

Exercice 1 (séries entières, intégrales impropres)

a. Montrer qu'au voisinage de $\pi/2$ (à gauche), on a

$$-\log(\cos t) \sim -\log(\pi/2 - t).$$

En déduire que l'intégrale impropre

$$-\int_0^{\pi/2} \log(\cos t) dt$$

est convergente.

Au voisinage de $x = \pi/2$, on a, avec les notations classiques de Landau (voir le cours de MAT202)

$$\cos(t) = (\pi/2 - t) + o(\pi/2 - t) = (\pi/2 - t)(1 + o(1))$$

(développement de Taylor-Young à l'ordre 1, valable car la fonction \cos est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $-\sin$, donc de nombre dérivé $-\sin(\pi/2) = -1$ en $\pi/2$). On a donc

$$\frac{1}{\cos t} = \frac{1}{\pi/2 - t} \times (1 + o(1));$$

en prenant le logarithme des deux membres et en remarquant que

$$\lim_{t \rightarrow \pi/2^-} (-\log(\pi/2 - t)) = +\infty,$$

on a, lorsque t tend vers $\pi/2$ à gauche

$$-\log(\cos t) \sim -\log(\pi/2 - t).$$

Pour montrer la convergence de l'intégrale impropre (il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive et le seul problème est en $\pi/2$, extrémité droite de l'intervalle, puisque la fonction $-\log(\cos)$ est continue sur $[0, \pi/2[$), on peut appliquer la règle des équivalents. L'intégrabilité de la fonction équivaut à la convergence de l'intégrale

$$-\int_0^{\pi/2} \log(\pi/2 - t) dt$$

(c'est aussi l'intégrale d'une fonction positive au moins sur sur $[\pi/2-1, \pi/2[$). Par changement de variable, on est ramené à prouver la convergence de

$$\int_0^1 (-\log u) du ;$$

cette intégrale est convergente car

$$-\log u \leq \frac{C}{\sqrt{u}} du$$

au voisinage de 0_+ : c'est donc le critère de convergence des intégrales du type "de Riemann" qui s'applique ici (u^{-a} est intégrable sur $]0, \epsilon]$ si $a < 1$, en particulier si $a = 1/2$), ce qui implique *via* le critère de comparaison du cours la convergence de l'intégrale voulue.

b. Pour $x \in [0, \pi/2[$, on pose

$$\varphi(x) := - \int_0^x \log(\cos t) dt .$$

Vérifier que l'on a pour tout $x \in [0, \pi/2[$, les relations

$$\varphi(x) = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \log(\sin u) du = 2\varphi(\pi/4 + x/2) - 2\varphi(\pi/4 - x/2) - x \log 2$$

(on utilisera, pour obtenir la seconde égalité, la relation exprimant le sinus du double d'un angle en fonction des lignes trigonométriques de cet angle). En déduire la formule (établie par L. Euler) exprimant l'intégrale (dite de Lobatchevski) :

$$- \int_0^{\pi/2} \log(\cos t) dt = \frac{\pi \log 2}{2} .$$

En faisant le changement de variables

$$t = \pi/2 - u$$

(bijectif entre $[0, \pi/2[$ et $]0, \pi/2[$), l'intégrale devient

$$- \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \log(\cos(\pi/2 - u)) (-du) = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \log(\sin u) du .$$

En utilisant la formule donnant le sinus de l'angle double, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \log(\sin u) du = \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \log 2 du \\
 & \quad + \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \log(\sin(u/2)) du + \int_{\pi/2}^{\pi/2-x} \log(\cos(u/2)) du \\
 = & -x \log 2 + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/4-x/2} \log(\sin v) dv + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/4-x/2} \log(\cos v) dv \\
 = & -x \log 2 + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/4+x/2} \log(\sin(\pi/4 - w)) (-dw) \\
 & \quad + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/4-x/2} \log(\cos v) dv \\
 = & -x \log 2 - 2 \int_{\pi/4}^{\pi/4+x/2} \log(\cos w) dw + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/4-x/2} \log(\cos v) dv \\
 = & -x \log 2 - 2 \int_{\pi/4-x/2}^{\pi/4+x/2} \log v dv \\
 = & -x \log 2 + 2(\varphi(\pi/4 + x/2) - \varphi(\pi/4 - x/2))
 \end{aligned}$$

en utilisant plusieurs fois la formule de changement de variables dans les intégrales (ici propres car $x < \pi/2$), puis pour finir la relation de Chasles. Cela donne bien la formule voulue.

Si l'on fait tendre dans cette formule x vers $\pi/2$ par valeurs inférieures, on obtient

$$- \int_0^{\pi/2} \log(\cos u) du = -\frac{\pi \log 2}{2} - 2 \int_0^{\pi/2} \log(\cos u) du + 2 \times 0.$$

On obtient le résultat voulu (formule de Lobatchevski) en faisant passer dans le membre de gauche le terme $-\pi \log 2/2$.

