MATHEMATIQUES DE BASE

Cours MIS101

2006-2007

Semestre d’Automne

LES REFERENCES DU COURS

Notes de cours 2006-2007 disponibles (au fil des semaines) sur le site :

http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursmismi.pdf

Notes de cours 2005-2006 sur le site :

http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/coursmismi0506.pdf

Autres documents sur le site :

http://www.math.u-bordeaux1.fr/~yger/notes_de_cours.html

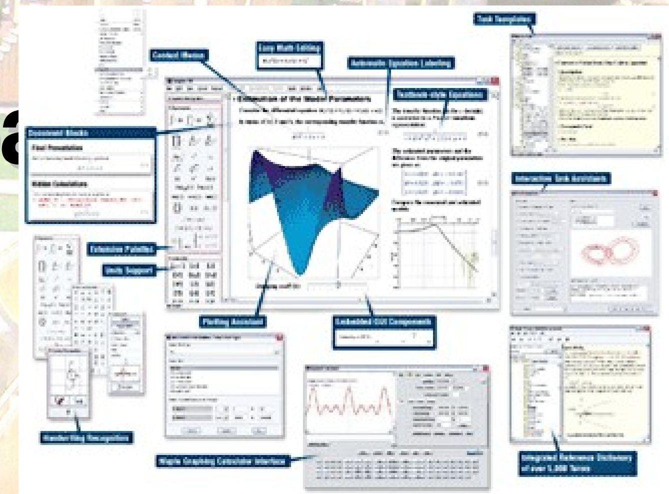
Support de cours (à lire à tête reposée …) pour aller plus loin !

MATHEMATIQUES DE BASE, version Octobre 2005, ouvrage collectif

disponible au service des polycopiés

Des annales 2004/2005 (DS – Textes d'examen + corrigés)
et 2005-2006 (Textes d'examen + corrigés) sont aussi consultables en ligne

Et encore, pour ceux que pa
l’histoire
des idées, des concepts
et de leurs inventeurs …



http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history

On utilisera aussi pour l’illustration du cours des logiciels de calcul formel (MAPLE 10, Mathematica 5) ou de calcul scientifique (MATLAB 7 , scilab 3)

MAPLE 10 en libre service à l’espace alpha !

Quelques postes équipés du logiciel MATLAB !

MATLAB 7.1.lnk

Pourquoi les mathématiques ?

http://smf.emath.fr/Publications/ExplosionDesMathematiques/smf-smai_explo-maths.pdf

Pour entrevoir quelques exemples illustrant le rôle essentiel des mathématiques là où on ne le soupçonne pas toujours !

LE PLAN DU COURS : TROIS CHAPITRES

I. Bases de logique*, théorie des ensembles

II. Nombres entiers, rationnels, réels et complexes ; suites de réels

III. Fonctions numériques et modélisation (intégration,équations différentielles,…)

(*) traitées et illustrées en méthodologie mais rappelées ici

DS 1 Samedi 21 Octobre (10h30-11h50)

Programme : logique, ensembles, nombres (naturels, rationnels, réels)

DS 2 Samedi 18 Novembre (10h30-11h50)

Programme : limites (suites et fonctions), continuité, dérivabilité, fonctions réciproques, fonctions usuelles.

+ trois DM

Distribués semaines 40 , 43, 48

I. Bases de logique et théorie des ensembles

- Opérations logiques (fait aussi en méthodologie)
- Ensembles et parties d'un ensemble ; quantificateurs
- Axiomatique de la théorie des ensembles
- Produit de deux ensembles
- Union et intersection de familles de parties
- Apprendre à raisonner : par l'absurde
- Raisonner par contraposition
- Compter, calculer, ordonner, raisonner par récurrence
- Notion de fonction ; éléments de combinatoire

