UE N1MA7104

Devoir surveillé, Mercredi 7 Novembre 2012, 8.30-11.30

Corrigé (en roman) et *texte* (en *italiques*)

Exercice 1

Soient a et b deux réels strictement positifs et K le compact de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$K := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\Big\}.$$

1. *Calculer l'intégrale double*

$$I := \iint_K (x^2+y^2)\,dxdy$$

en utilisant le changement de variables

$$(x,y) \longleftrightarrow (r,\theta),$$

où $x = ar\cos\theta$ *et* $y = br\sin\theta$ *(ce changement de variables réalise un* C^1*-difféomorphisme entre* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,x)\,;\, x \geq 0\}$ *et* $]0,\infty[\times]0,2\pi[$*).*

Le jacobien du changement de variables proposé vaut :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr.$$

La formule de changement de variables dans la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue assure que

$$\begin{aligned} I &= ab\iint_{]0,1[\times]0,2\pi[} (a^2r^2\cos^2\theta + b^2r^2\sin^2\theta)\,r\,drd\theta \\ &= ab\,(a^2+b^2)\int_0^1 r^3dr \times \int_0^{2\pi} \cos^2\,\theta\,d\theta = \frac{\pi ab\,(a^2+b^2)}{4}. \end{aligned}$$

2. *Soit* $(\partial K)_+$ *le bord orienté du compact* K *(conformément à l'orientation canonique du plan complexe). Comment appelle t'on la courbe géométrique correspondant au support du chemin* $(\partial K)_+$ *? Calculer (en utilisant un paramétrage admissible de* $(\partial K)_+$*) l'intégrale curviligne*

$$J := \int_{(\partial K)_+} (y^3\,dx - x^3\,dy).$$

La courbe géométrique correspondant au support du chemin $(\partial K)_+$ est une ellipse centrée en 0 dont a et b représentent les longueurs des demi-axes. En utilisant le paramétrage du chemin $(\partial K)_+$ donné par

$$x = ar\cos\theta, \quad y = br\sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

il vient

$$dx = -ar\sin\theta\, d\theta, \quad dy = br\cos\theta\, d\theta$$

et, par conséquent :

$$\begin{aligned} J &= -\int_0^{2\pi} (ab^3\sin^4\theta + ba^3\cos^4\theta)\, d\theta \\ &= -ab\,(a^2+b^2)\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\, d\theta \\ &= -ab,(a^2+b^2)\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\cos^2(2\theta)+1}{2}\Big)\, d\theta \\ &= -\frac{3\pi ab\,(a^2+b^2)}{4}. \end{aligned}$$

3. *Donner une relation simple reliant les deux nombres I et J. Retrouver cette relation sans faire le calcul ni de I, ni de J – comme aux questions précédentes –, mais en utilisant cette fois un théorème du cours que l'on citera.*

   On a manifestement $J = -3I$. En appliquant la formule de Green-Riemann dans le compact K, on retrouve bien cette relation car

$$J = \int_K d(y^3dx - x^3dy) = 3\int_K (y^2+x^2)\, dy\wedge dx := -3\iint_K (x^2+y^2)\, dxdy.$$

Exercice 2

Soit f une fonction holomorphe au voisinage du disque unité fermé $\overline{D(0,1)}$ du plan complexe et $\gamma\ : \theta \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi\theta}$ le chemin $(\partial\overline{D(0,1)})_+$.

1. *À quel système d'équations aux dérivées partielles se plie dans l'ouvert $D(0,1)$ le couple de fonctions réelles (P,Q) tel que $f \equiv P + iQ$? Que peut-on dire de l'application $\mathbb{R}$-linéaire $d_{(x,y)}[(P,Q)]$ (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) en un point quelconque (x,y) de $D(0,1)$?*

   Le couple de fonctions (P,Q) se plie dans $D(0,1)$ au système différentiel de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial P}{\partial x} \equiv \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

qui traduit le fait que l'application $\mathbb{R}$-linéaire $d_{(x,y)}[(P,Q)]$ est en un point quelconque (x,y) de $D(0,1)$ ou bien l'application nulle, ou bien une similitude directe (composée d'une rotation et d'une homothéthie).

2. *En invoquant un théorème du cours, prouver l'inégalité*

$$\int_\gamma P\,dQ \geq 0$$

et exprimer cette intégrale curviligne en fonction de la dérivée au sens complexe $f'\ : D(0,1) \to \mathbb{C}$ de la fonction f. Que peut-on dire de la fonction f si $\int_\gamma P\,dQ = 0$?

