Quelques exercices extraits du contrat sous Ulysse

Cette liste d'exercices regroupe 13 exercices mis en ligne sous le contrat sous Ulysse et liés au volet « Fourier » du cours. Ils peuvent vous être utiles pour vos révisions (pour ce qui concerne la partie II du cours). Il faudrait y ajouter divers points traités dans le polycopié qui ne seront (probablement) pas traités en cours faute de temps mais pourront servir de support d'exercices ou de trame de problèmes, par exemple :

- le Théorème 2.7 et sa preuve (principe d'Heisenberg) ;
- le Théorème 2.8 et sa preuve (théorème de Shannon-Nyquist) [1] ;
- la Proposition 2.9 (formule sommatoire de Poisson), sa preuve, et les exemples d'application (exemples 2.10 et 2.11) ;
- le principe de l'extrapolation des signaux de spectre borné (section 2.6.2 du polycopié).
- le Théorème de Jordan-Dirichlet, version continue (Théorème 2.5 du polycopié).

Ces 13 exercices et ces points de cours (conceptuellement un peu plus difficiles que les exercices des feuilles de TD), pour lesquels j'ai rédigé chaque fois un corrigé détaillé (ou dont le corrigé se trouve dans le polycopié pour ce qui concerne les points de cours mentionnés plus haut), vous permettront (avec les exercices des feuilles de TD que je vous conseille de tous refaire) de parfaire votre entrainement.

Exercice 1 (transformée de Fourier sur $l^1(\mathbb{Z})$ et $l^2(\mathbb{Z})$).

(1) Soit $(h(0), ..., h(M))$ une suite de nombres réels (que l'on prolonge par 0 pour en faire une suite indexée par $\mathbb{Z}$) et

$$m_0 \ : \omega \longmapsto \sum_{k=0}^{M} h(k)\, e^{-ik\omega}$$

le polynôme trigonométrique correspondant (m_0 est donc la transformée de Fourier du filtre digital de réponse impulsionnelle la suite indexée par $\mathbb{Z}$

$$(..., 0, ..., 0, \overset{0}{h(0)}, ..., \overset{M}{h(M)}, 0, ...)\,.$$

L'opération R qui à un signal d'entrée $(e(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ associe le signal $(s(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ défini par

$$s(k) = \sum_{l} h(l-2k)e(l)\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

1. Cette trame d'exercice a d'ailleurs été exploitée dans l'examen de session 1 en 2011-2012.

(vous vérifierez pourquoi la suite $(s(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ est bien dans $l^2(\mathbb{Z})$) est-elle un filtre stationnaire (c'est-à-dire un opérateur linéaire continu de $l^2(\mathbb{Z})$ dans lui-même invariant par translation) ? Décrivez explicitement l'opération R^* adjointe de l'opération R.

(2) Exprimez, $e = (e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ étant un élément de $l^2(\mathbb{Z})$, en fonction de m_0 et de $\widehat{e}$ (transformée de Fourier de la suite $e = (e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$) la transformée de Fourier de la suite $R^*[e]$.

(3) Calculez en utilisant la formule d'adjonction la transformée de Fourier de la suite $R[e]$ lorsque $e \in l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$.

Exercice 2 (transformée de Fourier dans $l^1(\mathbb{Z})$ et noyau de Dirichlet [2]).

(1) Vérifiez qu'il existe une constante positive K_1 telle que

$$\forall\, \omega \in [0,\pi]\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*\,,\ \Big|\int_0^\omega \frac{\sin(ku)}{u}\,du\Big| \leq K_1$$

(pensez au changement de variables $v = ku$ et à la semi-convergence de l'intégrale impropre de la fonction $v \longmapsto \sin v/v$ sur $[0,\infty[$ [3]) puis qu'il existe une constante positive K_2 telle que

$$\forall\, \omega \in [0,\pi]\,,\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*\,,$$
$$\Big|\int_0^\omega \Big(\frac{\sin[(k+1/2)u]}{2\sin(u/2)} - \frac{\sin(ku)}{u}\Big)\,du\Big| \leq K_2$$

(utilisez pour cela un peu de trigonométrie ainsi que les développements limités des fonctions sin et cos au voisinage de $u = 0$). Déduisez en (en utilisant l'expression “close” du noyau de Dirichlet donnée en cours suite aux égalités de la chaine (2.21) [4]), l'existence d'une constante positive K telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*\,,\ \sup_{\omega\in[-\pi,\pi]} \Big|\sum_{l=1}^{k} \frac{\sin(l\omega)}{l}\Big| \leq K\,.$$

(2) Montrez que, si $(\epsilon_k)_{k\geq 1}$ est une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0, alors, pour tout $\eta > 0$, il existe un seuil $N(\eta) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall\, p > n \geq N(\eta)\,,\ \sup_{\omega\in[-\pi,\pi]} \Big|\sum_{k=n+1}^{k=p} \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k}\Big| \leq \eta$$

(écrivez pour ce faire

$$\sum_{k=n+1}^{k=p} \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k} = \sum_{k=n+1}^{p} \epsilon_k (S_{k+1}(\omega) - S_k(\omega))\,,$$

où, pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$S_k(\omega) := \sum_{l=1}^{k} \frac{\sin(l\omega)}{l}$$

2. Cet exercice consiste en une version détaillée de la Remarque 2.1 du polycopié.
3. À propos, que vaut son intégrale sur $[0,\infty[$?
4. Vous pouvez d'ailleurs en profiter ici pour refaire soigneusement ces calculs !

et utilisez la règle d'Abel d'"intégration par parties discrète" vue en Analyse 3 (L2), puis le dernier résultat établi dans la question précédente). Déduisez en que la suite de fonctions 2π-périodiques

$$\Big(\omega \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k}\Big)_{n\geq 1}$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction 2π-périodique f.

(3) Vérifiez que la série de terme général

$$\rho_k := \frac{1}{k\log(k+1)}\ , \ \ k \geq 1$$

est une série à termes positifs divergente. Calculez les coefficients de Fourier complexes de la classe de fonction continue 2π-périodique $\dot{f}$ construite à la question **2** à partir de la suite $(\epsilon_k)_{k\geq 1}$, où précisément

$$\epsilon_k := \frac{1}{\log(k+1)}\ , \ \ k \geq 1\,.$$

Vérifiez que la fonction f ne saurait être la transformée de Fourier d'un suite $(s_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ (bien qu'étant une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$).

Exercice 3 (Transformation de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et noyau de Fejér). Soit P un polynôme trigonométrique

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{k=0}^{N} c_k\, e^{ik\theta},$$

où $\mathbb{N} \in \mathbb{N}^*$.

(1) Calculez (en exprimant dans un premier temps sa série de Fourier) la convolée $K_N \overset{\text{per}}{*} Q$, où Q est la fonction 2π-périodique

$$Q\ : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-iN\theta}\, P(\theta)$$

et K_N le noyau de Fejér.

(2) Déduisez du calcul précédent l'*inégalité de Bernstein* :

$$\sup_{\mathbb{R}} |P'| \leq N \sup_{\mathbb{R}} |P|.$$

Exercice 4 (transformée de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et théorème de Fejér [5]).

(1) Soit $\dot{f}$ un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et $(c_k(\dot{f}))_{k\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier complexes. On considère la fonction F définie sur $[0, 2\pi[$ par

$$F(\theta) := \int_0^{\theta} f(u)\, du$$

et prolongée ensuite à $\mathbb{R}$ en une fonction 2π-périodique. Pourquoi F définit-elle un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$? Calculez le spectre de $\dot{F}$ en fonction de celui de $\dot{f}$. À quelle condition la fonction F est elle une fonction continue 2π-périodique ?

5. Voir la Remarque 2.6 du polycopié.

(2) En utilisant l'identité remarquable

$$X^{2N} - 1 = (X^2 - 1) \times \sum_{k=0}^{N-1} X^{2k}\,,$$

vérifiez que, pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$,

$$\Big(\frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\Big)^2 = e^{-(N-1)\theta} \times \Big(\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\theta}\Big)^2$$

et déduisez-en, pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, la formule

$$\frac{1}{N}\Big(\frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\Big)^2 = \sum_{k=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|k|}{N}\Big) e^{ik\theta}\,.$$

Que valent les coefficients de Fourier complexes de $\dot{K}_N$, où $\dot{K}_N$ est la classe de la fonction 2π-périodique (de θ) ainsi définie ? Pourquoi la suite $(\dot{K}_N)_{N\geq 1}$ réalise-t'elle une approximation de la masse de Dirac dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$?