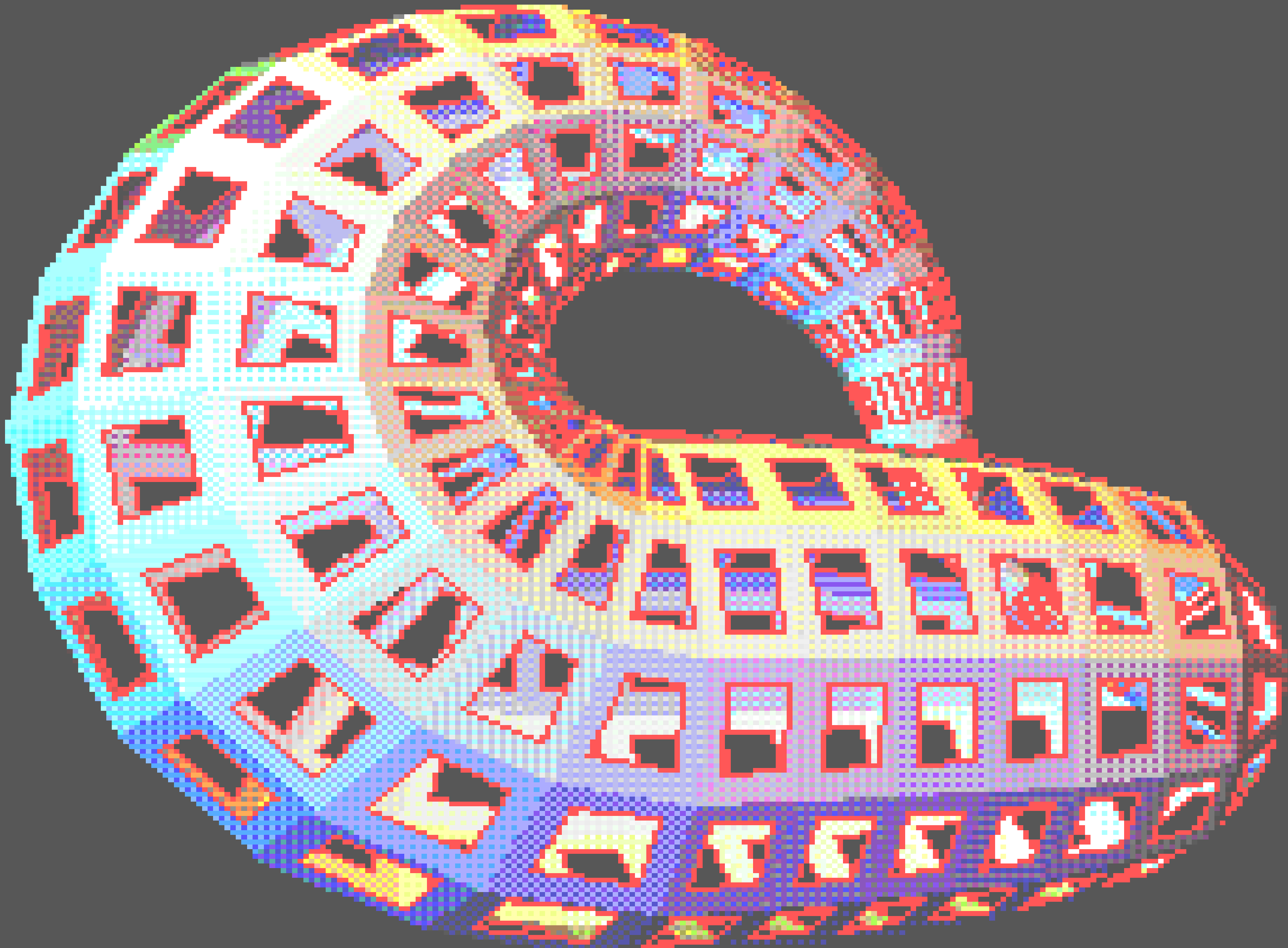
Opérations logiques

- Objets, assertions, relations
- Vrai et Faux
- Quelques opérations entre assertions
- Règles de logique

