Université Bordeaux I **Analyse Complexe**
Master I de Mathématiques 2012-2013

TD 3

• **Exercice 1.** Soit $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

(1) Montrer qu'en coordonnées polaires ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) les conditions de Cauchy–Rieman s'expriment par
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \ (\ r \neq 0\ )\ .$$
(2) Est-ce que $f(z) = z + \overline{z}$ est holomorphe ?
(3) Trouver toutes les fonctions réelles $\varphi \in C^1(]0,+\infty[)$ telles que la fonction $f(re^{i\theta}) = e^{\varphi(r)+i\theta}$ est holomorphes pour $re^{i\theta} \neq 0$.

• **Exercice 2.** On pose
$$\begin{cases} u(x,y) = & e^x(x\cos y - y\sin y) \\ v(x,y) = & e^x(y\cos y + x\sin y). \end{cases}$$
Montrer que $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe pour toute valeur de z. Exprimer f à l'aide de la seule variable z et Calculer $f'(z)$.

• **Exercice 3.** Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes ?
$f(x,y) = x - iy$, $g(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $h(x,y) = \exp(x - iy)$.

• **Exercice 4.** Soit f est une fonction holomorphe non contante sur $D(0,1)$. Montrer que $z \to \overline{f(z)}$ n'est pas holomorphes et que $z \to \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe.

• **Exercice 5.** On définit la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ par
$$\exp(z) = \sum \frac{z^n}{n!}.$$
(1) Rappeler pourquoi exp est bien définie sur $\mathbb{C}$ et vérifie $\overline{\exp z} = \exp \overline{z}$.
(2) Montrer que $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.
(3) En déduire que $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}\, z}$ et $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$.
(4) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0}$.
(5) En déduire que la fonction exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
(6) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\exp(iy) = \cos y + i\sin y$.
(7) On définit les fonctions suivantes
$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))\ ,\ \sin z = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$$
$$\mathrm{ch}\ z = \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z))\ ,\ \mathrm{sh}\ z = \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z))$$
Démontrer que ces quatres fonctions sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.

(8) Calculer $|\cos z|^2$, $|\sin z|^2$, $|\mathrm{ch}\ z|^2$ et $|\ \mathrm{sh}\ z|^2$.
(9) En déduire que l'ensemble des zéros des solutions de l'equation $\sin \pi z = 0$ est $\mathbb{Z}$.

• **Exercice 6.**
Déterminer une fonction holomorphe ayant $P(x,y) = x + \dfrac{x}{x^2+y^2}$ comme partie réelle.

• **Exercice 7.** Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ montrer que les quatres assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est constante.
(2) Re (f) est constante.
(3) Im (f) est constante.
(4) $|f|$ est constante.

• **Exercice 8.** Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $D \subset \mathbb{C}$. Vérifier que

$$\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{Re} f(z)) = \frac{f'(z)}{2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(|f(z)|) = \frac{f'(z)|f(z)|}{2f(z)}, \qquad f(z) \neq 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(|f(z)|^2) = |f'(z)|^2.$$

(On utilisera le fait que si f est holomorphe, alors f' est holomorphe).

• **Exercice 9.** Soit f est une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ non constante. Montrer que $z \to \overline{f(z)}$ n'est pas holomorphes et que $z \to \overline{f(\bar{z})}$ est holomorphe.

• **Exercice 10.** Soit f, g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(1) Montrer que si $f + \overline{g}$ est réelle, alors $f = g + C$, pour $C \in \mathbb{R}$.
(2) Montrer que si $f\overline{g}$ est réelle, avec g non nulle, alors $f = Cg$ pour $C \in \mathbb{R}$.
(3) Montrer que si $g \circ f$ est constante, alors f ou g est constante.
(4) Montrer que si $|f|^2 + |g|^2$ est constante, alors f et g sont constantes.

• **Exercice 11.** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Trouver toutes les fonctions holomorphes $f\ :\ \Omega \to \Omega$ telles que $f(f(z)) = f(z)$, pour tout $z \in \Omega$

• **Exercice 12.** Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que f est de classe C^2 sur Ω. Montrer que u et v sont des fonctions harmoniques sur Ω. C'est–à–dire solutions de l'equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Montrer que si la fonction réele u est harmonique sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, la fonction f donnée par

$$f(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

est holomorphe sur Ω.