D'après la formule de Green-Riemann appliquée dans le compact $K = \overline{D(0,1)}$ au voisinage duquel le couple de fonctions (P,Q) obéit au système différentiel de Cauchy-Riemann, on a

$$\begin{aligned}
\int_\gamma P\,dQ &= \int_{\overline{D(0,1)}} d[P\,dQ] = \int_{\overline{D(0,1)}} dP \wedge dQ \\
&= \iint_{\overline{D(0,1)}} \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix}\, dxdy \\
&= \iint_{\overline{D(0,1)}} \Big(\big(\frac{\partial P}{\partial x}\big)^2 + \big(\frac{\partial Q}{\partial x}\big)^2 \Big)\, dxdy \geq 0.
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
f'(x+iy) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial (P+iQ)}{\partial x} - i\,\frac{\partial (P+iQ)}{\partial y}\Big)\,(x+iy) \\
&= \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\Big)\,(x+iy)
\end{aligned}$$

du fait que f se plie au système de Cauchy-Riemann, on peut reécrire cela :

$$\int_\gamma P\,dQ = \iint_{\overline{D(0,1)}} |f'(x+iy)|^2\, dxdy.$$

Si $\int_\gamma P\,dQ = 0$, on a donc $|f'(z)|^2 = 0$ pour tout z dans $D(0,1)$ puisque $|f'|^2$ est une fonction C^∞, donc continue, dans $D(0,1)$, dont l'intégrale sur $D(0,1)$ est, de par ce qui précède, nulle. La fonction f vérifie alors dans l'ouvert connexe $D(0,1)$ la relation $df \equiv 0$ et est donc constante dans $D(0,1)$ (donc aussi dans $\overline{D(0,1)}$) d'après l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 3

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *une fonction de classe* C^1 *et* $\psi \ : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *une fonction de classe* C^2*. Pour tout* $z_0 \in \mathbb{C}$ *et tout* $\epsilon > 0$*, on note* $\gamma_{z_0,\epsilon}$ *le chemin* $\theta \in [0,1] \longmapsto z_0 + \epsilon e^{2i\pi\theta}$*.*

1. *Montrer que, pour tout* $z_0 \in \mathbb{C}$*,*

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \Big(\frac{1}{2i\pi\epsilon^2} \int_{\gamma_{z_0,\epsilon}} \varphi(\zeta)\, d\zeta \Big) = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}(z_0). \qquad (*)$$

En utilisant la formule de Green-Riemann dans le compact $\overline{D(z_0,\epsilon)}$, il vient, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi\epsilon^2} \int_{\gamma_{z_0,\epsilon}} \varphi(\zeta)\, d\zeta &= \int_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} d[\varphi d\zeta] = \frac{1}{2i\pi\epsilon^2} \int_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} d[\varphi d\zeta] \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon^2} \int_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \overline{\partial}\, [\varphi d\zeta] \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}(\xi + i\eta)\, d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Comme $\pi\epsilon^2$ est la surface du domaine d'intégration $\overline{D(z_0,\epsilon)}$, l'intégrale ci-dessus figure la valeur moyenne de la fonction $\partial\varphi/\partial\overline{z}$ (qui est continue puisque φ est C^1) dans le disque fermé $\overline{D(z_0,\epsilon)}$. La continuité au point z_0 de cette fonction $\partial\varphi/\partial\overline{z}$ implique bien que cette valeur moyenne converge vers la valeur de $\partial\varphi/\partial\overline{z}$ au point z_0 lorsque le rayon ϵ du disque tend vers 0.

2. *Si* Δ *désigne l'opérateur laplacien* $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$*, montrer que, pour tout* $z_0 \in \mathbb{C}$*,*

$$\lim_{\epsilon \to 0_+} \Big(\frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{(\xi,\eta) \in \overline{D(z_0,\epsilon)}} \Delta[\psi](\xi + i\eta)\, d\xi d\eta \Big) = \Delta[\psi](z_0). \qquad (**)$$

La fonction $\Delta[\psi]$ est une fonction continue en tout point z_0 de C puisque ψ est supposée C^2. Pour $\epsilon > 0$, l'expression

$$\frac{1}{\pi\epsilon^2} \iint_{(\xi,\eta) \in \overline{D(z_0,\epsilon)}} \Delta[\psi](\xi + i\eta)\, d\xi d\eta$$

représente la valeur moyenne de la fonction continue $\Delta[\psi]$ dans le disque fermé $\overline{D(z_0,\epsilon)}$ (dont la quantité au dénominateur $\pi\epsilon^2$ figure l'aire). Puisque $\Delta[\psi]$ est continue en tout point, en particulier en z_0, cette valeur moyenne tend bien vers $\Delta[\psi](z_0)$ lorsque le disque $\overline{D(z_0,\epsilon)}$ sur lequel on calcule la moyenne de $\Delta[\psi]$ s'« écrase » sur le point z_0, c'est-à-dire ici si ϵ tend vers 0.

