d+1} = 0$) c'est le monôme $(\alpha_1 \cdots \alpha_k \zeta^{d-k})^p$ qui « domine » tous les autres lorsque p est grand dans l'expression de $\widetilde{F}_p(\zeta)$ lorsque $\log|\zeta| = x$.

Remarque 3.2. Il convient de souligner ici l'importance de travailler avec $\widetilde{F}_p$ et non F^p ; si par exemple F est un polynôme de Laurent de polyèdre de Newton Δ ayant l'origine comme point intérieur et si F présente dans son développement un terme constant ρ_0, il n'est nullement évident de vérifier qu'il existe bien une infinité d'entiers $p \in \mathbb{N}$ tels que le coefficient du terme constant $\rho_{p,0}$ de F^p soit non nul. Il s'agit là d'un cas particulier d'une conjecture d'Olivier Matthieu [7], cas particulier pour lequel une preuve impliquant un arsenal lourd (impliquant des idées relatives au calcul résiduel et au comportement asymptotique des intégrales sur les fibres) a été proposée par J.J. Duistermaat et W. Van der Kallen dans [2]. Dans le cas où l'origine est candidate à être multiplicité d'une composante du complémentaire de l'amibe $\mathcal{A}_F$, ce qui est toujours le cas si $n = 1$, évidemment le polynôme $\widetilde{F}_p$ présente un terme constant pour tout p assez grand, cela résulte du théorème 3.1.

Admettons ici ce résultat de K. Purbhoo (en supposant que les explications de la remarque 3.1 dans le cas $n = 1$ auquel d'ailleurs la preuve se ramène [10] aient été assez convaincantes) et examinons comment on peut en déduire une suite de « squelettes approchés » pour le squelette de l'amibe $\mathcal{A}_F$, ce de manière à contourner l'écueil que représente la non connaissance des constantes $c(E_a)$, E_a parcourant la liste des composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_F$ dans la définition (3.7) de la fonction S_F. La version approchée que l'on peut proposer pour S_F est la fonction convexe

$$x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \widetilde{S}_{F,p} := \max_a (\log|\rho_{p,p^n a}| + p^n \langle a, x \rangle)\,,$$

où les $\rho_{p,p^n a}$ ont été définis par le développement de $\widetilde{F}_p$ (spécifique à $\mathrm{Log}^{-1}(E_a)$) et a parcourt la liste des points de $\Delta \cap \mathbb{Z}^n$ candidats à être multiplicité d'une composante (bornée ou non bornée) du complémentaire de l'amibe $\mathcal{A}_F$.

Proposition 4 *Lorsque p tend vers l'infini, on a*

$$\sup_{\substack{x \in \mathrm{Sing}(S_F) = \mathcal{S}_F \\ \tilde{x} \in \mathrm{Sing}(S_{\widetilde{F},p})}} \|x - \tilde{x}\| = 0$$

10. On la trouvera très détaillée dans [13].

lorsque p tend vers $+\infty$.

Preuve (*modulo le théorème 3.1 admis ici*). Soient a_1 et a_2 des points distincts $\Delta(F)\cap\mathbb{Z}^n$ correspondant aux multiplicités de deux composantes distinctes E_{a_1} et E_{a_2} du complémentaire de $\mathcal{A}_F$. Considérons l'hyperplan H de $\mathbb{R}^n$ où les deux fonctions affines $x \mapsto \log|\rho_{p,p^n a_j}| + p^n\langle a_j, x\rangle$, $j=1,2$, coïncident et l'hyperplan parallèle H' où les deux fonctions $x \mapsto c(E_{a_j}) + \langle a_j, x\rangle$, $j=1,2$, coïncident. Soit $\epsilon > 0$. Prenons x dans E_{a_j}, $j=1$ ou $j=2$, a une distance $\delta > 0$ de l'amibe $\mathcal{A}_F$. Pour p assez grand (dépendant de δ, ϵ), il résulte du théorème de Purbhoo que pour tout ζ dans $\mathrm{Log}^{-1}(x)$, on a la clause de domination

$$\sum_{\gamma \neq p^n a_j} |\rho_{p,\gamma}\zeta^\gamma| < \epsilon|\rho_{p,p^n a_j}\,\zeta^{p^n a_j}|$$

pour tout $\zeta \in \mathrm{Log}^{-1}(x)$. On en déduit, toujours pour un tel x et un ζ arbitraire dans $\mathrm{Log}^{-1}(x)$, que pour $p > p(\delta)$,

$$\log|\rho_{p,p^n a_j}\zeta^{p^n a_j}| + \log(1-\epsilon) \leq \log|\widetilde{F}_p(\zeta)| \leq \log|\rho_{p,p^n a_j}\zeta^{p^n a_j}| + \log(1-\epsilon)\,.$$