(3) Reprenez l'élément $\dot{f}$ de la question **1** ainsi que la fonction F correspondante et sa classe. On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$u_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k(\dot{F})\,.$$

Vérifiez que

$$\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1}}{N} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(u) F(u)\, du$$

(vous calculerez pour cela en vous servant de la Proposition 2.5 du cours la suite des coefficients de Fourier de $\dot{K}_N \overset{\text{per}}{*} \dot{F}$) et déduisez en (en exploitant le fait que $(\dot{K}_N)_{N\geq 1}$ soit une approximation de la masse de Dirac dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$, établi à la question **2**) que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{u_0 + \cdots + u_{N-1}}{N} = \frac{F(0^+) + F(0^-)}{2} = \pi c_0(\dot{f})\,.$$

Est-il possible que la suite $(\mathrm{Re}(u_k))_{k\geq 0}$ tende vers $+\infty$? vers $-\infty$?

(4) On suppose que $\dot{f}$ est un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier $c_k(\dot{f})$ valent 0 si $k = -1, 0, 1$, $1/i \log k$ si $k \geq 2$ et $-1/i\, \log |k|$ si $k \leq -2$. Calculez les coefficients de Fourier $c_k(\dot{F})$ de la classe $\dot{F}$ associée à $\dot{f}$ par la question **1**. Vérifiez que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la question **3** est alors une suite de nombres réels tendant vers $+\infty$. Déduisez de la question **3** qu'une telle classe $\dot{f}$ ne saurait exister.

Exercice 5 (Fourier sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$). Soient $\dot{f}$ et $\dot{g}$ deux éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ et f un représentant de $\dot{f}$. Pourquoi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto f(n\theta)$$

est-elle bien le représentant d'un élément $\dot{f}_n$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$? Que vaut la norme de $\dot{f}_n$ en fonction de la norme de $\dot{f}$? En utilisant la formule de Parseval, vérifiez la propriété ergodique suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\langle \dot{f}_n\,,\,\dot{g}\rangle_{\mathbb{T}} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{[0,2\pi[} f(\theta)\,d\theta \times \int_{[0,2\pi[} \overline{g(\theta)}\,d\theta\,.$$

Exercice 6 (Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$). En utilisant la transformation de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, montrez que l'opération de convolution entre éléments de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ ne saurait admettre d'élément neutre.

Exercice 7 (Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$). Considérez la fonction (intégrable sur $\mathbb{R}$) $\Delta\ :\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, t\in\mathbb{R}\,,\qquad \Delta(t)=\max(0,1-|t|)\,.$$

Vérifiez que la transformée de Fourier de $\dot{\Delta}$ est la fonction

$$\widehat{\Delta}\ :\omega\in\mathbb{R}\longmapsto\Big(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\Big)^2\,.$$

(avec la convention $\dfrac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}=1$ si $\omega=0$).

Exercice 8 (Équation de la chaleur, transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$).

(1) Soit $t>0$ et $\omega_0\in\mathbb{R}$. Montrez qu'il existe une fonction

$$x\longmapsto E(t,\omega_0,x),$$

intégrable sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier est la fonction

$$\omega\longmapsto e^{-t(\omega-\omega_0)^2}$$

(on pourra dans un premier temps supposer $\omega_0=0$). Si $\omega_0=0$, vérifiez que la fonction

$$(t,x)\longmapsto E(t,0,x)$$

est de classe C^∞ dans $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ et vérifie l'équation aux dérivées partielles dite *de la chaleur* :

$$\Big[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big](E(t,0,x))\equiv 0\,. \qquad (*)$$

(2) Soit φ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, nulle presque partout hors d'un segment $[-R,R]$. Montrez que l'on peut, pour tout $t>0$, définir la convolée de φ et de

$$x\longmapsto E(t,0,x)$$

et que la fonction

$$(x,t)\longmapsto\int_{\mathbb{R}}E(t,0,x-u)\varphi(u)\,du=\varphi_t(x)$$

est une fonction de classe de classe C^∞ dans $]0,\infty[\times\mathbb{R}$, solution de l'équation de la chaleur $(*)$ et telle que

$$\lim_{t\to 0}\|\dot{\varphi}_t-\dot{\varphi}\|_1=0\,.$$

Exercice 9 (transformée de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, transformée de Radon).

(1) Soit $f\ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^3, identiquement nulle hors d'un pavé $[-R,R]^2$ du plan. Vérifiez que f définit un élément $\dot f$ de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ et que la transformée de Fourier de $\dot f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ (on pensera à de judicieuses intégrations par parties). Déduisez en, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, la formule

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{]0,\infty[\times[0,2\pi[} \widehat{f}(re^{i\theta}) e^{ir(\cos\theta\, x + \sin\theta\, y)}\, r\, dr\, d\theta\,.$$

(2) On reprend f comme à la question précédente. Pour tout $p \in \mathbb{R}$, pour tout $\theta \in [0,2\pi[$, on pose

$$R[f](p,\theta) := \int_{\mathbb{R}} f(p\cos\theta - t\sin\theta, p\sin\theta + t\cos\theta)\, dt\ ;$$

cette intégrale correspond à l'intégrale de la fonction f sur la droite d'équation cartésienne

$$\langle (x,y)\,,\,(\cos\theta,\sin\theta)\rangle = p\,.$$

Calculez, θ étant fixé dans $[0,2\pi[$, la transformée de Fourier de la classe dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ de la fonction

$$p \in \mathbb{R} \longmapsto R[f](p,\theta)$$

(après avoir montré que cette fonction était bien intégrable sur $\mathbb{R}$ relativement à la mesure de Lebesgue) et déduisez de la question précédente un moyen de calculer f à partir de la connaissance de la fonction

$$R[f]\ : \mathbb{R}\times[0,2\pi[\longmapsto \mathbb{C}\,.$$

Exercice 10 (la transformée de Fourier sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$).

(1) Calculez la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de l'intervalle $[-T,T]$ de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la fonction

$$t \longmapsto \chi_{[-T,T]}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t\in[-T,T] \\ 0 \text{ sinon}\,. \end{cases}$$

lorsque T est un nombre strictement positif.

(2) Soit $\Omega > 0$; la fonction définie par

$$\forall\, t\in\mathbb{R}^*\,,\ f_\Omega(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\Omega t)}{t}$$

et $f_\Omega(0)=0$ est elle un représentant d'un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$?

Montrez que la fonction f_Ω est un représentant d'un élément d'une classe $\dot f_\Omega \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ et que la transformée de Fourier de $\dot f_\Omega$ a pour représentant la fonction caractéristique de $[-\Omega,\Omega]$, c'est-à-dire la fonction

$$\omega \longmapsto \chi_{[-\Omega,\Omega]}(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega\in[-\Omega,\Omega] \\ 0 \text{ sinon}\,. \end{cases}$$

(pensez à utiliser le Théorème 2.6 du cours et en particulier la formule d'inversion pour la transformée de Fourier L^2, ainsi que le résultat établi à la question **1.**).

Exercice 11 (la transformée de Fourier sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$). Calculez l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2\, dt$$

en pensant à utiliser la formule de Plancherel dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

Exercice 12 (la transformée de Fourier sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$).

(1) Soit $\dot{\psi}$ un élément de $L^2(\mathbb{R}, dt)$ (de représentant la fonction $t \longmapsto \psi(t)$). Soient $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Calculer en fonction de $a, b, \widehat{\psi}$ la transformée de Fourier de la classe $\dot{\psi}_{a,b}$ dont un représentant est

$$t \longmapsto \frac{1}{a}\,\psi\Big(\frac{t-b}{a}\Big)$$

(on montrera d'abord que cette fonction définit bien un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$).

(2) On considère $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ et on note, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$F(a, b) := \langle \dot{f}\,,\, \dot{\psi}_{a,b}\rangle\,.$$

Montrez que, si $a > 0$ est fixé, on a

$$\lim_{b\to\pm\infty} F(a, b) = 0$$

(pensez à utiliser la formule de Plancherel dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$).

