Université Bordeaux I **Analyse Complexe**
Master I de Mathématiques 2012-2013

Corrigé du DM

• **Exercice 1.** Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$, la forme

$$\omega_\alpha := \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

est–elle fermée dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$? exacte dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Calculer

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \omega_1.$$

• **Solution.** Soit $(x,y) \neq 0$, on écrit $\omega_\alpha = P_\alpha dx + Q_\alpha dy$, avec

$$P_\alpha(x,y) = \frac{x-y}{(x^2+y^2)^\alpha} \quad \text{et} \quad Q_\alpha = \frac{x+y}{(x^2+y^2)^\alpha}.$$

On a

$$d\omega_\alpha = \Big(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial y}\Big)dx \wedge dy$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_\alpha}{\partial x} &= \dfrac{(x^2+y^2)^\alpha - 2\alpha x(x+y)(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}; \\ \dfrac{\partial P_\alpha}{\partial x} &= \dfrac{-(x^2+y^2)^\alpha - 2\alpha y(x-y)(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}. \end{cases} \qquad \text{pour } (x,y) \neq (0,0)$$

Donc

$$d\omega_\alpha = \frac{2-2\alpha}{(x^2+y^2)^{2\alpha}}$$

et ω_α est fermé dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ (i.e. $d\omega_\alpha = 0$) si et seulement $\alpha = 1$. Notons que ω_α n'est pas exacte lorsque $\alpha \neq 1$ puisque elle n'est pas fermée.

Considérons maintenant le cerce unité $\partial\mathbb{D}$ orienté positivement. Soit $\gamma : [0,2\pi] \to \partial\mathbb{D}$ avec $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\cos t, \sin t)$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbb{D}} \omega_1 &= \int_\gamma P_1 dx + Q_1 dy \\ &= \int_0^{2\pi} (P_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + Q_1(\gamma(t))\gamma_2'(t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} [(\cos t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t)\cos t]dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \end{aligned}$$

Donc ω_1 n'est exacte.

• **Exercice 2.** Soit θ_0 un réel, on pose
$$\mathbb{C}_\theta = \mathbb{C}\backslash\{re^{i\theta_0} \,:\, r \geq 0\}.$$
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit la 1-forme différentielle ω_α dans $\mathbb{C}_\theta$ définie par
$$\omega_\alpha = |z|^\alpha \exp[i\alpha \arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)]dz.$$
Montrer que ω_α est exacte dans $\mathbb{C}_\theta$.

• **Solution.** Soit $f_\alpha(z) = |z|^\alpha \exp[i\alpha \arg_{]\theta_0,\theta_0+2\pi[}(z)]$ pour $z \in \mathbb{C}_\theta$. On pose $F_\alpha(r,\theta) = f_\alpha(z) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ avec $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}_\theta$. Notons que $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C}$, donc
$$F_\alpha(r,\theta) = r^{\alpha_1}[\cos(\alpha_2 r) + i\sin(\alpha_2 r)]e^{-\alpha_2\theta}[\cos(\alpha_1\theta) + i\sin(\alpha_1\theta)].$$
Un calcul direct nous donne
$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x}(re^{i\theta}) & = & \cos\theta\dfrac{\partial F_\alpha}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial F_\alpha}{\partial y}(r,\theta), \\ \\ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y}(re^{i\theta}) & = & \sin\theta\dfrac{\partial F_\alpha}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial F_\alpha}{\partial y}(r,\theta). \end{array}\right.$$
Donc et en tenant compte de l'expression de $F_\alpha(r,\theta)$ ci-dessus, on obtient
$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}}(re^{i\theta}) & = & \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x}(re^{i\theta}) + i\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y}(re^{i\theta})\Big) \\ & = & \dfrac{1}{2}\Big(e^{i\theta}\dfrac{\partial F_\alpha}{\partial r}(r,\theta) + i\dfrac{e^{i\theta}}{r}\dfrac{\partial F_\alpha}{\partial y}(r,\theta)\Big) \\ & = & \dfrac{1}{2}\Big(e^{i\theta}\alpha r^{\alpha-1}e^{i\alpha\theta} + i\dfrac{e^{i\theta}}{r}i\alpha r^\alpha e^{i\alpha\theta}\Big) \\ & = & 0 \end{array}$$
Puisque $\omega_\alpha = f_\alpha(z)dz$,
$$d\omega_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \wedge dz = 0, \qquad z \in \mathbb{C}_\theta$$
et donc ω_α est fermée. Puisque $\mathbb{C}_\theta$ est un ouvert étoilé, le lemme de Poincaré nous donne que ω_α est exacte sur $\mathbb{C}_\theta$.