Objets , assertions, relations

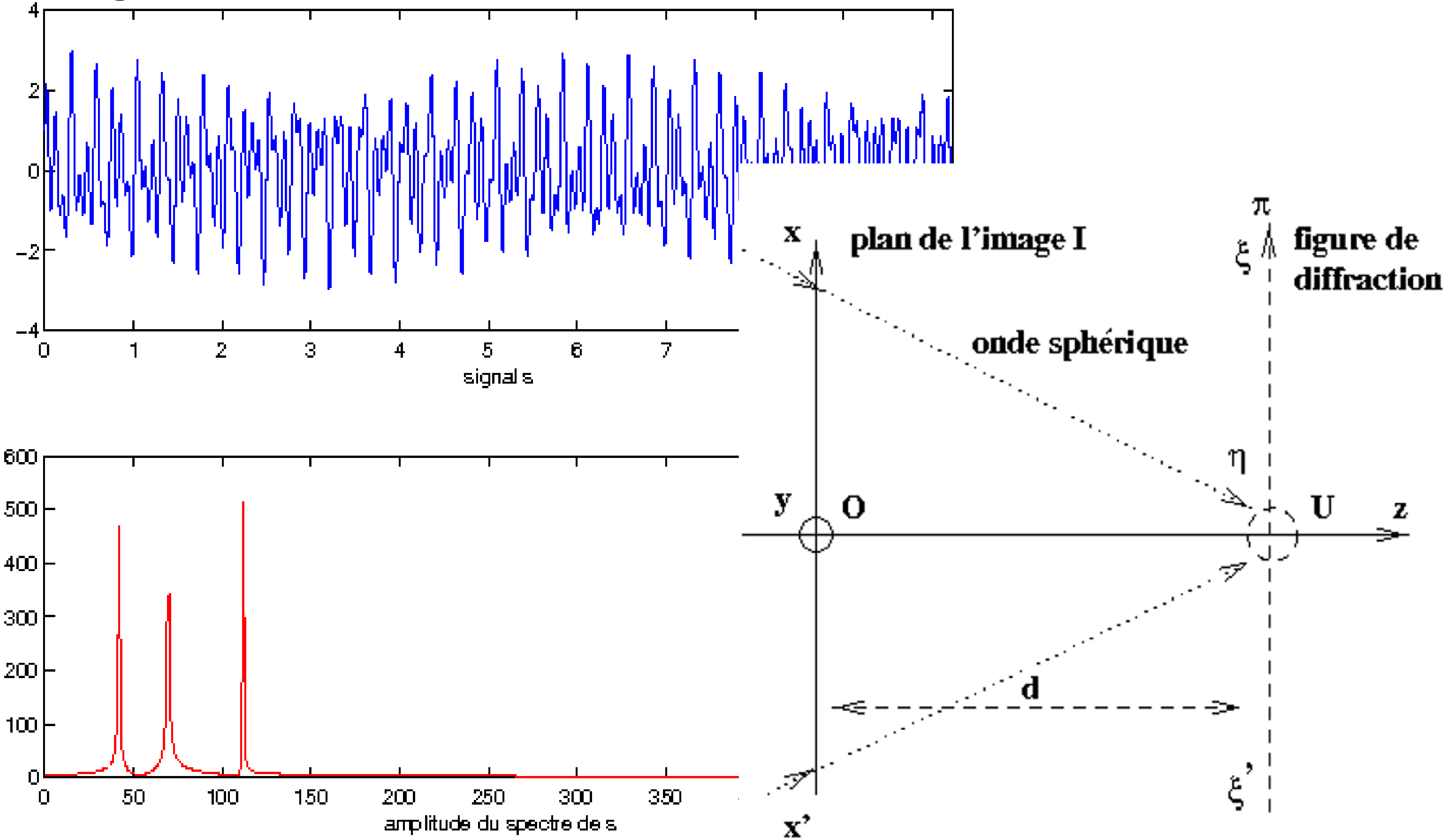
Les nombres (N , Z , Q , R , C , …)

<u>Objets</u>, assertions, relations



Les objets géométriques

Objets , assertions, relations



Les transformations physiques
(exemple : la diffraction = transformation de Fourier)