(3) On suppose de plus que ψ vérifie de plus

$$\int_{]0,\infty[} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}\, d\omega = \int_{]0,\infty[} \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{|\omega|}\, d\omega = C \in]0, +\infty[$$

et que $|\widehat{\psi}|$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Vérifiez que, si $\dot{f}_1$ et $\dot{f}_2$ sont deux éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$, les fonctions

$$F_j\ : (a, b) \in]0, \infty[\times\mathbb{R} \longmapsto \langle \dot{f}_j\,,\, \dot{\psi}_{a,b}\rangle\,,\ j = 1, 2,$$

sont dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(]0, \infty[\times\mathbb{R}, da\,db/a)$ et que l'on a, si

$$H := L^2_{\mathbb{C}}\Big(]0, \infty[\times\mathbb{R}, \frac{dadb}{a}\Big)\,,$$

la formule

$$\langle \dot{F}_1\,,\, \dot{F}_2\rangle_H = 2\pi C\langle \dot{f}_1\,,\, \dot{f}_2\rangle$$

(pensez à utiliser deux fois la formule de Plancherel dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$).

Exercice 13 (la transformée de Fourier sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, la transformation de Hilbert). On rappelle dans cet exercice la formule de Dirichlet :

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du := \lim_{T\to+\infty}\int_0^T \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}\,.$$

(1) Soit $\epsilon \in]0, 1[$. Montrez que la transformée de Fourier de l'élément $\dot{h}_\epsilon$ de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ dont un représentant est défini par

$$h_\epsilon(t) := \frac{i}{\pi t}\,\chi_{\{|t|\in[\epsilon,1/\epsilon]\}}(t)$$

vérifie, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{\epsilon\to0^+} \widehat{h}_\epsilon(\omega) = \text{signe}\,(\omega)$$

(utilisez la formule de Dirichlet rappelée dans l'en-tête de l'exercice).

(2) Vérifiez qu'il existe un opérateur linéaire continu H de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ dans lui-même tel que

$$\mathcal{F}(H(\dot{f})) = \text{signe}(\ ) \times \mathcal{F}(\dot{f})$$

($\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$) et que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \|\dot{h}_\epsilon * \dot{f} - H(\dot{f})\|_2 = 0$$

pour tout $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ (vous justifierez aussi pourquoi la convolution $\dot{h}_\epsilon * \dot{f}$ est licite et définit un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ lorsque $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$).

Corrigés

Corrigé de l'exercice 1.

(1) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le théorème de Fubini-Tonelli et l'invariance de la mesure de décompte par translation, on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |e_l|\,|h(l-2k)|\Big)^2 \\
\leq\ & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{l} |h(l-2k)| \times \sum_{l} |h(l-2k)|\,|e_l|^2\Big) \\
\leq\ & \|h\|_1 \times \sum_{k} \Big(\sum_{l} |h(l-2k)|\,|e_l|^2\Big) \\
\leq\ & \|h\|_1 \times \sum_{l} \Big(\sum_{k} |h(l-2k)|\,|e_l|^2\Big) \\
\leq\ & \|h\|_1^2 \times \|e\|_2^2 \,.
\end{aligned}$$

L'opérateur R est donc bien linéaire continu de $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ dans lui-même, de norme au plus

$$\|h\|_1 = \sum_{k=0}^{N} |h(k)|\,.$$

La réponse à suite $(\delta_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est la suite $(h(-2k))_k$; la réponse à la suite $(\delta_{1,k})_k$ est la suite $(h(1-2k))_k$, qui est différente de la suite $(h(-2k))_k$ décalée d'une unité vers la droite, en l'occurrence la suite

$$(h(-2(k-1))_k = (h(2-2k))_k\,.$$

L'opérateur linéaire continu R n'est donc pas un filtre stationnaire (au sens de la définition introduite dans la Proposition 2.4). Son adjoint se calcule immédiatement en utilisant la formule d'adjonction

$$\langle R[(e_k)_k]\,,\,(f_k)_k\rangle = \langle (e_k)_k\,,\,R^*[(f_k)_k]\rangle$$

On trouve, en utilisant le théorème de Fubini,

$$R^*[(f_k)_k] = \Big(\sum_{l} f_l h(k-2l)\Big)_k\,.$$

(2) La transformée de Fourier de $R^*[e]$ est la limite dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ de la suite des classes de fonctions

$$\omega \longmapsto \sum_{k=-N}^{N} (R^*[e])_k\, e^{-ik\omega}\,.$$

Or, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de Fubini, la propriété d'homomorphisme de l'exponentielle et l'invariance de la mesure de décompte par translation, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-N}^{N} (R^*[e])_k\, e^{-ik\omega} = \\
= &\sum_{k=-N}^{N} \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} e_l h(k-2l)\Big)\, e^{-ik\omega} \\
= &\sum_{k=-N}^{N} \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} e_l h(k-2l) e^{-i(k-2l)\omega} \times e^{-2il\omega}\Big) \\
= &\sum_{l\in\mathbb{Z}} e_l e^{-2il\omega} \Big(\sum_{k=-N}^{N} h(k-2l) e^{-i(k-2l)\omega}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Lorsque N tend vers l'infini, on a convergence ponctuelle de la suite de fonctions

$$\Big(\omega \longmapsto \sum_{k=-N}^{N} h(k-2l) e^{-i(k-2l)\omega}\Big)_N$$

vers la fonction

$$\omega \longmapsto \sum_{k=0}^{M} h(k) e^{-ik\omega} = m_0(\omega)\,.$$

La convergence est même une convergence dominée sur $[0, 2\pi[$ (par la fonction constante $\|h\|_1$). La limite dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ de la suite des classes de fonctions

$$\Big(\omega \longmapsto \sum_{k=-N}^{N} (R^*[e])_k\, e^{-ik\omega}\Big)_N$$

est donc

$$\dot{m}_0 \times \lim_{L^2(\mathbb{T})} \Big(\sum_{k=-N}^{N} e_l e^{-2il(\cdot)}\Big)\,.$$

Comme la transformée de Fourier de e est la limite dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ de la suite des classes de fonctions

$$\Big(\omega \longmapsto \sum_{k=-N}^{N} e_l e^{-il\omega}\Big)_N\,,$$

on a au final la relation

$$\widehat{R^*[e]} = \dot{m}_0 \times \widehat{e}(2(\cdot))\,.$$

(3) On a, d'après la formule d'adjonction et la formule de Parseval (voir la Remarque 2.2 du cours), pour tout e, f dans $l^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned}\langle R[e]\,,\,f\rangle &= \langle e\,,\ R^*[f]\rangle\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[}\widehat{e}(\omega)\overline{m_0(\omega)\widehat{f}(2\omega)}\,d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,4\pi[}\widehat{e}(\omega/2)\,\overline{m_0(\omega/2)}\,\overline{\widehat{f}(\omega)}\,\frac{d\omega}{2}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi[}\widetilde{e}(\omega)\,\overline{\widehat{f}(\omega)}\frac{d\omega}{2}\end{aligned}$$

avec

$$\widetilde{e}(\omega)=\widehat{e}(\omega/2)\overline{m_0(\omega/2)}+\widehat{e}(\omega/2+\pi)\overline{m_0(\omega/2+\pi)}\,.$$

On a donc

$$\widehat{R[e]}(2\omega)=\frac{\widehat{e}(\omega)\,\overline{m_0}(\omega)+\widehat{e}(\omega+\pi)\,\overline{m_0}(\omega+\pi)}{2}$$

d'après la formule de Plancherel.

Corrigé de l'exercice 2.