• **Exercice 13.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\phi, \psi \in C([a,b], \mathbb{C})$. On pose $F(z) = \int_a^b \frac{\phi(t)}{\psi(t) - z} dt$. Montrer que $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C} \backslash \psi([a,b]))$ et

$$F^{'}(z) = \int_a^b \frac{\phi(t)}{(\psi(t) - z)^2} dt.$$

• **Exercice 14.**

(1) Soit $f : D(0,2) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit $z \in D(0,1)$.
(2) Montrer que $\left| \frac{1 - \bar{z}e^{it}}{e^{it} - z} \right| = 1$.
(3) Calculer $\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,1)} f(\zeta) \frac{1 - \bar{z}\zeta}{\zeta - z} d\zeta$.
(4) En déduire que $(1 - |z|^2)|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt$.

• **Exercice 15.**

(1) Calculer $\int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z^k}$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
(2) En déduire que $\int_{\partial D(0,1)} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz = 2i\pi \binom{2n}{n}$.
(3) Majorer $\left| \int_{\partial D(0,1)} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz \right|$.
(4) En déduire que $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.
(5) On pose $u_n(z) = \frac{(1+z)^{2n}}{5^n z^{n+1}}$. Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n(e^{it})$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.
(6) Montrer que $\sum_{n \geq 0} \int_{\partial D(0,1)} u_n(z) dz = -5 \int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1}$.
(7) Calculer $\int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1}$.

(8) Montrer que la série de terme général $5^{-n}\binom{2n}{n}$ converge et calculer

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\binom{2n}{n}}{5^n}.$$

• **Exercice 16.** Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{\partial D(0,1)}\frac{\cos z}{z}dz \quad \text{et} \quad \int_{\partial D(0,1)}\frac{\cos z^2}{z}dz$$

• **Exercice 17.** Calculer

$$\int_{\partial D(0,1)}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{2\pi}\cos^n t dt.$$

• **Exercice 18.** Montrer

$$\binom{n}{k}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(0,1)}\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}dz.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{n\geq 0}7^{-n}\binom{2n}{n}$$

• **Exercice 19.**
Soit $U\subset\mathbb{C}$ un ouvert tel que $\overline{D(0,1)}\subset U$ et soit Soit $f\in \mathrm{Hol}(U)$. Calculer

$$\int_{\partial D(0,1)}(2+z+\frac{1}{z})\frac{f(z)}{z}dz \quad \text{et} \quad \int_{\partial D(0,1)}(2-z-\frac{1}{z})\frac{f(z)}{z}dz.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{2\pi}f(e^{it})\cos^2(t/2)dt \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi}f(e^{it})\sin^2(t/2)dt.$$

• **Exercice 20.** Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{|z|=1}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)dz, \quad \int_{|z|=2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1-i}\right)dz,$$

$$\int_{|z|=1}\frac{z^2+3z+7}{z-w}dz, \quad \int_{|z|=1}\frac{z^2+3z+7}{(z-w)^2}dz, \quad |w|\neq 1,$$

$$\int_{|z+i|=3}\sin z\frac{dz}{z+i}, \quad \int_{|z|=4}\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}, \quad \int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^n(z-3)}.$$

• **Exercice 21.**

Déterminer un chemin fermé γ tel que l'image de γ soit l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Calculer

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

• **Exercice 22.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ telle que $|\lambda| \neq 1$, on pose

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)d\theta}{\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1}$$

vérifier que I est bien définie. Soit maintenant la fonction $f(z) = \dfrac{z^n}{(z-\lambda)(z-\lambda^{-1})}$. Calculer

$$\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)d\zeta.$$

Trouver la valeur de I en distinguant les deux cas $|\lambda| > 1$ et $|\lambda| < 1$.

• **Exercice 23.** Soit $R > 0$, f holomorphe sur $D(0,R) \setminus \mathbb{R}$ et continue sur $D(0,R)$. Nous allons montrer que f vérifie la formule de Cauchy et donc holomorphe sur $D(0,R)$.