3. *Comment s'exprime l'opérateur laplacien (considéré comme agissant sur les fonctions de classe C^2) à partir des opérateurs différentiels du premier ordre complexes $\partial/\partial z$ et $\partial/\partial \overline{z}$? En utilisant cette expression du laplacien, retrouver la formule $(**)$ à partir de la formule $(*)$ appliquée cette fois à la fonction $\varphi := \partial\psi/\partial z$.*

   Si ψ est une fonction de classe C^2 dans $\mathbb{C}$, on a

$$\Delta[\psi](z) \equiv 4\Big(\frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big)[\psi] = 4\Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \circ \frac{\partial}{\partial z}\Big)[\psi]$$

   On a donc, si $\zeta := \xi + i\eta$,

$$\Delta[\psi](\zeta)\, d\xi \wedge d\eta = \Delta[\psi](\zeta)\, \frac{d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{2i} = \frac{4}{2i}\overline{\partial}\Big[\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}\, d\zeta\Big] = \frac{2}{i}\, d\Big[\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}\, d\zeta\Big].$$

   La formule de Green-Riemann (encore !) donne donc :

$$\begin{aligned}
\iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \Delta[\psi](\xi + i\eta)\, d\xi d\eta &= \int_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \Delta\psi[\xi + i\eta]\, d\xi \wedge d\eta \\
&= \frac{2}{i}\int_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} d\Big[\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}\, d\zeta\Big] \\
&= \frac{2}{i}\int_{\gamma_{z_0,\epsilon}} \frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}\, d\zeta.
\end{aligned}$$

   En utilisant le résultat établi à la question 1 avec $\varphi = \partial\psi/\partial z$ comme indiqué, on trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\frac{1}{\pi\epsilon^2}\iint_{\overline{D(z_0,\epsilon)}} \Delta[\psi](\xi + i\eta)\, d\xi d\eta\Big) &= 4 \times \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\frac{1}{2i\pi\epsilon^2}\int_{\gamma_{z_0,\epsilon}} \frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}\, d\zeta\Big) \\
&= 4\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Big[\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big](z_0) = \Delta[\psi](z_0).
\end{aligned}$$

4. *On note (r,θ) les coordonnées polaires ($x + iy = re^{i\theta}$). Vérifier, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$, la formule*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial\psi}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{ir}\Big(\int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{\partial\psi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\, d\overline{\zeta}\Big). \qquad (\dagger)$$

   Comme $\zeta = re^{i\theta}$ et $\overline{\zeta} = re^{-i\theta}$, et que $(\zeta, \overline{\zeta})$ sont traitées au niveau des calculs comme s'il s'agissait de variables indépendantes (comme r et θ, qui, elles, sont bien par contre des variables réelles indépendantes), on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial \zeta} + e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}} \\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= ir\Big(e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial \zeta} - e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\Big)
\end{aligned}$$

en tant qu'opérateurs agissant sur les fonctions de classe C^1, en vertu de la *chain rule* (règle de Leibniz) du calcul différentiel. En utilisant la première de ces relations (agissant sur ψ au point courant $z_0 + re^{i\theta}$) et en substituant, on voit que

$$\int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma_{z_0,r}} \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\, d\overline{\zeta} = ir \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

D'où la relation (†) demandée en divisant les deux membres par ir.