(1) Si l'on effectue le changement de variables proposé, on trouve que, pour $\omega\in[0,\pi]$, pour $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\omega}\frac{\sin ku}{u}\,du=\int_0^{k\omega}\frac{\sin v}{v}\,dv\,;$$

or l'on sait (vous avez sûrement vu ce résultat en L2) que

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\int_0^x\frac{\sin v}{v}\,dv\Big)=\frac{\pi}{2}\,,$$

ce qui prouve que la fonction continue

$$x\in[0,\infty[\longmapsto\int_0^x\frac{\sin v}{v}\,dv$$

est bornée en valeur absolue par une constante positive K_1 sur $[0,\infty[$, ce qui prouve donc la première inégalité demandée. Pour la seconde inégalité, on remarque (en utilisant les formules de trigonométrie donnant l'expression de $\sin(a+b)$) que, sur $]0,\pi]$,

$$\begin{aligned}\frac{\sin[(k+1/2)u]}{2\sin(u/2)}&=\frac{\sin(ku)\cos(u/2)}{2\sin(u/2)}+\frac{\cos(ku)}{2}\\ &=\frac{\sin(ku)}{u}+\frac{\sin(ku)}{u}\Big(\frac{u\cos(u/2)}{2\sin(u/2)}-1\Big)+\frac{\cos(ku)}{2}\\ &=\frac{\sin(ku)}{u}+\sin(ku)\,\varphi(u)+\frac{\cos(ku)}{2}\end{aligned}$$

avec, pour $u\in]0,\pi]$.

$$\varphi(u):=\frac{u\cos(u/2)-2\sin(u/2)}{2u\sin(u/2)}\,;$$

or un développement limité du numérateur montre qu'au voisinage de $u = 0$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \frac{u - \frac{u^3}{8} + o(u^3) - 2(\frac{u}{2} - \frac{u^3}{48} + o(u^3))}{2u\sin(\frac{u}{2})} \\ &= \frac{-\frac{u^3}{8} + o(u^3)}{2u\sin(\frac{u}{2})} = -\frac{u}{8} + o(u)\,,\end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction φ se prolonge en une fonction continue, donc bornée en valeur absolue par une constante M sur $[0,\omega]$. On a donc, sur $[0,\omega]$, l'inégalité

$$\Big|\frac{\sin[(k+1/2)u]}{2\sin(u/2)} - \frac{\sin(ku)}{u}\Big| \leq M + 1/2\,.$$

En intégrant sur $[0,\pi]$, on trouve donc la seconde inégalité demandée avec $K_2 := \pi(M+1/2)$. D'après l'expression du noyau de Dirichlet (chaine d'égalités (2.21) du cours), on a

$$\frac{1}{2}\sum_{l=-k}^{k} e^{il\omega} \quad = \quad \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{k}\cos(lu) = \frac{\sin[(k+1/2)u]}{2\sin(u/2)}\,.$$

En intégrant entre 0 et ω, il vient

$$\int_0^\omega \frac{\sin[(k+1/2)u]}{2\sin(u/2)}\,du = \frac{\omega}{2} + \sum_{l=1}^{k}\frac{\sin(l\omega)}{l}\,.$$

Utilisant les deux inégalités établies précédemment, on en déduit que pour tout ω dans $[0,\pi]$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\Big|\sum_{l=1}^{k}\frac{\sin(l\omega)}{l}\Big| \leq K_1 + K_2 + \frac{\pi}{2} = K\,;$$

cette inégalité reste vraie par parité pour $\omega \in [-\pi, 0]$ et la dernière inégalité demandée est ainsi prouvée.

(2) Grâce à la méthode d'Abel (qui n'est rien d'autre en fait que le mécanisme de l'intégration par parties, mais développé dans le cadre discret et non plus continu), on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{k=p}\epsilon_k\,\frac{\sin(k\omega)}{k} &= \sum_{k=n+1}^{p}\epsilon_k(S_k(\omega) - S_{k-1}(\omega)) \\ &= -S_n(\omega)\epsilon_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1}(\epsilon_k - \epsilon_{k+1})S_k(\omega) \\ &\quad + \epsilon_p S_p(\omega)\,,\end{aligned}$$

et par conséquent, pour tout $\omega \in [-\pi, \pi]$, en utilisant la dernière inégalité établie à la question **1** et la décroissance de la suite $(\epsilon_k)_{k\geq 1}$, l'estimation

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k=n+1}^{k=p} \epsilon_k \,\frac{\sin(k\omega)}{k}\Big| \\
\leq\ & K\Big(\epsilon_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p} (\epsilon_k - \epsilon_{k+1}) + \epsilon_p\Big) \\
\leq\ & 2K\epsilon_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Pour $\eta > 0$ donné, il existe $N(\eta)$ tel que $n > N(\eta)$ implique $\epsilon_n < \eta/2K$; on a donc bien

$$\forall\, p > n \geq N(\eta)\,,\ \sup_{\omega\in[-\pi,\pi]} \Big|\sum_{k=n+1}^{k=p} \epsilon_k \,\frac{\sin(k\omega)}{k}\Big| \leq \eta\,.$$

La suite de fonctions 2π-périodiques

$$\Big(\omega \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k}\Big)_{n\geq 1}$$

vérifie donc le critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}$ et converge donc uniformément (voir le cours d'Analyse 3) vers une fonction f (nécessairement 2π-périodique par passage à la limite uniforme comme toutes les fonctins en jeu ici).

(3) La fonction

$$t \in [2, \infty[\longmapsto \frac{1}{t \log t}$$

a pour primitive sur $[2, +\infty[$ la fonction

$$F\ : t \longmapsto \log(\log t)$$

qui admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$; le critère de confrontation séries/intégrales (voir le cours d'Analyse 3) implique donc la divergence de la série de Bertrand $[1/(k \log k)]_{k\geq 2}$; la règle des équivalents permet de conclure à la divergence de la série $[\rho_k]_{k\geq 1}$.

Le coefficient de Fourier complexe $c_k(\dot f)$ vaut par définition

$$c_k(\dot f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega) e^{-ik\omega}\, d\omega\,.$$

Puisque f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0, 2\pi]$) de la suite de fonctions

$$\Big(\omega \in \mathbb{R} \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \frac{\sin(k\omega)}{k}\Big)_{n\geq 1},$$

on a (intervertion de limite et de prise d'intégrale lorsque la limite est uniforme, voir le cours d'Analyse 3),

$$c_k(\dot f) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{l=1}^{N} \epsilon_l \frac{\sin(l\omega)}{l}\Big) e^{-ik\omega}\, d\omega\,.$$

On constate alors, en utilisant le fait que $(\dot{e}_k)$ est une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, que

$$c_k(\dot{f}) = \frac{\epsilon_k}{2ik} = \frac{\rho_k}{2i}$$

si $k \geq 1$, $c_0(\dot{f})$, $c_{-k}(\dot{f}) = -c_k(\dot{f})$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Si la fonction f était la transformée de Fourier d'une suite $(s_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, on aurait $s_{-k} = c_k(\dot{f})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; ceci est impossible car alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |s_k| = 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\dot{f})| = 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = +\infty\,,$$

ce qui contredit le fait que $(s_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$.

Corrigé de l'exercice 3.

(1) La fonction 2π-périodique Q s'écrit :

$$Q(\theta) = \sum_{k=0}^{N} c_k e^{i(k-N)\theta} = \sum_{k=-N}^{0} c_{k+N} e^{ik\theta}.$$

La convolée de cette fonction avec K_N s'écrit donc

$$\begin{aligned} Q \overset{\mathrm{per}}{*} K_N(\theta) &= \sum_{k=-N}^{N} c_k(\dot{Q}) c_k(\dot{K}_N)\, e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k=-N}^{0} c_{k+N}(\dot{P})\,(1+k/N)\, e^{ik\theta} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} k c_k(\dot{P})\, e^{i(k-N)\theta} \\ &= \frac{1}{N} e^{-iN\theta}\, P'(\theta). \end{aligned}$$

(2) Comme le noyau de Fejér K_N a pour intégrale 2π sur $[0, 2\pi]$, on déduit de la question **1** que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\frac{|P'(\theta)|}{N} = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} K_N(u)\, Q(\theta - u)\, du\Big| \leq \sup_{\mathbb{R}} |Q| = \sup_{\mathbb{R}} |P|.$$

Cela donne l'inégalité demandée.

Corrigé de l'exercice 4.