En divisant par p^n, on voit que la fonction

$$x \longmapsto \frac{\log|\rho_{p,p^n a_j}(\mathrm{Log}^{-1}(x))^{p^n a_j}|}{p^n} - N_{E_{a_j}}(x)$$

(qui est constante dans E_{a_j} et se prolonge en une fonction constante sur $\mathbb{R}^n$), est une fonction de valeur constante inférieure à $\eta > 0$ pouvant être choisi arbitraire, ce pourvu que l'on choisisse ϵ assez petit, donc $p = p(\delta, \epsilon)$ assez grand. Si p est choisi tel, la distance des deux hyperplans H et H' est au plus égale à $C(a_1, a_2)\eta$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de paires (a_1, a_2) envisageables, on a bien montré que pour p assez grand, la distance entre le squelette $\mathcal{S}_F = \mathrm{Sing}\,(S_F)$ et le « squelette approché » $\mathrm{Sing}\,(\widetilde{S}_{F,p})$ peut être rendue arbitrairement petite. $\diamondsuit$

Outre le fait que le théorème 3.1 donne une manière d'approcher le squelette de l'amibe, il fournit une intéressante définition alternative de l'amibe $\mathcal{A}_F$ d'un polynôme de Laurent F, qui rejoint naturellement l'exemple (1.1) de la construction de l'amibe de $F(X) = X_1 + X_2 - 1$ proposée dans la section 1.2. Auparavant, nous aurons besoin de la définition suivante :

Definition 3.1 *Soit $b_1, ..., b_{M+1}$ une liste de $M+1$ nombres strictement positifs ; on dira qu'une telle liste présente un pic dominant si et seulement si l'un des nombres b_k de la liste est strictement plus grand que la somme de tous les autres, ou encore, ce qui est équivalent via l'inégalité triangulaire, il est impossible de trouver une collection de nombres complexes de module 1, $e^{i\varphi_k}$, $k = 1, ..., M+1$ tels que*

$$\sum_{k=1}^{M+1} e^{i\varphi_k} b_k = 0\,.$$

Armés de cette définition, nous avons la caractérisation suivante de l'amibe de F :

Proposition 5 *Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est dans l'amibe du polynôme de Laurent F si et seulement si, pour tout polynôme de Laurent G dans l'idéal $F\,\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$, la liste des modules des monômes impliqués dans le développement de G et évalués en un point de $\mathrm{Log}^{-1}(x)$ ne présente pas de pic dominant.*

Preuve. Si x n'est pas dans l'amibe de $\mathcal{A}_F$, le théorème de Purbhoo 3.1 implique que $\widetilde{F_p}$ (pour p assez grand) est tel que la liste des modules de ses monômes évalués en un point de $\mathrm{Log}^{-1}(x)$ présente un pic dominant ; or $\widetilde{F_p}$ est bien dans l'idéal engendré par F dans $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$. Le complémentaire de l'amibe $\mathcal{A}_F$ est donc bien inclus dans le complémentaire de l'ensemble décrit dans l'énoncé de la proposition. Or si x est un point de l'amibe, il existe un $z \in \mathrm{Log}^{-1}(x)$ tel que $F(z) = 0$, ce qui prouve, si $G \in F\,\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$,

$$G(X) = \sum_\gamma \rho_\gamma X^\gamma \,,$$

qu'il existe une liste indexée par γ de nombres complexes de module 1, $e^{i\varphi_\gamma}$, tels que

$$\sum_\gamma e^{i\varphi_\gamma} |\rho_\gamma z^\gamma| = 0 \,,$$

ce qui signifie que la liste des modules des monômes impliqués dans le développement de G, évalués en un point arbitraire de $\mathrm{Log}^{-1}(x)$, ne saurait présenter de pic dominant. On a bien prouvé l'égalité ensembliste requise. $\diamondsuit$