5. *Déduire de la formule* (†) *que, pour tout* $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{r\to 0_+} \Big(\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial r}(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta\Big) = \Delta[\psi](z_0).$$

En divisant la formule (†) par πr, on trouve la différence de deux termes ; le premier

$$\frac{1}{i\pi r^2}\int_{\gamma_{z_0,\epsilon}} \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}}\, d\zeta$$

tend, lorsque r tend vers 0_+, vers

$$2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \overline{z}\partial z}\,(z_0) = \frac{\Delta[\psi](z_0)}{2}$$

d'après le résultat établi à la question 3. Le second se transforme par la formule de Green-Riemann en :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{i\pi r^2}\int_{D(z_0,\epsilon)} d\Big[\frac{\partial \psi}{\partial \overline{\zeta}}\, d\overline{\zeta}\Big] &= -\frac{2}{\pi r^2}\int_{D(z_0,\epsilon)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}(\xi + i\eta)\, d\eta \wedge d\xi \\
&= \frac{2}{\pi r^2}\int_{D(z_0,\epsilon)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}(\xi + i\eta)\, d\xi \wedge d\eta \\
&= \frac{2}{\pi r^2}\iint_{D(z_0,\epsilon)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}(\xi + i\eta)\, d\xi d\eta
\end{aligned}$$

et tend, lui aussi, d'après encore le résultat établi à la question 3, vers $\Delta[\psi](z_0)/2$. En ajoutant les deux contributions, on trouve le résultat demandé.

Exercice 4

Soient f et q deux fonctions à valeurs complexes définies dans un voisinage V du disque fermé $\overline{D(0,1)}$ du plan complexe, supposées toutes deux de classe C^1 dans ce voisinage V. Soit γ le chemin $\theta \in [0,1] \mapsto e^{2i\pi\theta}$ correspondant au bord orienté $(\partial\overline{D(0,1)})_+$.

1. *Soit $z \in D(0,1)$. En appliquant dans $K = \overline{D(0,1)}$ la formule de Cauchy-Pompeiu à la fonction $\zeta \in V \mapsto f(\zeta)\big(1 + q(\zeta)(\zeta - z)\big)$, vérifier que l'on a pour $f(z)$ la formule de représentation intégrale suivante :*

$$\begin{aligned} f(z) \ &= \ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(\zeta)\big(1+q(\zeta)(\zeta-z)\big)\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\Big(\frac{1}{\zeta - z} + q(\zeta)\Big)\,d\xi\,d\eta \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\iint_{\overline{D(0,1)}} f(\zeta)\,\frac{\partial q}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\,d\xi\,d\eta \end{aligned}$$

(on justifiera la convergence des trois intégrales, simples ou doubles, figurant au membre de droite de cette formule).

D'après la règle de Leibniz et le fait que $\zeta \mapsto \zeta - z$ soit holomorphe, on a, pour tout z, ζ au voisinage de $\overline{D(0,1)}$, avec $\zeta \neq z$,

$$\begin{aligned} &\overline{\partial}\Big[f(\zeta)\big(1+q(\zeta)(\zeta-z)\big)\Big] = \\ &= \ \left(\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\big(1+q(\zeta)(\zeta-z)\big) + f(\zeta)(\zeta-z)\frac{\partial q}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\right)d\bar\zeta \\ &= \ (\zeta - z)\left(\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\Big(\frac{1}{\zeta-z} + q(\zeta)\Big) + f(\zeta)\frac{\partial q}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\right)d\bar\zeta. \end{aligned}$$

La formule de Cauchy Pompeiu (Proposition 1.6 du cours), appliquée avec $K = \overline{D(0,1)}$, $\varphi \ : \zeta \mapsto f(\zeta)\big(1 + q(\zeta)(\zeta - z)\big)$, l'évaluation du membre de gauche se faisant précisément au point z (où $\varphi(z) = f(z)$), donne la formule de représentation voulue. Des trois intégrales figurant au membre de droite de cette formule, seule l'intégrale double

$$\iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}(\zeta)\Big(\frac{1}{\zeta-z} + q(\zeta)\Big)\,d\xi\,d\eta$$

pose éventuellement problème du fait de la singularité en $\zeta = z$ de la fonction sous l'intégrale . En fait, cette intégrale double est absolument convergente puuisque $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ est localement intégrable au voisinage de z du fait du critère de Riemann ($1/|x|^\alpha$ est intégrable au voisinage de $x = 0$ dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\alpha > -n$, et l'on est ici dans le cas $n = 2$, avec $-1 > -2$). Les deux autres intégrales (l'intégrale curviligne initiale et l'intégrale double finale) ne posent aucun problème car les fonctions à intégrer sont continues sur le domaine d'intégration.