Objets , **assertions, relations**

VRAI

FAUX

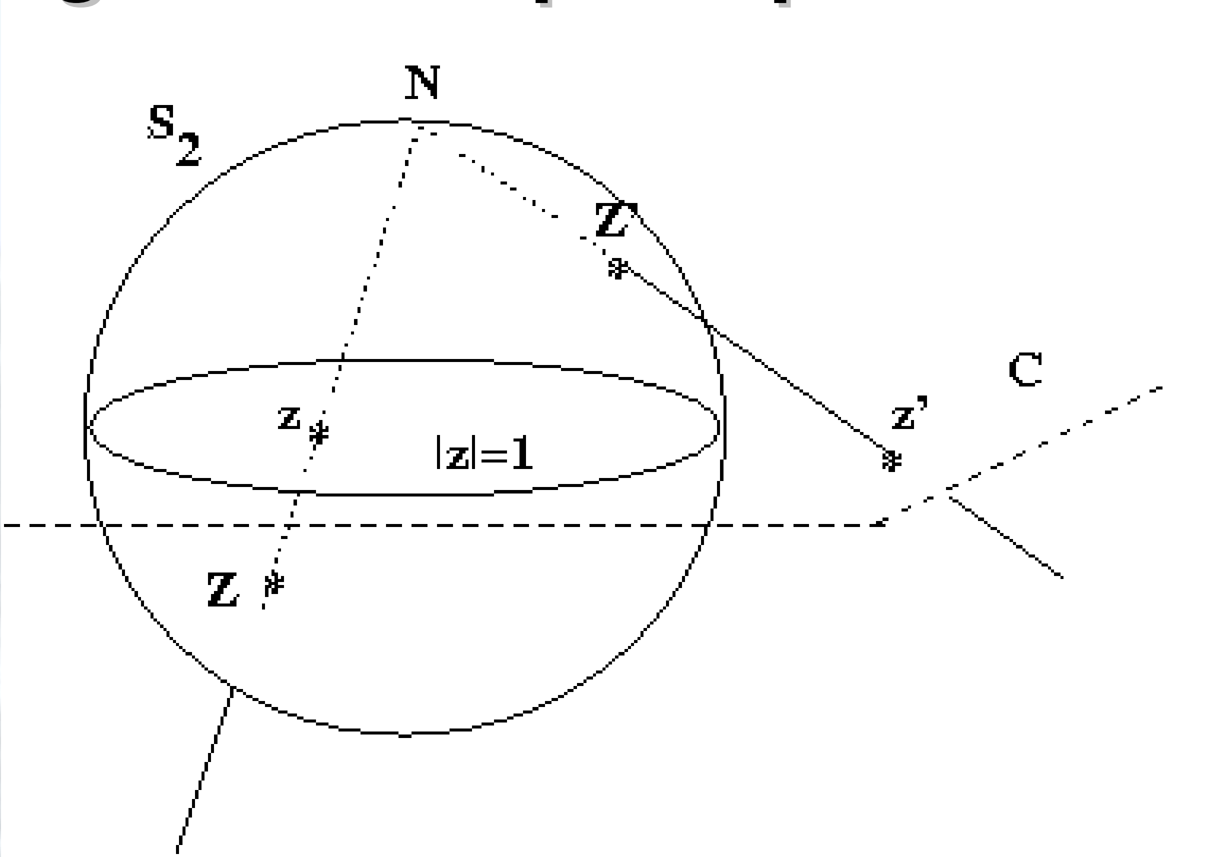
Les axiomes : la règle du jeu

« *Et si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces deux droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits* »

Euclide
Les éléments

Euclide d'Alexandrie (environ 325-265 avant J.C)

Quid en géométrie sphérique ?



Droite du plan = cercle sur le globe passant par le pôle Nord !

Etablir grâce à un jeu d’axiomes qu’une assertion est VRAIE

- C’est prouver un théorème …
- ou prouver un lemme …
- ou prouver un corollaire …

Quelques opérations entre assertions

La disjonction : R ou S

V

R	S	R ou S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

V

La conjonction : R et S

∧

R	S	R et S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

∧

L'implication : R **implique** S

R	S	R <u>implique</u> S
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

L'équivalence : R **équivaut à** S

R	S	R équivaut à S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La négation : non R

¬

R	non R
0	1
1	0

¬

Règles de logique (exemples)

$$\begin{array}{rcl}
(R \vee R) & \Longrightarrow & R \\
R & \Longrightarrow & R \\
R & \vee & (\text{non}\, R) \\
R & \Longleftrightarrow & (\text{non}\,(\text{non}\, R)) \\
R & \Longrightarrow & (R \vee S) \\
(S \vee S) & \Longrightarrow & (S \vee R) \\
(R \vee S) & \Longrightarrow & (S \vee R) \\
(R \wedge S) & \Longrightarrow & (S \wedge R) \\
(R \vee S) & \Longleftrightarrow & (S \vee R) \\
(R \wedge S) & \Longleftrightarrow & (S \wedge R) \\
(R \Longrightarrow S) & \Longrightarrow & \Big((R \vee T) \Longrightarrow (S \vee T)\Big)
\end{array}$$