• **Exercice 3.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Notre but est de montrer que $\omega = df/f$ est localement exacte

(1) On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $\omega = df/f$ est une forme fermée.
(2) Soit K un compact de Ω. Montrer qu'il existe (f_n) de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ à support compacts telle que f_n converge vers f et df_n converge vers f uniformément sur K.
(3) Conclure.

• **Solution.** 1. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $\omega = df/f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$d\omega = d\Big(\frac{df}{f}\Big) = \frac{1}{f}d(df) + d\Big(\frac{1}{f}\Big) \wedge df = d\Big(\frac{1}{f}\Big) \wedge df = -\frac{df}{f^2} \wedge df = 0.$$

Donc ω est localement exacte dans Ω.

2. Soit K un compact sur Ω. On considère

$$\varphi_n(x,y) = \frac{n^2}{2\pi}\exp\Big(-\frac{n^2}{2}(x^2+y^2)\Big), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

φ_n est une *approximation de l'unité* [1] :

(a) $\varphi_n \geq 0$
(b) pour tout n, $\|\varphi_n\|_1 = 1$
(c) pour tout $\delta > 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2 \setminus D(0,\delta)} \varphi_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

En effet:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_n(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{+\infty} \frac{n^2}{2\pi}e^{-\frac{n^2}{2}r^2} rdr\Big)d\theta = 1$$

ce qui donne (a) et la propriété (b) résulte de

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus D(0,\delta)} \varphi_n(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\Big(\int_\delta^{+\infty} \frac{n^2}{2\pi}e^{-\frac{n^2}{2}r^2} rdr\Big)d\theta = e^{-n^2\delta^2/2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit χ_K la fonction caractéristique de K. On pose $f_n(x,y) = f\chi_K \star \varphi_n(x,y)$. Rappelons que

$$\begin{aligned} f\chi_K \star \varphi_n(x,y) &= \int_{(t,s)\in K} f(t,s)\varphi_n(x-t,y-s)dtds & (1)\\ &= \int_{\mathbb{R}} (\chi_K f)(x-t,y-s)\varphi_n(t,s)dtds. & (2) \end{aligned}$$

• La fonction f_n est à support compact. En effet, il existe $R > 0$ tel que $K \subset D(0,R)$ et pour tout $(x,y) \notin D(0,2R)$, $\chi_K(x-t,y-s) = 0$ pour $(t,s) \in K$ car $(x-t,y-s) \notin D(0,R)$. Donc (2) implique que $f\chi_K \star \varphi_n | \mathbb{C} \setminus D(0,2R) = 0$ et par suite f_n est à support compact.

• Montrons maintenant que f_n converge uniformément vers f sur K. La preuve est classique [2] et nous allons la donner ici. Grâce à la propriété (b),

$$|f_n(x,y) - f\chi_K(x,y)| = \Big|\int_{\mathbb{R}} [(\chi_K f)(x-t,y-s) - (\chi_K f)(x,y)]\varphi_n(t,s)dtds\Big|$$

et puisque $\chi_K f$ est continue à support compact, elle est uniforme continue sur $\mathbb{R}$. Autrement pout tout ϵ, il existe $\delta > 0$ telle que pour tout $(t,s) \in D(0,\delta)$,

