SM 411 – Devoir Surveillé 2, Vendredi 9 Avril

Durée: 1 heure 20 mn, documents non autorisés

Exercice 1. On lance simultanément deux dés non pipés, un rouge et un blanc ; les deux dés se comportent de manière indépendante .

a. Quelle est la probabilité d'obtenir un double six, sachant que le dé blanc a donné un six ?

b. On considère les trois événements :

$$\begin{aligned} A: &= \{le\ dé\ rouge\ donne\ un\ résultat\ pair\} \\ B: &= \{le\ dé\ blanc\ donne\ un\ résultat\ impair\} \\ C: &= \{les\ deux\ dés\ donnent\ des\ résultats\ de\ même\ parité\} \end{aligned}$$

Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A\cap B)$, $P(B\cap C)$, $P(C\cap A)$, $P(A\cap B\cap C)$.

c. Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants, mais que A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.

d. On jette les deux dés ensemble n fois de suite, les n jets étant indépendants ; que vaut (en fonction de k et de n) la probabilité que, sur exactement k jets parmi les n, les deux dés affichent le même chiffre.

Exercice 2. Un comptable fait en moyenne trois erreurs sur 1000 additions. Si l'on vérifie ces additions en faisant la preuve par 9 et que l'on corrige les erreurs découvertes, il peut en rester encore (ceci se produit si et seulement si le résultat erroné diffère du total exact suivant un multiple de 9). On admettra que, si le total est faux, l'erreur se trouve, avec des probabilités égales, congrue à $0, 1, ..., 8$ modulo 9.

On note A et B les deux événements :

$$\begin{aligned} A &:= \{le\ total\ est\ faux\} \\ B &:= \{l'erreur\ peut\ être\ décelée\ par\ la\ preuve\ par\ 9\} \end{aligned}$$

Quelle probabilité a une addition de rester inexacte après le processus de vérification (on exprimera cette probabilité comme une probabilité conditionnelle) ?

Exercice 3. On suppose que les nombres de photons N_X et N_Y émis pendant un laps de temps fixé par deux sources lumineuses indépendantes X et Y obéissent à des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

a. Rappeler les valeurs des nombres $P(N_X = k)$ et $P(N_Y = k)$ si $k \in \mathbb{N}$.

b. Montrer (en décomposant convenablement l'évènement) que pour tout entier n

$$P(N_X + N_Y = n) = \exp(-(\lambda+\mu))\,\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\,.$$

Quelle est donc la loi à laquelle obéit la variable aléatoire $N_X + N_Y$?