Remarque 3.3. Cette proposition se transcrirait d'ailleurs au cas de la codimension quelconque pour décrire l'amibe d'une sous variété $V(I)$ d'un idéal de $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$. Si $x \in \mathcal{A}_{V(I)}$, alors x est dans l'intersection de toutes les amibes $\mathcal{A}_G$, $G \in I$. D'après la proposition 5, la liste des modules des monômes impliqués dans le développement de G et évalués en un point de $\mathrm{Log}^{-1}(x)$ ne présente pas de pic dominant. Réciproquement, si $G_1, ..., G_k$ sont des générateurs de I et si x est un point de $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_{V(I)}$, on peut considérer le polynôme de Laurent

$$F^{(x)}(X) = \sum_{j=1}^k G_j(X) \overline{G_j}(e^{2x_1} X_1^{-1}, ..., e^{2x_n} X_n^{-1}) \,.$$

On remarque que

$$V(I) \cap \mathrm{Log}^{-1}(x) = V(G_1, ..., G_k) \cap \mathrm{Log}^{-1}(x) = V(F^{(x)} \cap \mathrm{Log}^{-1}(x))$$

car si $z \in \mathrm{Log}^{-1}(x)$,

$$F^{(x)}(z) = \sum_{j=1}^k |G_j(z)|^2 \,.$$

Le point x n'est donc pas dans l'amibe de $F^{(x)}$. Il existe donc, d'après la proposition 5, un polynôme de Laurent (en l'occurrence $G = \widetilde{F^{(x)}}_p$ pour p assez grand), évidemment dans l'idéal I et tel que la liste des modules des monômes impliqués dans le développement de G et évalués en un point de $\text{Log}^{-1}(x)$ ne présente pas de pic dominant. On constate ainsi que l'amibe de $V(I)$ est aussi l'intersection des amibes de tous les éléments G de I, ou encore l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout G dans I, la liste des modules des monômes impliqués dans le développement de G et évalués en un point de $\text{Log}^{-1}(x)$ ne présente pas de pic dominant.

Références

[1] D.Bernstein, The number of roots of a system of equations, Functional Analysis and its applications, 9 (1975), 2, pp. 183-185.

[2] J.J.Duistermaat et W. Van der Kallen, Constant terms in powers of a Laurent polynomial, Indag. Math. 9, 1998, 221-231.

[3] M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh, Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas, Advances in Math. 151, 45-70, 2000.

[4] G. Ewald, *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, GTM 168, Springer.

[5] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston, 1994.

[6] A. Henriques, An analog of convexity for complements of amoebas of varieties of higher codimension, an anwer to a question asked by B. Sturmfels, Adv. Geometry 4, 61-73.

[7] O. Mathieu, Some conjectures about invariant theory and their applications, Algèbre non commutative, groupes quantiques et invariants (Reims, 1995), 263–279, Sémin. Congr., 2, Soc. Math. France, Paris, 1997.

[8] G. Mikhalkin, Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry, dans *Different faces of geometry*, Int. Math. Series (N.Y) 3, Kluwer, 2004, pp. 257-300.

[9] G. Mikhalkin et H. Rullgård, Amoebas of maximal area, **mathCV :0010087**.

[10] M. Nisse, Sparse polynomials have solid amoebas, **mathAG :0704.2216**.

[11] M. Passare, H. Rullgård, Amoebas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope, Duke Math. Journal, 121, 3 (2004), 481-507 [11].

[12] M. Passare, T. Sadykov, A. Tsikh, Singularities of hypergeometric functions in several variables. Compos. Math. 141 (2005), no. 3, 787-810.

[13] K. Purbhoo, A Nullstellensatz for amoebas, Duke Mathematical Journal 141 (2008), no.3, 407-445.

[14] A. Rashkovskii, Newton numbers and residual measures of plurisubharmonic functions, Ann. Polon. Math. 75 (2000), no. 3, 213-231.

11. Voir aussi la version preprint plus condensée et parfois plus directe.

[15] J. Rauch, B.A. Taylor, The Dirichlet problem for the multidimensional Monge-Ampère equation, Rocky Mountain J. Math. 7 (1977), 345-364.

[16] L. Ronkin, On zeroes of almost periodic functions generated by holomorphic functions in a multicircular domain, dans *Complex Analysis in Modern Mathematics*, Fazis, Moscow, 2000 [12].

[17] H. Rullgård, Stratification des espaces de polynômes de Laurent et la structure de leurs amibes, C. R. Acad. Sci. Paris, 331, I, pp. 355-358, 2000.

12. En russe malheureusement ! J'ai une traduction en italien ...