(1) Si $\dot{f}$ est dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, f est intégrable sur $[0, 2\pi[$ et la fonction F définie sur $[0, 2\pi[$ par

$$F(\theta) := \int_{[0,\theta]} f(u)\, du$$

est continue sur $[0, 2\pi[$ (il suffit d'invoquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour affirmer que si $(\theta_n)_n$ est une suite convergeant vers $\theta_\infty \in [0, 2\pi[$, alors la suite $(F(\theta_n))_n$ converge vers $F(\theta_\infty)$) ; de plus, cette fonction est bornée sur $[0, 2\pi[$ par $2\pi\|\dot{f}\|_{\mathbb{T},1}$ et se prolonge donc en une fonction mesurable bornée 2π-périodique F, fonction définissant donc une classe $\dot{F}$ de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$.

Concernant le calcul des coefficients de Fourier, on a (en utilisant au final Fubini)

$$\begin{aligned} c_0(\dot{F}) &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(u)\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\theta} f(u)\,du\Big)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\Big(\int_u^{2\pi} d\theta\Big)\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)(2\pi-u)\,du\,. \end{aligned}$$

Si f était continue, on pourrait affirmer, par intégration par parties, que, pour $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)e^{-ik\theta}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[F(\theta)\frac{e^{-ik\theta}}{-ik}\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{ik}\,c_k(\dot{f}) \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta}{2i\pi k} + \frac{1}{ik}\,c_k(\dot{f})\,. \end{aligned}$$

Ce résultat subsiste même lorsque f cesse d'être continue : il suffit pour cela d'approcher $f_{|[0,2\pi]}$ dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}([0,2\pi],d\theta)$ par une suite de fonctions continues $(f_n)_n$ (au sens de la semi-norme $\|\ \|_1$ sur $[0,2\pi]$), d'appliquer la formule précédente pour chaque f_n, puis de passer à la limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Pour que F soit continue 2π-périodique, il faut et il suffit que $\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = 0$, c'est-à-dire que $c_0(\dot{f}) = 0$, auquel cas

$$c_0(\dot{F}) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} uf(u)\,du\,.$$

(2) La première formule trigonométrique à vérifier est immédiate : il suffit en effet de remarquer que si l'on pose $X_\theta = e^{i\theta/2}$, alors on a

$$\frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{X_\theta^N - X_\theta^{-N}}{X_\theta - X_\theta^{-1}} = \frac{1}{X_\theta^{N-1}}\,\frac{X_\theta^{2N}-1}{X_\theta^2-1}$$

et d'appliquer l'identité remarquable proposée, puis d'élever le tout au carré. Pour obtenir la seconde formule, il suffit juste de diviser par N et de calculer le carré

$$\Big(\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\theta}\Big)\times\Big(\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\theta}\Big)$$

en développant, ce qui donne (pour l'expression de ce carré) :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2(N-1)}\Big(\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ 0\leq k_1,k_2\leq N-1}} e^{i(k_1+k_2)\theta}\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{2(N-1)}\Big(\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ 0\leq k_1,k_2\leq N-1}} 1\Big)e^{ik\theta}\\
&= \sum_{k=0}^{N-1}(k+1)e^{ik\theta} + \sum_{k=N}^{2(N-1)}(2N-1-k)e^{ik\theta}\,;
\end{aligned}$$

il ne reste plus qu'à multiplier les deux membres par $e^{-i(N-1)\theta}$ et à effectuer les changements d'indexation nécessaires.
Les coefficients de Fourier complexes de $\dot{K}_N$ se calculent par simple identification, sont nuls si $|k|\leq N$ et valent

$$c_k(\dot{K}_N) = \frac{N-|k|}{N}$$

pour $|k|\leq N-1$.
Comme $c_0(\dot{K}_N)=1$ et que K_N est positive, on a $\|\dot{K}_N\|_{\mathbb{T},1}=1$ pour tout $N\geq 1$. D'autre part, si $\delta>0$

$$\int_{\delta\leq|\theta|\leq\pi} K_N(\theta)\,d\theta \leq \frac{2\pi}{N\sin^2(\delta/2)}$$

puisque $|\sin(N\theta/2)|^2\leq 1$, ce qui implique

$$\lim_{N\to+\infty}\Big(\int_{\delta\leq|\theta|\leq\pi} K_N(\theta)\,d\theta\Big) = 0\,;$$

la suite $(\dot{K}_N)_{N\geq 1}$ réalise donc bien une approximation de la masse de Dirac dans $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ au sens de la Définition 1.10 du cours.

(3) On voit que l'on peut reécrire

$$\frac{u_0+u_1+\cdots+u_{N-1}}{N} = \sum_{k=-N-1}^{N-1}\frac{N-|k|}{N}\,c_k(\dot{F})$$

en utilisant le fait que, pour tout k entre 0 et $N-1$, $u_k=\sum_{l=-k}^{k} c_l(\dot{F})$. En utilisant ce qui a été établi à la question **2**, on a donc

$$\frac{u_0+u_1+\cdots+u_{N-1}}{N} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\dot{F})c_k(\dot{K}_N)\,.$$

En utilisant la Proposition 2.5, on constate que ceci s'écrit aussi

$$\frac{u_0+u_1+\cdots+u_{N-1}}{N} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\dot{F}\overset{\mathrm{per}}{*}\dot{K}_N)\,.$$

La fonction 2π-périodique $\theta\longmapsto\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\dot{F}\overset{\mathrm{per}}{*}\dot{K}_N)\,e^{ik\theta}$ (qui d'ailleurs est un polynôme trigonométrique) est un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ ayant pour spectre complexe la suite $(c_k(\dot{F}\overset{\mathrm{per}}{*}\dot{K}_N))_{k\in\mathbb{Z}}$, donc même spectre complexe que la classe $\dot{f} \overset{\text{per}}{*} \dot{K}_N$. Comme la transformation de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ est injective (voir la Proposition 2.6 ou la méthode de restitution d'un élément depuis sa transformée de Fourier vue en cours), on a égalité de ces deux classes et donc de leurs représentants continus en tout point, en particulier en $\theta = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{N-1}}{N} &= (F \overset{\text{per}}{*} K_N)(0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(-\theta)F(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(\theta)F(\theta)\,d\theta\,.\end{aligned}$$

Si l est un nombre complexe, on peut écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(\theta)F(\theta)\,d\theta - l = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (F(\theta) - l)\,K_N(\theta)\,d\theta\,.$$

Si $l = \frac{F(0^+)+F(0^-)}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = \pi c_0(\dot{f})$, on sait que, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $\delta_\epsilon \in]0, \pi[$ tel que $|\theta| \leq \delta_\epsilon$ implique $|F(\theta) - l| \leq \epsilon$. On a donc, pour ce choix de δ_ϵ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta|\leq\delta_\epsilon} |F(\theta) - l|\,K_N(\theta)\,d\theta \leq \epsilon\|\dot{K}_N\|_{\mathbb{T},1} = \epsilon\,;$$

d'autre part, d'après la question **2**, on sait que pour N assez grand

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{\delta_\epsilon\leq|\theta|\leq\pi} |F(\theta) - l|\,K_N(\theta)\,d\theta \\ \leq\ &\frac{\sup|F|}{\pi} \times \int_{\delta_\epsilon\leq|\theta|\leq\pi} K_N(\theta)\,d\theta \leq \epsilon\,.\end{aligned}$$

Au final, on a, pour N assez grand

$$\Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (F(\theta) - l)K_N(\theta)\,d\theta\Big| \leq 2\epsilon\,,$$

et, comme ϵ est arbitraire, il en résulte bien

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{u_0 + \cdots + u_{N-1}}{N} = \frac{F(0^+) + F(0^-)}{2} = \pi c_0(\dot{f})\,.$$

Si la suite $(\mathrm{Re}\,u_k)_{k\geq 0}$ tendait vers $+\infty$, alors, pour tout $A > 0$, il y aurait un seuil N_A tel que $k \geq N_A$ implique $\mathrm{Re}\,u_k > A$. Mais alors

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to+\infty} \mathrm{Re}\Big[\frac{u_0 + .. + u_{N_A} + \cdots + u_N}{N}\Big] \\ \geq\ &\lim_{N\to+\infty} \mathrm{Re}\Big[\frac{(N - N_A)A}{N}\Big] = A\,,\end{aligned}$$

ce qui, comme A est arbitrairement grand, contredit le fait que cette limite est finie (elle vaut $\pi\mathrm{Re}\,[c_0(\dot{f})]$). Ceci est donc impossible. Le même raisonnement vaut dans le cas où la suite $(\mathrm{Re}\,u_k)_{k\geq 0}$ tendrait vers $-\infty$.