2. *On suppose de plus maintenant que q est identiquement nulle sur le bord du disque $\overline{D(0,1)}$. Déduire de la formule de représentation établie à la question 1 (en la comparant à ce que donnerait la formule de Cauchy-Pompeiu appliquée à f) que l'on a, pour tout $z \in D(0,1)$, l'égalité :*

$$\iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\, q(\zeta)\, d\xi d\eta = -\iint_{\overline{D(0,1)}} f(\zeta)\, \frac{\partial q}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\, d\xi d\eta.$$

Retrouver cette égalité en appliquant dans $K = \overline{D(0,1)}$ la formule de Green-Riemann à la 1-forme $f(\zeta)q(\zeta)\, d\zeta$.

Si l'on écrit la formule de Cauchy-Pompeiu pour la fonction $\zeta \mapsto \varphi(\zeta)$, on trouve, pour tout $z \in D(0,1)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(\zeta)\, \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\, \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(\zeta)\big(1 + q(\zeta)(\zeta - z)\big) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\, \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \end{aligned}$$

puisque q est ici supposée identiquement nulle sur le support du chemin paramétré γ. En retranchant cette nouvelle égalité à l'égalité obtenue à la question 1, on obtient bien l'égalité

$$\iint_{\overline{D(0,1)}} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\, q(\zeta)\, d\xi d\eta = -\iint_{\overline{D(0,1)}} f(\zeta)\, \frac{\partial q}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\, d\xi d\eta$$

demandée. En faisant tout passer au membre de droite, cette dernière égalité s'écrit aussi (grâce à la règle de dérivation d'un produit) :

$$\int_{\overline{D(0,1)}} \overline{\partial}\Big[f(\zeta)q(\zeta)\, d\zeta\Big] = \int_{\overline{D(0,1)}} d\Big[f(\zeta)q(\zeta)\, d\zeta\Big] = 0.$$

Mais la formule de Green-Riemann (appliquée à $K = \overline{D(0,1)}$) donne

$$\int_{\overline{D(0,1)}} d\Big[f(\zeta)q(\zeta)\, d\zeta\Big] = \int_\gamma f(\zeta)q(\zeta)\, d\zeta.$$

Comme q est nulle sur le support de γ, on retrouve bien ainsi

$$\int_{\overline{D(0,1)}} d\Big[f(\zeta)q(\zeta)\, d\zeta\Big] = \int_\gamma f(\zeta)q(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

3. *Pour toute fonction f de classe C^1 au voisinage de $\overline{D(0,1)}$, prouver, en utilisant le résultat établi à la question précédente avec une judicieuse fonction q, la formule*

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(re^{i\theta})\,(1-r^2)\,rdrd\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,r^2 e^{i\theta}\,drd\theta.$$

On prend $q(\zeta) = 1 - |\zeta|^2$ et l'on écrit la formule établie à la question 2. Le membre de gauche s'exprime en utilisant le changement de variables coordonnées cartésiennes/coordonnées polaires ($\xi + i\eta = re^{i\theta}$, $d\xi d\eta = rdrd\theta$) :

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(re^{i\theta})\,(1-r^2)\,rdrd\theta.$$

Comme $\partial q/\partial\overline{\zeta} \equiv -\zeta$, le membre de droite s'écrit

$$\iint_{\overline{D(0,1)}} f(\xi + i\eta)(\xi + i\eta)\,d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,r^2 e^{i\theta}\,drd\theta$$

si l'on utilise une fois encore le changement de variables coordonnées cartésiennes/coordonnées polaires ($\xi + i\eta = re^{i\theta}$, $d\xi d\eta = rdrd\theta$). On a bien la formule voulue.

Exercice 5

Soit $\varphi\ : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^2 identiquement nulle hors d'un compact du plan.

1. *Formuler, en termes des dérivées partielles*

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}[\varphi]\,(0),\ \ p,q \in \mathbb{N},\ \ p+q \leq 2,$$

la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour la fonction φ au voisinage de l'origine.

La formule de Taylor à l'ordre 2 pour une fonction 2 fois différentiable à l'origine (en particulier une fonction de classe C^2 dans le plan) s'écrit :

$$\begin{aligned}\varphi(x+iy) &= \varphi(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0)x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0)y + \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(0)x^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(0)xy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(0)y^2\Big) + o(|\zeta|^2).\end{aligned}$$

En utilisant les relations

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = i\Big(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big)$$

(les opérateurs différentiels agissant ici sur les fonctions C^2 dans le plan) on constate que la partie principale de ce développement de Taylor s'exprime aussi sous la forme :

$$\varphi(0) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(0)z + \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}(0)\overline{z} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}(0)z^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}(0)z\bar{z} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}^2}(0)\bar{z}^2\Big).$$