$$|(\chi_K f)(x-t,y-s) - (\chi_K f)(x,y))| \leq \epsilon.$$

[1] voir aussi cours d'intégration de L3.
[2] voir cours d'intégration de L3

Soit $\epsilon > 0$ et soit n assez grand. Pour $(x,y) \in K$ on a

$$\begin{aligned}
|f_n(x,y) - f(x,y)| &= |f_n(x,y) - (f\chi_K)(x,y)| + |(f\chi_K)(x,y) - f(x,y)| \\
&= \Big| \int_{\mathbb{R}} [(\chi_K f)(x-t, y-s) - (\chi_K f)(x,y)]\varphi_n(t,s)dtds \Big| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |(\chi_K f)(x-t, y-s) - (\chi_K f)(x,y)|\varphi_n(t,s)dtds \\
&= \int_{D(0,\delta)} |(\chi_K f)(x-t, y-s) - (\chi_K f)(x,y)|\varphi_n(t,s)dtds + \\
&\quad \int_{\mathbb{R}\setminus D(0,\delta)} |(\chi_K f)(x-t, y-s) - (\chi_K f)(x,y)|\varphi_n(t,s)dtds \\
&\leq \epsilon\|\varphi_n\|_1 + 2\|\chi_K f\|_\infty \int_{\mathbb{R}\setminus D(0,\delta)} \varphi_n(t,s)dtds \\
&\leq \epsilon(1 + 2\sup_K |f|).
\end{aligned}$$

Donc f_n est à support compact et converge uniformément vers f sur K.

• Montrons que df_n converge uniforément vers df sur K. Puisque φ_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et f est continue et donc bornée sur le compact K, le théorème de dérivation d'intégrale implique de f_n est $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ de plus en dérivant l'expression ci-dessus (1) sous l'intégrale, on obtient

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} = f\chi_K \star \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \quad \text{et } \frac{\partial f_n}{\partial x} = f\chi_K \star \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}.$$

Notons que

$$f\chi_K \star \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\chi_K \star \varphi_n \quad \text{et } f\chi_K \star \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\chi_K \star \varphi_n.$$

Donc comme plus haut, $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}$ (resp. $\dfrac{\partial f_n}{\partial y}$) converge uniformément sur K vers $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (resp. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$). D'où $df_n = df\chi_K \star \varphi_n$ converge uniforément vers df sur K.

3. Pour montrer que df/f est localement exacte, il suffit de montrer que pour tout triangle fermé Δ de Ω

$$\int_{\partial\Delta} \omega = 0.$$

Soit $\Delta \subset \Omega$ un triangle fermé. Puisque f_n est $\mathcal{C}^\infty$, la question 1 implique que df_n/f_n est fermé dans Ω et donc

$$\int_{\partial\Delta} \frac{df_n}{f_n} = 0.$$

Notons que $df_n/f_n - df/f = (df_n/f_n - df/f_n) + (df/f_n - df/f)$ et donc par 2 df_n/f_n converge uniformément vers df/f. Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\Big|\int_{\partial\Delta}\frac{df}{f}\Big| \leq \int_{\partial\Delta}\Big|\frac{df}{f}-\frac{df_n}{f_n}\Big| + \underbrace{\int_{\partial\Delta}\frac{df_n}{f_n}}_{=0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

• **Exercice 4.** Soit $\omega = Adz + Bd\bar{z}$ une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ dans le disque unité $\mathbb{D} := D(0,1)$. Soit $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On désigne par $D(0,r)$ le disque de centre 0 et de rayon $r > 0$. Montrer qu'on a

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2i\pi r^2}\int_{\partial D(0,r)} f\omega = A(0)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0) - B(0)\frac{\partial f}{\partial z}(0) - \Big(\frac{\partial B}{\partial z}(0) - \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}(0)\Big)f(0).$$

• **Solution.** Soit $\omega = Adz + Bd\bar{z}$ une 1-forme de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{D} := D(0,1)$ et soit $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la formule de Green–Riemann, pour tout $0 < r < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D(0,r)} f\omega &= \int_{\overline{D(0,r)}} d(f\omega) \\
&= \int_{\overline{D(0,r)}} df\wedge\omega + fd\omega \\
&= \int_{\overline{D(0,r)}} \Big[\underbrace{\Big(A\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - B\frac{\partial f}{\partial z}\Big) + f\Big(\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial B}{\partial \bar{z}}\Big)}_{\psi}\Big]d\bar{z}\wedge z \\
&= 2i\int_{\overline{D(0,r)}} \psi(z)dxdy. \qquad (3)
\end{aligned}$$