Soit $z \in D(0,R)$ tel que $\mathrm{Im} z > 0$. Soientt $r \in]|z|, R[$, $\epsilon > 0$ et $\alpha = \alpha_\epsilon(r)$ tel que $\sin\alpha = \epsilon/r$. On pose $\gamma_\epsilon^+ = [-r\cos\alpha, r\cos\alpha] \cup \{re^{it} : t \in [\alpha, \pi-\alpha]\}$. Soit γ_ϵ^- l'image symétrique de γ_ϵ^+ par l'axe réelle

(1) Calculer
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_\epsilon^\pm} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

(2) Montrer que les intégrales suivantes tend vers 0 quand $\epsilon \to 0$
$$\int_0^\alpha \frac{|f(re^{it})|rdt}{r-|z|}, \quad \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \frac{|f(re^{it})|rdt}{r-|z|}, \quad \int_{\pm r}^{\pm r\cos\alpha} \frac{|f(t+i\epsilon)|dt}{|t+i\epsilon|-|z|}.$$

(3) Montrer, en utilisant la continuité uniforme que
$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-r\cos\alpha}^{r\cos\alpha}\left|\frac{f(t+i\epsilon)}{t+i\epsilon-z} - \frac{f(t)}{t-z}\right| = 0.$$

(4) Montrer que
$$\lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_\epsilon^+(r)} \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_{\gamma_0^+(r)} \frac{f(w)}{w-z}dw\right| = 0.$$

(5) En déduire que
$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

• **Exercice 24.** Soit D un ouvert connexe et f une fonction holomorphe dans D non constante

(1) Montrer que le nombre de zéros de f dans $D(a,r) \subset D$ est
$$\mathrm{Ind}_{f(\partial D(a,r))}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Indication. Ecrire
$$f(z) = \prod_{i=1}^n (z-a_i)^{m_i} h(z), \qquad \text{avec } h \text{ sans zéros}$$
.

(2) Montrer que si f est injective alors
$$f'(z) \neq 0, \qquad \forall z \in D.$$

Indication. Supposer que f est injective et il existe $a \in D$ telle que $f'(a) = 0$. Considérer ensuite la fonction $g(z) = f(z) - f(a)$ et utiliser (1).

(3) Monter que f est une application ouverte

• **Exercice 25.** Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω contenant 0.

Montrer que

(1) Si $f(1/n) = 1/(n+1)$ pour n assez grand alors $f(z) = z/(1+z)$ sur Ω.
(2) Si $f(1/n) = f(1/(2n))$ pour n assez grand, alors f est constante sur Ω.
(3) $f(1/n) = 2^{-n}$ pour n assez grand est impossible.

• **Exercice 26.** Fonctions Logarithme complexe.
Soit $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mid \text{Im } z < \pi\}$ et $D_2 = \mathbb{C}\backslash] - \infty, 0[$.

(1) Démontrer que exp est une bijection de D_1 vers D_2. On notera β la bijection réciproque.
(2) Soit $u = re^{it}$ avec $r > 0, t \in] - \pi, \pi[$. Exprimer $\beta(u)$ en fonction de r et t. Déterminer β sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $\beta(i)$ et $\beta(-1+i)$.
(3) Montrer que β est continue sur D_2.
(4) Calculer pour $u_0 \in D_2$ $\lim\limits_{u \to u_0} \dfrac{\beta(u) - \beta(u_0)}{u - u_0}$.
(5) Soit $a \in] - \infty, 0[$. Calculer $\lim\limits_{u \to a} \beta(u)$. Peut–on prolonger β continûment sur un ouvert contenant D_2.

• **Exercice 27.** Montrer que les racines dans le disque $D(0,1)$ du polynôme $P(z) = z^{111} + 3z^{50} + 1$ sont simples et qu'il y en a excatement 50.

Indication. Considérer le polynôme $Q(z) = P(z) - 1$ et montrer que $|P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$ pour $|z| = 1$.

