Université Bordeaux 1 Année 2012-2013

M1MI2011 Analyse 1

Feuille d'exercices n° 4 — Formules de Taylor

Exercice 1
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur I, et x_0 un point de I.

1. Rappeler l'énoncé des formules de Taylor-Young et Taylor-Lagrange pour la fonction f au point x_0 à l'ordre n, en indiquant soigneusement les hypothèses.
2. Qu'est-ce que la partie principale de la série de Taylor de f en x_0 à l'ordre n ?
3. Qu'appelle-t-on un développement limité de f en x_0 à l'ordre n ?

Exercice 2
Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^x$ au voisinage de 0.
2. $x \mapsto \ln x$ au voisinage de 1. En déduire $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-h}{h^2}$.
3. $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$ au voisinage de 2.
4. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ au voisinage de 0.

Exercice 3
Appliquer Taylor-Lagrange pour calculer la valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-4} près.

Exercice 4

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 en 0 pour la fonction $x \mapsto \sin x$.
2. Quelle est la valeur de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$.
3. Montrer que
$$\forall x \geq 0, \qquad x - x^3/6 \leq \sin(x) \leq x - x^3/6 + x^5/120$$
Que se passe-t-il lorsque x est négatif ?

Exercice 5
Montrer que
$$\forall x \geq 0, \qquad x - x^2/2 \leq \ln(1+x) \leq x$$
Que se passe-t-il lorsque x est négatif ?

Exercice 6
Calculer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(x^2) + \cos x$ à l'ordre 6 au voisinage de 0.
2. $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. On prolonge g à $\mathbb{R}$ tout entier en posant $g(0) = e$. Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.
3. $h(x) = e^{\sin x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.
4. $i(x) = (\cos x - 1)(\sinh x - x) - (\cosh x - 1)(\sin x - x)$ à l'ordre 7 au voisinage de 0. En déduire la valeur $i^{(7)}(0)$.

5. $j(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x+2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
6. $k(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 1. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative au point $(1,0)$ et déterminer la position de la courbe par rapport à la tangente.
7. $l(x) = (\frac{\sin x}{x})^2$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.
8. $r(x) = (1-2x^2)e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.
9. $s(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
10. $t(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x+1}$ à l'ordre n au voisinage de 0.

Exercice 7
Soit $n \geq 1$ un entier naturel. En utilisant une formule de Taylor, montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Exercice 8
Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{\ln(1+x)}$$

est dérivable à droite en 0, et donner la valeur de sa dérivée.

Exercice 9
Calculer les développements limités en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x-x^2}$, avec $n = 4$.
2. $f(x) = (\sin(x^3))^{\frac{1}{3}}$, $n = 13$.
3. $f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$, avec $n = 2$.
4. $f(x) = \ln(1 + x\sin(x))$, et $n = 4$.
5. $f(x) = e^{\cos(x)}$, $n = 4$.
6. $f(x) = (1+\cos(x))^{1/3}$, $n = 4$.
7. $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$, $n = 4$.

Exercice 10
Calculer le développement limité en $\pi/4$ à l'ordre 4 de $\sqrt{\tan(x)}$.

Exercice 11
1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre 3 pour l'exponentielle.
2. Donner un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que, pour tout x de $[0,1]$, $|e^x - P(x)| \leq (e-1)/6$.
3. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre n pour l'exponentielle, et en déduire l'existence d'un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n vérifiant :

$$\forall x \in [0,1], |e^x - P_n(x)| \leq (e-1)/n!$$

Exercice 12
1. Soit n un entier. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral au voisinage de 0 à l'ordre n pour la fonction $\cos(x)$.

2. En déduire que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/(2k)!$ a une limite quand n tend vers l'infini, et calculer cette limite.

Exercice 13

1. Trouver un équivalent polynômial au voisinage de $x = 1$ de la fonction
$$f(x) = 2^{x-1} - x^{\ln 2}.$$
2. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x}{\ln(1+x)} + \frac{a}{x} + b \right) = 0 \ ,$$
et donner un équivalent de l'expression trouvée quand $x \to 0$.
3. Donner le développement asymptotique à deux termes de la suite
$$u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}.$$
En déduire $\lim_{n\to\infty} nu_n$.

Exercice 14

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1 + \sin(x)\mathrm{sh}(x)}$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $\arcsin(\ln^2(x))$.
3. Déterminer
$$\lim_{x\to 1/2} \Big((2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x) \Big) .$$

Exercice 15

On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (e^x - 1)/x$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour tout x.
2. Montrer que f est en fait deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner $f''(0)$.
3. Écrire la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour f. Préciser la position de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en 0.
4. Déterminer les variations de $\phi := xe^x - e^x + 1$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'intervalle image J de la fonction f, et montrer que la fonction réciproque g de f est deux fois dérivable sur J.

Exercice 16

Calculer les limites des fonctions suivantes quand $x \to 0$:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \cos(x)\right) \qquad f_2(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\sinh^2(x)} \qquad f_4(x) = \left(\frac{e^{ax} + e^{bx}}{2}\right)^{1/x} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 17

Rechercher les asymptotes aux graphes des fonctions suivantes :

$$1)\ f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}} \qquad 2)\ g(x) = [(x^2 - 2)(x + 3)]^{1/3}$$