La fonction ψ et continue en 0 et

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{\pi r^2}\int_{\overline{D(0,r)}}\psi(z)dxdy - \psi(0)\Big| &= \frac{1}{\pi r^2}\Big|\int_{\overline{D(0,r)}}(\psi(z)-\psi(0))dxdy\Big| \\
&\leq \sup_{\overline{D(0,r)}}\|\psi-\psi(0)\| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Donc les léquation (3) et (4) nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi r^2}\int_{\partial D(0,r)} f\omega = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\overline{D(0,r)}}\psi(z)dxdy \underset{r\to 0}{\longrightarrow} \psi(0) \\
= A(0)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(0) - B(0)\frac{\partial f}{\partial z}(0) - \Big(\frac{\partial B}{\partial z}(0) - \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}(0)\Big)f(0).
\end{aligned}$$

• **Exercice 5.** **1**. Montrer que si u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{D(0,r)}$, alors

$$\int_{\partial D(0,r)} u\frac{\partial v}{\partial z}dz + v\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = \frac{i}{2}\int_{D(0,r)}(u\Delta v - v\Delta u)dxdy.$$

2. Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage du disque $\overline{\mathbb{D}}$. En utilisant l'exercice précédent aux couronnes $K_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : \epsilon \leq |z| \leq 1\}$, montrer

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})dt + \int_{\mathbb{D}} \Delta f(z) \ln|z| dm(z).$$

• **Solution.** **1.** Soit u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur un compact K (ou en particulier $\overline{D(0,r)}$). On pose $\omega = u\frac{\partial v}{\partial z}dz + v\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$, c'est une 1-forme C^1 sur K et

$$d\omega = \Big(\frac{\partial\big(u\frac{\partial v}{\partial z}\big)}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial\big(v\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\big)}{\partial z}\Big)d\bar{z}\wedge dz = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\frac{\partial v}{\partial z} + u\Delta v - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - v\Delta u = u\Delta v - v\Delta u.$$

Le résultat s'obtient par la formule de Cauchy Green sur le compact K.

2. Soit $K_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : \epsilon \leq |z| \leq 1\}$. On applique la formule ci-dessus sur K_ϵ avec $u(z) = f(z)$ et $v(z) = \ln|z|$. Notons que sur K_ϵ, $\partial \ln|z|/\partial z = 1/(2z)$, $\Delta \ln|z| = 0$ et donc

$$\int_{\partial K_\epsilon} \underbrace{f(z)\frac{1}{2z}dz + \ln|z|\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}d\bar{z}}_{\omega} = \frac{-i}{2}\int_{K_\varepsilon} \ln|z|\Delta f(z) dxdy. \qquad (5)$$

Notons que puisque $|z| \to \ln|z|$ est intégrable sur $D(0,1)$ et $f \in \mathcal{C}^2$, la fonction $z \to \ln|z|\Delta f(z)$ est intégrable sur $D(0,1)$. Nous avons

$$\int_{\partial K_\epsilon} \omega = \int_{\partial D(0,1)} \omega - \int_{\partial D(0,\epsilon)} \omega.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D(0,r)} \omega &= \int_{\partial D(0,r)} f(z)\frac{1}{2z}dz + \int_{\partial D(0,r)} \ln|z|\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \\
&= \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\frac{1}{2re^{i\theta}} ire^{i\theta}d\theta + \int_0^{2\pi} \ln|re^{i\theta}|\frac{\partial f(re^{i\theta})}{\partial \bar{z}}(-ire^{-i\theta})d\theta \\
&= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta - ir\ln r\int_0^{2\pi} \frac{\partial f(re^{i\theta})}{\partial \bar{z}}e^{-i\theta}d\theta,
\end{aligned}$$

$$\int_{\partial D(0,1)} \omega = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta$$

et comme $f \in \mathcal{C}^2$, (f et $\partial f/\partial \bar{z}$ sont continues) alors

$$\frac{i}{2}\int_0^{2\pi} f(\epsilon e^{i\theta})d\theta \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} i\pi f(0) \quad \text{et} \quad i\epsilon\ln\epsilon\int_0^{2\pi} \frac{\partial f(\epsilon e^{i\theta})}{\partial \bar{z}}e^{-i\theta}d\theta \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Nous obtenons notre résultat par (5) en faisant tendre ϵ vers 0.