(4) On applique le résultat de la question **1** pour calculer le spectre de $\dot{F}$. Pour $k = \pm 1$, on a $c_{\pm 1}(\dot{F}) = 0$ tandis que, pour $k \geq 2$,

$$c_k(\dot{F}) = \frac{c_k(\dot{f})}{ik} = -\frac{1}{k \log k}$$

et que, si $k \leq -2$,

$$c_k(\dot{F}) = \frac{c_k(\dot{f})}{ik} = \frac{1}{k \log |k|} = -\frac{1}{|k| \log |k|}\,.$$

Comme $c_0(\dot{f}) = 0$, on a

$$c_0(\dot{F}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta f(\theta)\, d\theta\,.$$

La suite $(u_k)_{k \geq 0}$ de la question 3 a donc pour terme général, pour $k \geq 2$,

$$u_k = \sum_{l=-k}^{k} c_l(\dot{F}) = c_0(\dot{F}) - 2 \sum_{l=2}^{k} \frac{1}{|k| \log |k|}\,.$$

Comme la série de Bertrand $[1/(p \log p)]_{p \geq 2}$ est divergente (d'après la confrontation séries/intégrales et le fait que la primitive de $t \longmapsto 1/(t \log t)$, soit la fonction $t \longmapsto \log|\log t|$, tende vers 0 lorsque t tend vers l'infini, la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ est une suite de nombres réels tendant vers $-\infty$. D'après la question **3**, il est impossible que la suite de terme général

$$\frac{u_0 + \cdots + u_k}{N}$$

converge vers une limite finie (à savoir ici $\pi c_0(\dot{f}) = 0$). L'existence de $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ ayant pour spectre le spectre prescrit (qui pourtant tend vers 0 lorsque k tend vers $\pm\infty$) est donc impossible.

Corrigé de l'exercice 5. La fonction f_n est évidemment périodique de période 2π comme f. D'autre part

$$\begin{aligned} \|\dot{f}\|^2_{\mathbb{T},2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi[} |f(n\theta)|^2\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2n\pi[} |f(\theta)|^2\, \frac{d\theta}{n} \\ &= \frac{1}{n} \times n\, \|\dot{f}\|^2_{\mathbb{T},2} = \|\dot{f}\|^2_2\,. \end{aligned}$$

D'après la formule de Parseval, on a

$$\langle \dot{f}_n\,,\, \dot{g}\rangle_{\mathbb{T}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\dot{f}_n) \overline{c_k(\dot{g})}\,,.$$

Or, puisque, dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$,

$$\dot{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\dot{f})\, \dot{e}_k\,,$$

où

$$e_k\ : \theta \longmapsto \exp(ik\theta)\,,$$

on a par identification en replaçant θ par $n\theta$ dans l'expression d'un représentant,

$$c_k(\dot{f}_n) = c_{k/n}(\dot{f})$$

si n divise k et $c_k(\dot{f}_n) = 0$ sinon. Donc

$$\langle \dot{f}_n\,,\,\dot{g}\rangle_{\mathbb{T}} = c_0(\dot{f})\overline{c_0(\dot{g})} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} c_{nk}(\dot{f})\overline{c_{nk}(\dot{g})}\,.$$

Or

$$\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} c_{nk}(\dot{f})c_{nk}(\dot{g})\Big| \leq \sqrt{\sum_{|k|\geq n} |c_k(\dot{f})|^2} \times \sqrt{\sum_{|k|\geq n} |c_k(\dot{g})|^2}$$

par Cauchy-Schwarz ; cette quantité tend donc vers 0 lorsque n tend vers l'infini puisque l'on a sous chaque radical de droite le reste d'une série convergente. On a donc bien le résultat demandé.

Corrigé de l'exercice 6. Si l'opération de convolution entre éléments de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ admettait un élément neutre $\dot{e}$, on aurait, pour tout $\dot{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, $\dot{f} * \dot{e} = \dot{f}$. En prenant la transformée de Fourier des deux membres et en appliquant la Proposition 2.8, on aurait, au niveau des spectres, la formule

$$\forall\,\omega \in \mathbb{R}^n\,,\ \widehat{f}(\omega) \times \widehat{e}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\,.$$

Si l'on prend pour f la gaussienne

$$x \longmapsto \exp(-\|x\|^2/2)$$

dont le spectre est

$$\omega \longmapsto (2\pi)^{n/2}\exp(-\|\omega\|^2/2)$$

(et en particulier ne s'annule pas), on trouve donc

$$\forall\,\omega \in \mathbb{R}^n\,,\ \widehat{e}(\omega) = 1\,.$$

Mais ceci est en contradiction avec le lemme de Riemann-Lebesgue (voir la Proposition 2.7) qui assure que le spectre d'un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$, tendant vers 0 lorsque $\|\omega\|$ tend vers l'infini. L'existence de $\dot{e}$ est donc impossible et l'opération de convolution sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ ne saurait admettre d'élément neutre.

Corrigé de l'exercice 7. On a, par définition de la transformation de Fourier sur $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta}(\omega) &:= \int_{\mathbb{R}} \Delta(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-1}^{1} \Delta(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} (1-|t|)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-1}^{0} (1+t)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{1} (1-t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= 2\int_0^1 (1-t)\cos(\omega t)\,dt \\
&= 2\Big[(1-t)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\,dt \\
&= \frac{2}{\omega^2}(1-\cos(\omega t)) = \frac{4\sin^2(\omega/2)}{\omega^2} \\
&= \Big(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\Big)^2.
\end{aligned}$$

La transformée de Fourier de la classe de fonction intégrable $\dot{\Delta}$ étant une fonction continue de ω, on a aussi

$$\widehat{\Delta}(0) = \lim_{\substack{\omega \to 0 \\ \omega \neq 0}} \Big(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \Big)^2 = 1$$

et le résultat voulu est bien démontré.

Corrigé de l'exercice 8.

(1) Supposons d'abord $\omega_0 = 0$. La fonction

$$\omega \longmapsto e^{-t\omega^2}$$

est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier est la fonction

$$\begin{aligned} x \quad &\longmapsto \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-t\omega^2} e^{-ix\omega}\, d\omega \\ &= \quad \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} e^{-ixu/\sqrt{2t}}\, du \\ &= \quad \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2t}} e^{-x^2/(4t)}\,. \end{aligned}$$

Comme cette fonction est aussi intégrable, on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier (Théorème 2.4 du cours) et en déduire donc que la fonction

$$\omega \longmapsto e^{-t\omega^2}$$

est la transformée de Fourier de la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/(4t)} = E(t,0,x)\,.$$

La fonction

$$\omega \longmapsto e^{-t(\omega-\omega_0)^2}$$

est donc la transformée de Fourier de la fonction modulée

$$x \longmapsto \frac{e^{i\omega_0 x}}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/(4t)}\,.$$

Le fait que

$$(t,x) \longmapsto E(t,0,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/(4t)}$$

soit de classe C^∞ dans $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ est immédiat ; que cette fonction vérifie l'équation aux dérivées partielles de la chaleur relève juste d'un calcul élémentaire.

(2) On peut définir la convolée de $\dot{\varphi}$ et de $x \longmapsto E(t,0,x)$ car il s'agit de deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$; du fait que la fonction $x \longmapsto E(t,0,x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, on peut même assurer que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} E(t,0,x-u)\varphi(u)\, du$$

est convergente pour tout $t > 0$. Le fait que la fonction

$$(t,x) \longmapsto \int_{-R}^{R} E(t,0,x-u)\, \varphi(u)\, du$$

soit C^∞ dans $]0,\infty[$ et solution de l'équation de la chaleur dans cet ouvert résulte de l'application du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. La propriété

$$\lim_{t\to 0} \|\dot\varphi_t - \dot\varphi\|_1 = 0$$

résulte du fait que si t_n est une suite de nombres positifs tendant vers 0, la suite $(E(t_n,0,x))_n$ réalise une approximation de la masse de Dirac (voir le cours de *Théorie de l'intégration*, Proposition 4.10 dans le polycopié de ce cours).