Exercice 2 (suites et séries de fonctions)

On admet dans cet exercice la formule

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(elle sera prouvée dans l'exercice 3, question (c)).

a. Montrer que l'on définit bien une fonction continue F de \mathbb{R} dans $]0, +\infty[$ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{n^4 + x^2} \leq \frac{1}{n^4}.$$

Comme la série de Riemann $[1/n^4]_{n \geq 1}$ est convergente, la série de fonctions

$$\left[\frac{1}{n^4 + x^2} \right]_{n \geq 1}$$

est normalement convergente sur \mathbb{R} . S'agissant d'une série de fonctions toutes continues sur \mathbb{R} , on a automatiquement (corollaire 3.1 du cours) continuité sur \mathbb{R} de la somme F .

b. Vérifier, pour tout $X > 0$, la relation

$$\int_0^X F(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Arctg}(X/n^2).$$

(on prendra bien garde au fait que se pose ici un problème d'interversion de limite que l'on traitera en utilisant, après l'avoir rappelé, un résultat du cours).

Puisque la série de fonctions

$$\left[\frac{1}{n^4 + x^2} \right]_{n \geq 1}$$

converge normalement sur \mathbb{R} , elle y converge uniformément, donc *a fortiori* converge uniformément sur tout segment $[0, X]$. On peut utiliser le théorème 3.7 du cours, puis (dans un second temps), la proposition 2.3 de changement de variables dans les intégrales (le changement de variable étant $x = n^2 u$) pour affirmer que

$$\begin{aligned} \int_0^X F(x) dx &= \int_0^X \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^X \frac{dx}{n^4 + x^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \int_0^{X/n^2} \frac{1}{1 + u^2} n^2 du \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{X/n^2} \frac{1}{1 + u^2} du \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Arctg}(X/n^2). \end{aligned}$$

c. A partir de la formule établie au (b), montrer que

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X F(x) dx = \frac{\pi^3}{12}$$

(même remarque que pour la question précédente).

On a, pour tout $X \in \mathbb{R}$, pour tout entier $n \geq 1$, la majoration

$$\frac{1}{n^2} |\operatorname{Arctg}(X/n^2)| \leq \frac{\pi}{2n^2}.$$

En présence d'une telle clause de domination, on peut appliquer le théorème 3.6 du cours ; si $(X_k)_k$ est une suite de nombres réels tendant vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \operatorname{Arctg}(X_k/n^2) \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctg}(X_k/n^2) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12}. \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai quelque soit la suite $(X_k)_k$ tendant vers $+\infty$, on a bien le résultat voulu.

Exercice 3 (séries numériques et séries de Fourier)

a. On considère la fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} définie par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], f(t) = |t|.$$

On note $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ la liste des coefficients de Fourier complexes de la fonction f ; vérifier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la formule

$$c_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \cos(nt) dt ;$$

en déduire le calcul de $c_n(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Par définition des coefficients de Fourier complexes, on a

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-t) e^{-int} dt + \int_0^{\pi} t e^{-int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t (e^{int} + e^{-int}) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt. \end{aligned}$$

Si $n = 0$, on trouve ainsi

$$c_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{\pi}{2}.$$

Si $n \neq 0$, on effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \left[t \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n} dt = \frac{\left[\cos(nt) \right]_0^\pi}{n^2} \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{n^2}. \end{aligned}$$

b. Montrer que la N -ème somme partielle de Fourier de f s'exprime sous la forme

$$S_N[f](t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{\{p \geq 0; 2p+1 \leq N\}} a_p \cos((2p+1)t),$$

où les nombres a_p sont des nombres réels que l'on calculera.

Comme $c_n(f) = c_{-n}(f)$ pour tout entier n (parité de la fonction f), on a

$$\begin{aligned} S_N[f](t) &:= \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{int} = c_0(f) + 2 \sum_{n=1}^N c_n(f) \cos(nt) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(nt) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\{p \geq 0; 2p+1 \leq N\}} \frac{\cos((2p+1)t)}{(2p+1)^2}. \end{aligned}$$

c. Montrer que la série de fonctions

$$\left[\frac{\cos((2p+1)t)}{(2p+1)^2} \right]_{p \geq 0}$$

converge normalement sur \mathbb{R} et calculer sa somme à partir du résultat établi au **(b)**, couplé avec un théorème du cours que l'on énoncera et dont on expliquera pourquoi ici il s'applique. En déduire les valeurs des quantités

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

après avoir justifié pourquoi ces deux dernières expressions sont nécessairement finies (en ce qui concerne la seconde série, vous pouvez vérifier votre résultat en relisant l'en-tête de l'exercice 2).