LA REGLE DE **CONTRAPOSITION**

$$\boxed{[R \longrightarrow S]} \Longleftrightarrow \boxed{[(\text{non } S) \longrightarrow (\text{non } R)]}$$

La règle de transitivité

$[(R \Rightarrow S)$ VRAIE$]$ **et** $[(S \Rightarrow T)$ VRAIE$]$

$\Downarrow$

$[(R \Rightarrow T)$ VRAIE$]$

Ensembles et parties d'un ensemble ; quantificateurs

Notion d'ensemble

Exemples

Les deux quantificateurs :

«Q uelque soit» «i l existe »

Quantificateurs

$$\forall x \in E\,, \forall y \in F\,, \qquad R\{x, y\}$$
$$\forall x \in E\,, \exists y \in F\,, \qquad R\{x, y\}$$
$$\exists x \in E\,, \forall y \in F\,, \qquad R\{x, y\}$$
$$\exists x \in E\,, \exists y \in F\,, \qquad R\{x, y\}$$
$$\forall y \in F\,, \exists x \in E\,, \qquad R\{x, y\}$$
$$\exists y \in F\,, \forall x \in E\,, \qquad R\{x, y\}$$

Règles de logique et quantificateurs

$$\text{non}\Big(\forall x \in E, \forall y \in F,\ R\{x,y\}\Big) \iff \Big(\exists x \in E, \exists y \in F,\ \text{non}\, R\{x,y\}\Big)$$

$$\text{non}\Big(\forall x \in E, \exists y \in F,\ R\{x,y\}\Big) \iff \Big(\exists x \in E, \forall y \in F,\ \text{non}\, R\{x,y\}\Big)$$

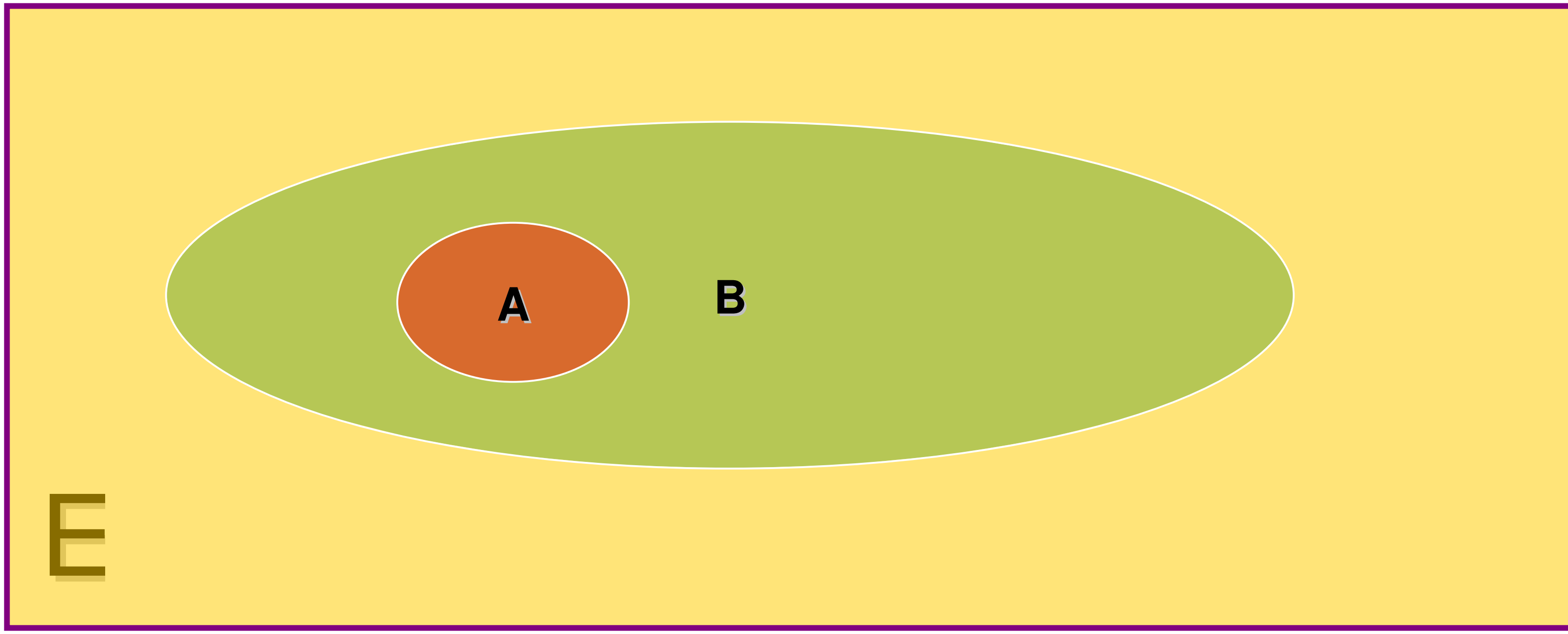
$$\text{non}\Big(\exists x \in E, \forall y \in F,\ R\{x,y\}\Big) \iff \Big(\forall x \in E, \exists y \in F,\ \text{non}\, R\{x,y\}\Big)$$