• **Exercice 28.** Soit f une fonction continue sur $\overline{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z \geq 0\}$ et holomorphe sur $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$. On suppose que

$$\sup_{z \in \overline{H}} |f(z)| \leq 10^{10} \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq 1.$$

Montrer que

$$\sup_{z \in \overline{H}} |f(z)| \leq 1.$$

Indication. Considérer la fonction $g_\epsilon(z) = \dfrac{f(z)}{\epsilon z + i}$ pour $\epsilon > 0$.

• **Exercice 29.** Soit f une fonction entière telle que il existe deux constantes positifs A et B et un entier $n \in \mathbb{N}$ telles que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que f est un polynôme de degré au plus n.

• **Exercice 30.** Soit f une fonction entière. Supposons que pour deux réels positifs A et B on a

$$|f(z)| \leq A + B|z|^{3/2}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Que peut-on dire sur f ?

• **Exercice 31.** Soit f une fonction non constante continue sur $\overline{\mathbb{C}_+} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z \geq 0\}$ et holomorphe sur $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$. On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ et $M_\epsilon > 0$ tel que

$$\sup_{z \in \overline{\mathbb{C}_+}} |f(z)| \leq M_\epsilon e^{\epsilon \mathrm{Re} z} \quad \text{et} \quad \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(iy)| \leq 1.$$

Montrer que

$$\sup_{z \in \mathbb{C}_+} |f(z)| < 1.$$

Indication. Pour $\delta > 0$, $A > 0$ et $R > 0$, considérer la fonction

$$g_\delta(z) = \frac{A}{z + A} f(z) e^{-\delta z}, \qquad z \in \overline{D(0, R)} \cap \overline{\mathbb{C}_+},$$

on vérifie que $|g_\delta| \leq 1$ sur $i\mathbb{R}$ et

$$\lim_{R \to +\infty} \max_{\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |g_\delta(Re^{i\theta})| = 0.$$

• **Exercice 32.** Soit A et B deux fonctions holomorphes dans un ouvert contenant $\overline{D(0,1)}$. On suppose que
(i) A a au moins un zéro dans $D(0,1)$
(ii) B est sans zéro dans $D(0,1)$
(iii) $|A(e^{it})| = |B(e^{it})|$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer que $|A| < |B|$ sur $D(0,1)$.

• **Exercice 33.** Lemme de Schwarz.
Soit $f : D(0,1) \to D(0,1)$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$.
1. Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.
2. Montrer que si $\exists c \in D(0,1) \backslash \{0\}$ tel que $|f(c)| = |c|$ ou $|f'(0)| = 1$ alors il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $f(z) = e^{i\theta} z$.

• **Exercice 34.** Le produit infini ci-dessous est-il convergent

$$\prod_{n \geq 1} \Big(1 + \frac{\sin^2 z}{n \log n}\Big)$$

• **Exercice 35.** Déterminer le développement en série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

dans les régions suivantes $1 < |z| < 2$, $|z| < 1$, $|z| > 2$ et $0 < |z - 1| < 1$. Donner le développement de Laurent en ces pôles ainsi que lordre et la partie principale.

• **Exercice 36.** Soit $n \in \mathbb{N}$, determiner la nature du point singulier 1 de la fonction

$$f_n(z) = (z-1)^{-n} \exp\Big(\frac{1}{z-1}\Big).$$

• **Exercice 35.** Calculer les intégrales

$$\int_{|z-1/2|=1} \frac{e^z}{z^3 - z} dz, \qquad \int_{|z|=1} \frac{z+a}{z^n(z+b)} dz, \quad |b| > 1.$$

• **Exercice 37.** Soient $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$, on pose $S_{\theta_1,\theta_2} = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$. Soit f une fonction continue définie sur le secteur S_{θ_1,θ_2} fermé de centre à l'origine. On note par S_R l'arc de rayon R inclus dans S_{θ_1,θ_2}. Montrer que

1. si $\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$, alors $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)dz = 0$.
2. si $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$, alors $\lim_{R\to 0} \int_{S_R} f(z)dz = 0$.
3. Si $\lambda > 0$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ et $\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$, alors $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)e^{i\lambda z}dz = 0$.

• **Exercice 37.** Etudier la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2+\cos t} dt, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+3\sin t}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx.$$