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $p \geq 0$,

$$\left| \frac{\cos((2p+1)t)}{(2p+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Comme la série de Riemann $[1/n^2]_{n \geq 1}$ converge, il en est de même de la série $[1/(2p+1)^2]_{p \geq 0}$. La série de fonctions

$$\left[\frac{\cos((2p+1)t)}{(2p+1)^2} \right]_{p \geq 0}$$

converge donc bien normalement sur \mathbb{R} .

La fonction f est continue sur \mathbb{R} et admet en tout point de \mathbb{R} une dérivée à gauche et à droite (en fait, elle est même dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, les seuls points "anguleux" du graphe étant les points au dessus des entiers relatifs). D'après le théorème de Dirichlet (théorème 4.8 du cours), on a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = |t| = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N[f](t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos((2p+1)t)}{(2p+1)^2}.$$

On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos((2p+1)t)}{(2p+1)^2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - |t| \right).$$

En particulier, si $t = 0$:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(la convergence de la série résulte, on l'a déjà relevé, du critère de Riemann et du principe de comparaison, car on ne retient de la série numérique convergente $[1/n^2]_{n \geq 1}$ que les termes d'indice impair). En séparant précisément dans la somme de la série numérique convergente $[1/n^2]_{n \geq 1}$ les termes d'indice pair des termes d'indice impair,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

On a donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

d. Pourquoi la série numérique $[1/(2p+1)^4]_{p \geq 0}$ est-elle convergente ? En utilisant le principe de confrontation série/intégrale, donner un équivalent simple (en fonction de n) du reste r_n de cette série.

C'est encore le critère de Riemann qui assure la convergence de la série numérique $[1/n^4]_{n \geq 1}$, donc, d'après le principe de comparaison pour des séries à termes positifs, celle de la série numérique $[1/(2p+1)^4]_{p \geq 1}$.

Comme la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{(2t+1)^4}$$

est décroissante sur $[0, +\infty[$, le principe de confrontation série/intégrale (voir la proposition 1.6 du cours) s'applique et on a l'encadrement du reste de la série :

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{dt}{(2t+1)^4} \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \leq \int_n^{\infty} \frac{dt}{(2t+1)^4}.$$

Comme

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{(2t+1)^4} = \frac{1}{6(2x+1)^3},$$

on a

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \sim \frac{1}{6(2n+1)^3} \sim \frac{1}{48n^3}.$$

e. En utilisant le résultat établi au **(a)** ainsi qu'un théorème du cours que l'on énoncera, calculer la somme de la série numérique $[1/(2p+1)^4]_{p \geq 0}$. En déduire la valeur de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$$

(on séparera dans cette somme les termes d'indice pair et ceux d'indice impair).

Comme la fonction f est une fonction continue 2π -périodique, la formule de Plancherel (principe de conservation d'énergie *via* la prise de spectre) s'applique et on a

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |t|^2 dt &= \frac{2\pi^3}{3} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 dt \\ &= 2\pi \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{16}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} = 2\pi^3(1/3 - 1/4),$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

En séparant les termes d'indice pair des termes d'indice impair dans la série numérique $[1/n^4]_{n \geq 1}$ (convergente d'après le critère de Riemann), il vient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \\ &= \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{\pi^4}{96}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{15}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 4 (intégrales curvilignes)

a. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto (x(t), y(t))$ un chemin paramétré (de classe C^1) du plan complexe tel que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ et que le support de γ ne passe pas par l'origine ($(x(t), y(t)) \neq (0, 0)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$). On notera $z(t) := x(t) + iy(t)$ l'affixe du point $\gamma(t)$. Vérifier que, si $n \neq -1$,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{(z(t))^{n+1}}{n+1} \right] = (z(t))^n \times z'(t).$$

Sans faire aucun calcul (mais en utilisant uniquement la définition de l'intégrale curviligne), montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, on a

$$\int_{\gamma} (x + iy)^n (dx + idy) = \int_{\gamma} z^n dz = 0.$$

La formule

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{(z(t))^{n+1}}{n+1} \right] = (z(t))^n \times z'(t)$$

(pour $n \neq -1$) résulte de la règle de Leibniz ($z(t)^n$ est bien définie et dérivable pour tout $t \in [0, 2\pi]$ car le support du chemin ne passe pas par l'origine). Par définition de l'intégrale curviligne

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x+iy)^n (dx+idy) &= \int_0^{2\pi} (z(t))^n (x'(t)+iy'(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((z(t))^n) z'(t) dt = \left[\frac{(z(t))^{n+1}}{n+1} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

car $z(0) = z(2\pi)$ du fait que le chemin est un lacet.

b. Calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma_0} \frac{dx+idy}{x+iy} \quad \left(\text{notée en abrégé } \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} \right)$$

lorsque γ_0 est le chemin paramétré $\gamma_0 : t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \simeq e^{it}$. Quel est le support de ce chemin γ_0 ? Quelle est la surface A_0 du domaine D_0 que ce lacet γ_0 enferme ? Vérifier la relation

$$\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = 2iA_0.$$

On a (toujours par définition de l'intégrale curviligne)

$$\int_{\gamma_0} \frac{dx+idy}{x+iy} = \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{e^{it}} dt = 2i\pi.$$

Le support du chemin paramétré γ_0 est le cercle unité (de centre l'origine du plan complexe et de rayon 1). La surface du disque unité (enserré par ce cercle) vaut $A_0 = \pi$ et on a donc bien la relation

$$\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = 2i\pi = 2iA_0$$

voulue.

c. En écrivant (si $z = x+iy$ est un nombre complexe de module 1)

$$\frac{1}{z + \frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}}$$

et en utilisant un développement en série (de puissances de z) du second terme dans le produit ci-dessus (on écrira ce développement), montrer que

$$\int_{\gamma_0} \frac{dx+idy}{(x+iy) + \frac{(x+iy)^2}{2}} \quad \left(\text{notée en abrégé } \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z + \frac{1}{z^2}} \right) = 2i\pi.$$

Pour tout z de module strictement inférieur à 2, on a

$$\frac{1}{1+z/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z/2)^k,$$

la convergence de cette série étant normale (donc uniforme) sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon 2, donc en particulier sur le disque fermé $D(0,1)$ et *a fortiori* sur le cercle unité. Sur ce cercle, on peut donc écrire

$$\frac{1}{z + \frac{z^2}{2}} = \frac{1}{z} \times \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} z^{k-1}.$$

Comme la convergence de la série en jeu est uniforme sur le cercle unité (support du chemin sur lequel s'effectue l'intégrale curviligne), on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z + \frac{z^2}{2}} &= \int_{\gamma_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} z^{k-1} \right) dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \int_{\gamma_0} z^{k-1} dz \\ &= \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} \int_{\gamma_0} z^k dz \\ &= \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = 2i\pi \end{aligned}$$

puisque toutes les autres intégrales figurant dans la somme sont nulles d'après le **(a)**.

d. On suppose que $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ est toujours un lacet ($\gamma(0) = \gamma(2\pi)$) comme au **(a)** mais de plus que ce lacet n'a aucun point double (excepté bien sûr $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$). On admettra dans ce cas que le support de γ enferme un domaine borné D d'aire notée A . Vérifier alors (en utilisant un résultat du cours que l'on énoncera) la relation :

$$\left| \int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy) \right| = \left| \int_{\gamma} \bar{z} dz \right| = 2A.$$

Calculer (comme application) l'aire du domaine plan enserré par le lacet

$$t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it} + \frac{e^{2it}}{2}$$

après avoir vérifié (ou admis si vous ne parvenez pas à le montrer) que l'application $z \mapsto z + z^2/2$ était bien injective comme application du cercle unité $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ dans \mathbb{C} .

Si D est le domaine enserré par le lacet, on a, d'après la formule de Green-Riemann

$$\int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy) = \pm \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} [i(x - iy)] - \frac{\partial}{\partial y} [x - iy] \right) dx dy$$

(le signe est + si γ entoure D dans le sens trigonométrique, - s'il entoure D dans le sens des aiguilles d'une montre). En tout cas, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} (x - iy)(dx + idy) \right| &= \left| \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} [i(x - iy)] - \frac{\partial}{\partial y} [x - iy] \right) dx dy \right| \\ &= \left| 2i \iint_D dx dy \right| = 2A \end{aligned}$$

puisque l'intégrale de surface de la fonction 1 sur D vaut par définition l'aire A de D .

Si z_1 et z_2 sont deux points du cercle unité tels que

$$z_1 + z_1^2/2 = z_2 + z_2^2/2,$$

on a

$$z_1 - z_2 = (1/2)(z_2^2 - z_1^2) = -\frac{(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)}{2}.$$

Ceci implique soit $z_1 = z_2$, soit $z_1 + z_2 = -2$, ce qui n'est possible que si $z_1 = z_2 = -1$ (z_1 et $-z_2$ devant être diamétralement opposés sur le cercle unité pour que $|z_1 + z_2| = 2$). L'application $z \mapsto z + z^2/2$ est donc bien injective du cercle unité dans \mathbb{C} , ce qui prouve que le lacet

$$t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it} + \frac{e^{2it}}{2}$$

est bien un lacet simple. L'aire du domaine D enserré par ce lacet γ vaut

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \int_{\gamma} \bar{z} dz \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} \left(e^{-it} + \frac{e^{-2it}}{2} \right) \left(ie^{it} + ie^{2it} \right) dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} \left(e^{-it} + \frac{e^{-2it}}{2} \right) \left(ie^{it} + ie^{2it} \right) dt \right| = \frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$