$$\text{non}\Big(\exists x \in E, \exists y \in F,\ R\{x,y\}\Big) \iff \Big(\forall x \in E, \forall y \in F,\ \text{non}\, R\{x,y\}\Big)$$

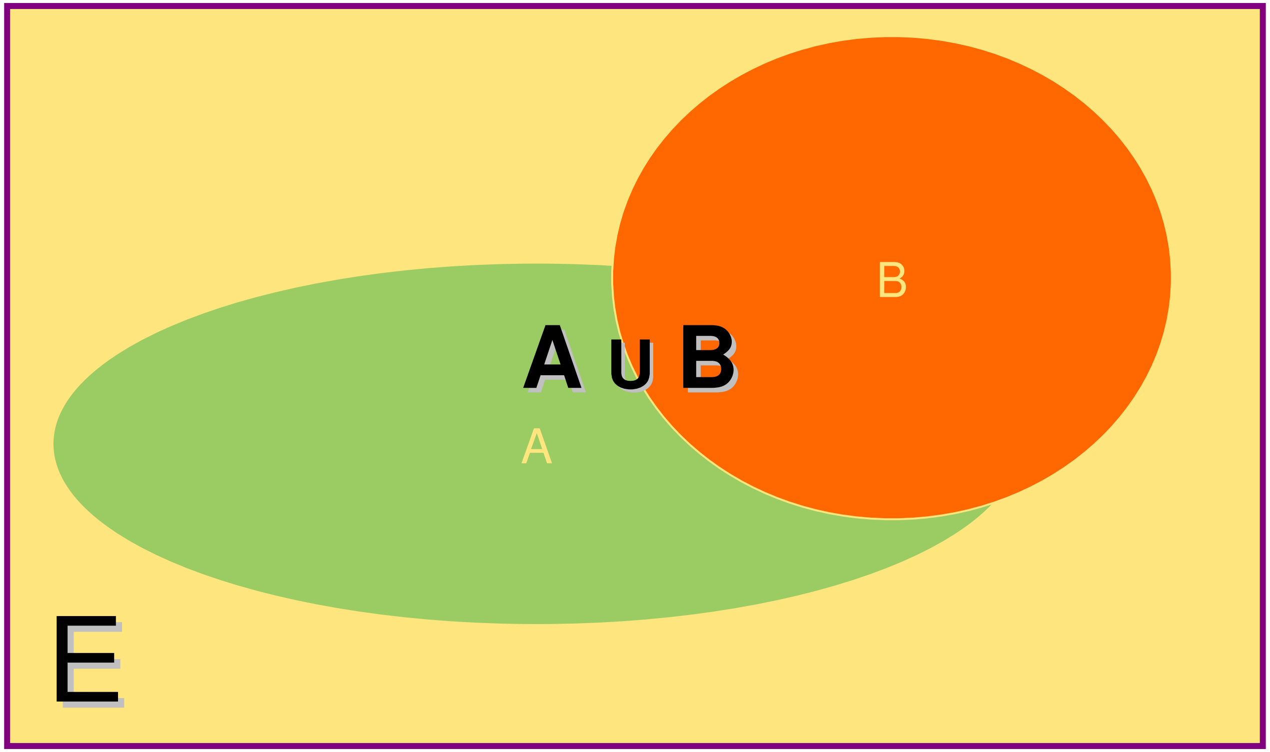
$$\Big(\exists x \in E, \forall y \in F,\ R\{x,y\}\Big) \implies \Big(\forall y \in F, \exists x \in E,\ R\{x,y\}\Big)$$