Corrigé de l'exercice 9.

(1) La fonction f étant continue et à support compact, donc aussi bornée et à support compact, elle est donc bien intégrable dans le plan. En utilisant le théorème de Fubini et en intégrant deux fois par parties, on voit que, pour $\omega_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega_1,\omega_2) &= \iint_{[-R,R]^2} f(x,y)\, e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y)}\, dxdy \\
&= \int_{-R}^{R} \Big[\int_{-R}^{R} f(x,y)e^{-i\omega_1 x}\, dx\Big]\, e^{-i\omega_2 y}\, dy \\
&= \frac{1}{(i\omega_1)^3}\int_{-R}^{R} \Big[\int_{-R}^{R} \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} e^{-i\omega_1 x}\, dx\Big]\, e^{-i\omega_2 y}\, dy \\
&= \frac{1}{(i\omega_1)^3}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}\, e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y)}\, dxdy
\end{aligned}$$

et que, si $\omega_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega_1,\omega_2) &= \iint_{[-R,R]^2} f(x,y)\, e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y)}\, dxdy \\
&= \int_{-R}^{R} \Big[\int_{-R}^{R} f(x,y)e^{-i\omega_2 y}\, dy\Big]\, e^{-i\omega_1 x}\, dx \\
&= \frac{1}{(i\omega_2)^3}\int_{-R}^{R} \Big[\int_{-R}^{R} \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3} e^{-i\omega_2 y}\, dy\Big]\, e^{-i\omega_1 x}\, dx \\
&= \frac{1}{(i\omega_2)^3}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}\, e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y)}\, dxdy\,.
\end{aligned}$$

Si

$$Q[f] := \Big|\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}\Big| + \Big|\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}\Big|$$

(c'est une fonction continue, nulle hors de $[-R,R]^2$ et bornée dans ce pavé), il en résulte, pour tout (ω_1,ω_2) dans $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
(|\omega_1|^3+|\omega_2|^3)\,|\widehat{f}(\omega)| &\leq \iint_{[-R,R]^2} |Q[f](x,y)|\, dxdy \\
&\leq 4\,R^2 \sup_{[-R,R]^2} |Q[f]|
\end{aligned}$$

et, par conséquent, que $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^3$ puisque la fonction

$$\omega \longmapsto \frac{1}{\|\omega\|^3}$$

est intégrable dans la couronne $\{\|\omega\| \geq 1\}$. C'est donc le Théorème d'Inversion 2.4 (et le recours au changement de variables consistant à passer en coordonnées polaires) qui assure la formule demandée exprimant $f(x,y)$ en termes de la transformée de Fourier de $\dot{f}$.

(2) Posons $\xi := (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\xi^\perp := (-\sin\theta, \cos\theta)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |R[f](p,\theta)|\, dp &\leq \int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} |f(p\xi + t\xi^\perp)|\, dt \Big]\, dp \\
&\leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(p\xi + t\xi^\perp)|\, dpdt \\
&\leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\, dxdy < \infty
\end{aligned}$$

grâce au théorème de Fubini-Tonelli et à la formule de changement de variables dans les intégrales doubles, appliqué à la transformation orthogonale du plan

$$(p,t) \longmapsto (x,y) = p\xi + t\xi^\perp$$

(il s'agit de la rotation de centre l'origine et d'angle θ). La fonction

$$p \longmapsto R[f](p,\theta)$$

est donc bien intégrable sur $\mathbb{R}$. En appliquant maintenant le théorème de Fubini (la clause de sécurité étant validée grâce au théorème de Fubini-Tonelli), on a, pour tout $\eta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} R[f](p,\theta) e^{-i\eta p}\, dp \\
= &\int_{\mathbb{R}} \Big[\int_{\mathbb{R}} f(p\xi + t\xi^\perp)\, dt \Big]\, e^{-i\eta p}\, dp \\
= &\iint_{\mathbb{R}^2} f(p\xi + t\xi^\perp)\, e^{-i\eta p}\, dpdt \\
= &\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, e^{-i\eta(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, dxdy \\
= &\widehat{f}(\eta\cos\theta, \eta\sin\theta).
\end{aligned}$$

En utilisant la formule établie à la question précédente, on voit donc que, pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} &\Big[\int_{\mathbb{R}} R[f](p,\theta) e^{-i\eta p}\, dp \Big] \\
&\times e^{i\eta(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, \eta d\eta\, d\theta\, .
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 10.

(1) Pour $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{\chi}_{[-T,T]}(\omega) = \int_{-T}^{T} e^{-i\omega t}\, dt = 2\frac{\sin(\omega T)}{\omega}\, .$$

(2) L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t}\, dt$$

est divergente car

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t}\,dt &\geq \sum_{k=0}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt\\ &\geq \Big(\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)\pi}\Big)\int_0^\pi |\sin t|\,dt\\ &= +\infty\,.\end{aligned}$$

La fonction f_Ω n'est donc pas une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (sinon par le changement de variable $u=\Omega t$, f_1 le serait, ce qui est impossible d'après ce qui précède) ; ce n'est donc pas un représentant d'un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$.

La fonction f_Ω est bien dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ puisque la fonction $t\longmapsto \frac{|\sin \Omega t|}{t}$ est bornée par Ω sur $\mathbb{R}$ ($|\sin u|\leq |u|$ pour tout $u\in\mathbb{R}$), en particulier sur $[-1,1]$, et que l'intégrale impropre

$$\int_{|u|\geq 1} \frac{du}{u^2}$$

converge du fait du critère de Riemann. La transformée de Fourier inverse (au sens L^2, voir le Théorème 2.6 du cours) de l'élément de $L^2(\mathbb{R},d\omega)$ dont un représentant est

$$\omega\longmapsto f_\Omega(\omega)$$

est la classe de $\frac{1}{2\pi}\chi_{[-\Omega,\Omega]}$ dans $L^2(\mathbb{R},dt)$; on a donc, d'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier L^2 (encore le Théorème 2.6) :

$$\frac{1}{2\pi}\dot{\chi}_{[-\Omega,\Omega]} = \lim_{\substack{N\to+\infty\\ L^2}} \left[t\longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^N f_\Omega(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\right].$$

Du fait de la parité des fonctions de la variable t figurant aux deux membres de cette égalité, on a aussi

$$\frac{1}{2\pi}\dot{\chi}_{[-\Omega,\Omega]} = \lim_{\substack{N\to+\infty\\ L^2}} \left[t\longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^N f_\Omega(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\right].$$

En renversant les rôles de l'espace des temps et de celui des fréquences (c'est-à-dire en échangeant les variables t et ω), on constate que la transformée de Fourier au sens L^2 de $\dot{f}_\Omega\in L^2(\mathbb{R},dt)$ est $\dot{\chi}_{[-\Omega,\Omega]}\in L^2(\mathbb{R},d\omega)$ (on utilise pour cela la définition de la transformation de Fourier au sens L^2).

Corrigé de l'exercice 11. D'après le résultat de la question **2** de l'exercice 10, la transformée de Fourier de la classe de

$$t\longmapsto \frac{\sin t}{t} = \pi f_1(t)$$

dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ est la classe dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},d\omega)$ de la fonction

$$\omega\longmapsto \pi\,\chi_{[-1,1]}(\omega)\,.$$

D'après la formule de Plancherel (formule (2.43) du polycopié), on a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^2\, dt = \frac{\pi^2}{2\pi}\int_{-1}^{1} d\omega = \pi\,.$$

Corrigé de l'exercice 12.