On a donc le développement de Taylor de φ au voisine de l'origine ainsi reécrit sous la forme

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi(0) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(0)z + \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}(0)\overline{z} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}(0)z^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}(0)z\bar{z} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}^2}(0)\bar{z}^2\Big) + o(|z|^2).\end{aligned}$$

2. *En utilisant la formule de Green-Riemann et la formule de Taylor-Young à l'ordre* 2 *pour* φ *au voisinage de l'origine (telle qu'elle est a été formulée à la question 1), montrer que*[1]

$$\lim_{\epsilon\to 0_+}\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta^2}\Big) = -\frac{1}{2i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}(0).$$

Soit $R>0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi\subset D(0,R)$ et K_ϵ le compact défini comme la couronne $K_\epsilon := \{z\,;\,\epsilon\le|z|\le R\}$. En utilisant la formule de Green-Riemann dans cette couronne K_ϵ, on trouve, pour tout $\epsilon>0$,

$$\int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta^2} = \frac{1}{2i}\int_{K_\epsilon}\overline{\partial}\Big[\frac{\varphi}{\zeta^2}\,d\zeta\Big] = -\frac{1}{2i}\int_{\gamma_{0,\epsilon}}\varphi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

En utilisant le développement de Taylor de φ à l'origine établi à la question question 1, ainsi que le fait que, si $0\le p+q\le 2$,

$$\int_{\gamma_{0,\epsilon}}\zeta^p\bar{\zeta}^q\,\frac{d\zeta}{\zeta^2}\neq 0$$

seulement si $p-q-1=0$, c'est-à-dire si $p=q+1$, ce qui implique $q=0$ et $p=1$ sous l'hypothèse $p+q=2q+1\le 2$, on voit que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{\gamma_{0,\epsilon}}\varphi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta^2}\Big) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(0)\times\int_{\gamma_{0,\epsilon}}\frac{d\zeta}{\zeta} = 2i\pi\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}(0).$$

Finalement, on trouve

$$\lim_{\epsilon\to 0_+}\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta^2}\Big) = -\frac{1}{2i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}(0).$$

1. Il y avait ici une erreur dans le texte ; le facteur $-1/2i$ avait été oublié.

3. *On suppose maintenant φ de classe C^∞ et non plus seulement de classe C^2. En transposant ce qui a été fait aux questions 1 et 2 du cas $n=1$ au cas cette fois $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la limite*
$$\lim_{\epsilon\to 0_+} \Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta^{n+1}}\Big)$$
existe et calculer la valeur de cette limite en termes des dérivées par rapport à z de la fonction φ, évaluées en $z=0$.

Exactement comme nous avons exprimé à la question 1 le développement de Taylor à l'ordre 2 de φ au voisinage de l'origine, nous pouvons exprimer le développement de Taylor à l'ordre $n+1$ sous la forme
$$\varphi(z) = \sum_{p+q\leq n+1} \frac{1}{p!\,q!}\,\frac{\partial^{p+q}\varphi}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}(0)\,z^p\,\overline{z}^q + o(|z|^{n+1}).$$

Comme à la question 2, on utilise la formule de Green-Riemann dans K_ϵ pour écrire, pour tout $\epsilon > 0$,
$$\int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta^{n+1}} = \frac{1}{2i}\int_{K_\epsilon} \overline{\partial}\Big[\frac{\varphi}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta\Big] = -\frac{1}{2i}\int_{\gamma_{0,\epsilon}} \varphi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}.$$

En remarquant que si $0 \leq p+q \leq n+1$,
$$\int_{\gamma_{0,\epsilon}} \zeta^p\overline{\zeta}^q\,\frac{d\zeta}{\zeta^2} \neq 0$$
seulement si $p-q-n=0$, c'est-à-dire si $p=q+n$, ce qui implique $q=0$ et $p=n$ sous l'hypothèse $p+q=2q+n\leq 2$, on voit que
$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{\gamma_{0,\epsilon}} \varphi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}\Big) = \frac{\partial^n\varphi}{\partial z^n}(0) \times \int_{\gamma_{0,\epsilon}} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2i\pi\,\frac{\partial^n\varphi}{\partial z^n}(0).$$

On a donc au final
$$\lim_{\epsilon\to 0_+} \Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{|\zeta|=|\xi+i\eta|>\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta^2}\Big) = -\frac{1}{2i}\,\frac{\partial^n\varphi}{\partial z^n}(0).$$