(1) C'est la formule de changement de variables du cours d'intégration qui assure que $\dot\psi_{a,b}$ est dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$ et que l'on a d'ailleurs

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{a,b}(t)|^2\, dt = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2\, dt\,.$$

Si $\dot\psi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)\cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$, on vérifie (toujours grâce à la formule de changement de variables, c'est d'ailleurs un cas particulier de la formule (2.28) établie dans la Proposition 2.7) que

$$\widehat{\psi}_{a,b}(\omega) = e^{-ib\omega}\widehat{\psi}(a\omega)\,.$$

Si $(\dot\psi_k)_k$ est une suite d'éléments de $\mathcal{G}$ convergeant (dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},dt)$) vers un élément $\dot\psi$, la suite des classes de fonctions

$$\omega \longmapsto e^{-ib\omega}\widehat{\psi}_k(a\omega)$$

converge dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},d\omega)$ vers la classe de la fonction

$$\omega \longmapsto e^{-ib\omega}\widehat{\psi}(a\omega)\,,$$

où $\widehat{\psi}$ est un représentant de la transformée de Fourier de $\dot\psi$; cela vient du fait que, grâce à la formule de Plancherel, la transformée de Fourier de $\dot\psi_k$ converge vers celui de $\dot\psi$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},d\omega)$ (on fait ensuite le changement de variables $\omega \longmapsto a\omega$; la multiplication par la fonction de module 1 qui à ω associe $e^{-ib\omega}$ n'enraye pas cette convergence. La transformée de Fourier de $\psi_{a,b}$ a donc pour représentant

$$\omega \longmapsto e^{-ib\omega}\widehat{\psi}(a\omega)\,,$$

où $\widehat{\psi}$ est un représentant de la transformée de Fourier de $\dot\psi$.

(2) En utilisant la formule de Plancherel (formule (2.43) dans l'énoncé du Théorème 2.6), on a

$$\begin{aligned} F(a,b) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi}_{a,b}(\omega)}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\, e^{ib\omega}\, d\omega\,. \end{aligned}$$

Comme la fonction

$$\omega \longmapsto \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, le lemme de Riemann-Lebesgue (une des assertions de la Proposition 2.7) permet de conclure au fait que

$$\lim_{b\to\pm\infty} F(a,b) = 0\,.$$

(3) D'après la formule de Plancherel appliquée dans l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$, on a, pour $j = 1, 2$,

$$\langle \dot{f}_j \,,\, \dot{\psi}_{a,b} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_j(\omega) \overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\, e^{ib\omega}\, d\omega\,.$$

Si $a > 0$ est fixé, on peut, puisque les fonctions

$$\omega \longmapsto \widehat{f}_j(\omega)\, \overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\,,\ j = 1, 2,$$

sont dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega, d\omega)$ (en effet les $\widehat{f}_j$ le sont et la fonction $|\widehat{\psi}|$ est bornée), utiliser dans $L^2_{\mathbb{R}}(b, db)$ cette fois à nouveau la formule de Plancherel pour assurer que

$$\begin{aligned} &\int_{b\in\mathbb{R}} F_1(a, b)\overline{F_2(a, b)}\, db \\ = \quad & 2\pi \int_{\mathbb{R}} f_1(\omega)\overline{f_2(\omega)}|\widehat{\psi}(a\omega)|^2\, d\omega\,. \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à la mesure da/a, on constate (en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli et l'hypothèse sur $\widehat{\psi}$) que

$$\begin{aligned} &\int_{a>0} \int_{b\in\mathbb{R}} |F_1(a, b)|\, |F_2(a, b)|\, \frac{da\, db}{a} \\ \leq \quad & 2\pi \int_\omega |f_1 f_2(\omega)| \Big(\int_{a>0} \frac{|\widehat{\psi}(a\omega)|^2}{a}\, da \Big)\, d\omega \\ = \quad & 2\pi C \int_{\mathbb{R}} |f_1 f_2(\omega)|\, d\omega < +\infty \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder. D'une part, ceci implique (en prenant $\dot{f}_1 = \dot{f}_2$) que chaque $\dot{F}_j$ est dans H. D'autre part, cela nous met en situation favorable pour appliquer le théorème de Fubini (la clause de sécurité étant vérifiée) et conclure que

$$\langle \dot{F}_1, \dot{F}_2 \rangle_H = 2\pi C \times \langle \dot{f}_1, \dot{f}_2 \rangle\,.$$

Corrigé de l'exercice 13.

(1) On a, par définition de la transformée de Fourier,

$$\begin{aligned} \widehat{h}_\epsilon(\omega) \quad &:= \quad \frac{i}{\pi} \Big(\int_\epsilon^{1/\epsilon} \frac{e^{-i\omega t}}{t}\, dt + \int_{-1/\epsilon}^{-\epsilon} \frac{e^{-i\omega t}}{t}\, dt \Big) \\ &= \quad \frac{2}{\pi} \int_\epsilon^{1/\epsilon} \frac{\sin(\omega t)}{t}\, dt \end{aligned}$$

(on effectue le changement de variables $t \longmapsto -t$ dans la seconde intégrale). Si $\omega \in \mathbb{R}$, on voit (par exemple en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue) que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 \frac{\sin(\omega t)}{t}\, dt = \int_0^1 \frac{\sin(\omega t)}{t}\, dt\,.$$

D'autre part, si $\omega \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_1^{1/\epsilon} \frac{\sin(\omega t)}{t}\, dt = \int_1^\infty \frac{\sin(\omega t)}{t}\, dt$$

(l'intégrale au second membre est ici semi-convergente au sens de Riemann). Finalement, on voit donc que pour tout $\omega \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \widehat{h}_\epsilon(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\omega t)}{t}\, dt\,.$$

Si $\omega > 0$, on voit (en faisant dans l'intégrale semi-convergente le changement de variables $t \longmapsto \omega t$) que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\omega t)}{t}\, dt = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}\,.$$

Il résulte de la formule de Dirichlet (rappelée dans l'en-tête de l'exercice) que, si $\omega > 0$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \widehat{h}_\epsilon(\omega) = 1\,.$$

Puisque $\widehat{h}_\epsilon$ est impaire, on a, pour tout $\omega < 0$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \widehat{h}_\epsilon(\omega) = -1\,.$$

(2) La fonction signe est une fonction de module 1, ce qui implique que la multiplication par cette fonction définit une isométrie T de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_\omega, d\omega)$ dans lui-même. Si l'on définit, pour tout $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$,

$$H(\dot{f}) = \mathcal{F}^{-1}\Big[T(\mathcal{F}(\dot{f}))\Big]\,,$$

on définit l'action sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ d'un opérateur linéaire continu

$$H = \mathcal{F}^{-1} \circ T \circ \mathcal{F}\,.$$

La convolution d'un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ avec un élément $\dot{f} \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ est licite (d'après les inégalités de Young vues dans le cours de *Théorie de l'Intégration* (Théorème 4.2 de ce cours) et définit un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$. On remarque d'autre part que, pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$|\widehat{h}_\epsilon(\omega)| = \frac{2}{\pi}\Big| \int_{|\omega|\epsilon}^{|\omega|/\epsilon} \frac{\sin u}{u}\, du \Big| \leq C$$

où

$$C = \frac{2}{\pi} \times \sup_{0<x<y<+\infty} \Big| \int_x^y \frac{\sin u}{u}\, du \Big| < +\infty$$

puisque l'intégrale de $u \longmapsto \sin u/u$ sur $[0, +\infty[$ est semi-convergente (ce qui implique que les primitives de cette fonction sur $[0, +\infty[$ sont bornées en valeur absolue). Si $\dot{f}$ était dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$, on aurait, d'après la Proposition 2.8 du cours,

$$\widehat{\dot{h}_\epsilon * \dot{f}} = \widehat{h}_\epsilon \times \mathcal{F}(\dot{f})\ ;$$

puisque $|\widehat{h}_\epsilon|$ est bornée par C, on a aussi, en utilisant la densité de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}_t, dt)$ et la continuité de $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{F}(\dot{h}_\epsilon * \dot{f}) = \widehat{h}_\epsilon \times (\dot{f})\,.$$

Grâce à la formule de Plancherel (formule (2.43) du cours), il vient donc

$$\begin{aligned} & \|\dot{h}_\epsilon * \dot{f} - H(\dot{f})\|_2^2 \\ = \quad & \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{h}_\epsilon(\omega) - \mathrm{signe}(\omega)|^2 |\mathcal{F}[\dot{f}](\omega)|^2 \, d\omega \,. \end{aligned}$$

C'est donc le théorème de convergence dominée (qui s'applique ici, au second membre de cette égalité, car la majoration de $|\widehat{h}_\epsilon|$ par C est uniforme en ϵ) qui implique

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \|\dot{h}_\epsilon * \dot{f} - H(\dot{f})\|_2^2 = 0 \,.$$