Parties d'un ensemble ; l'inclusion

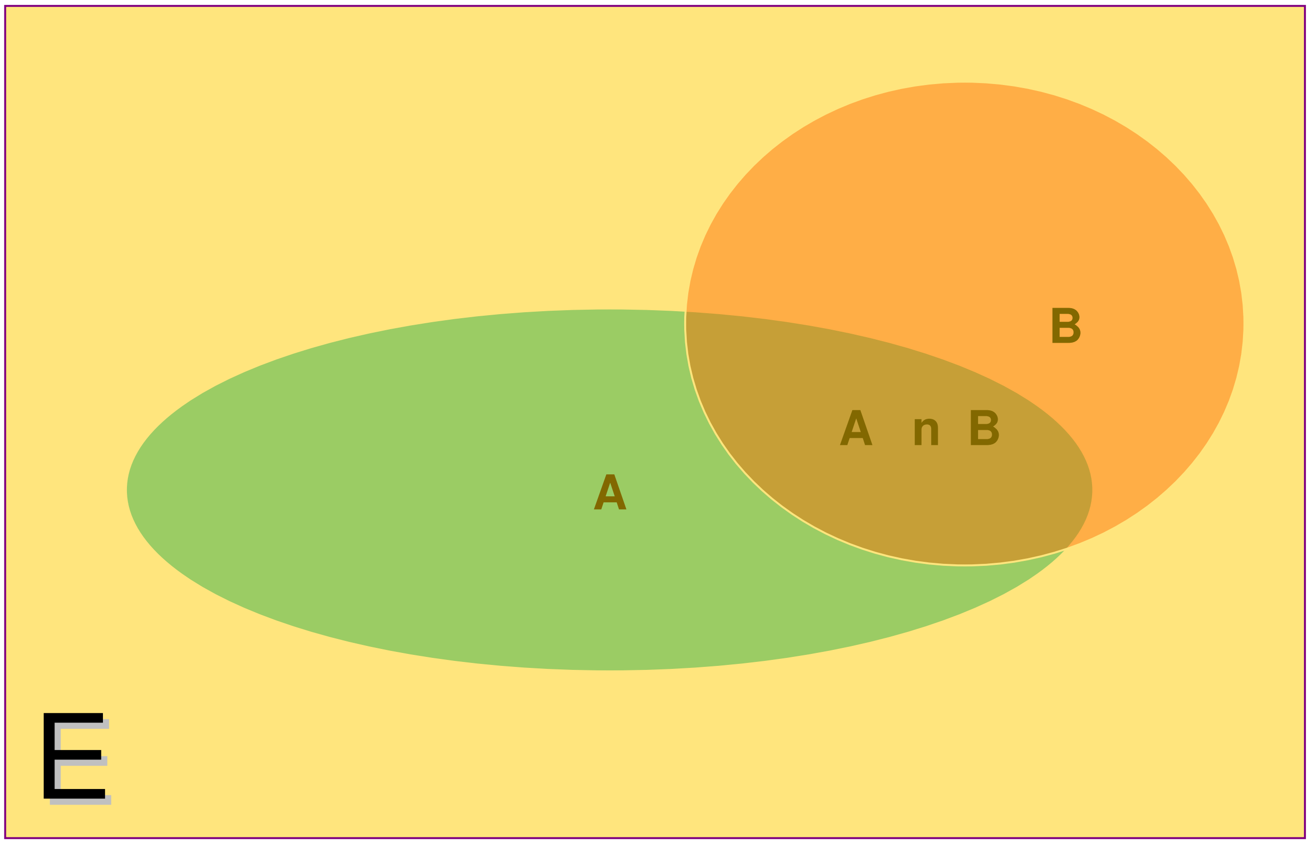
A c B



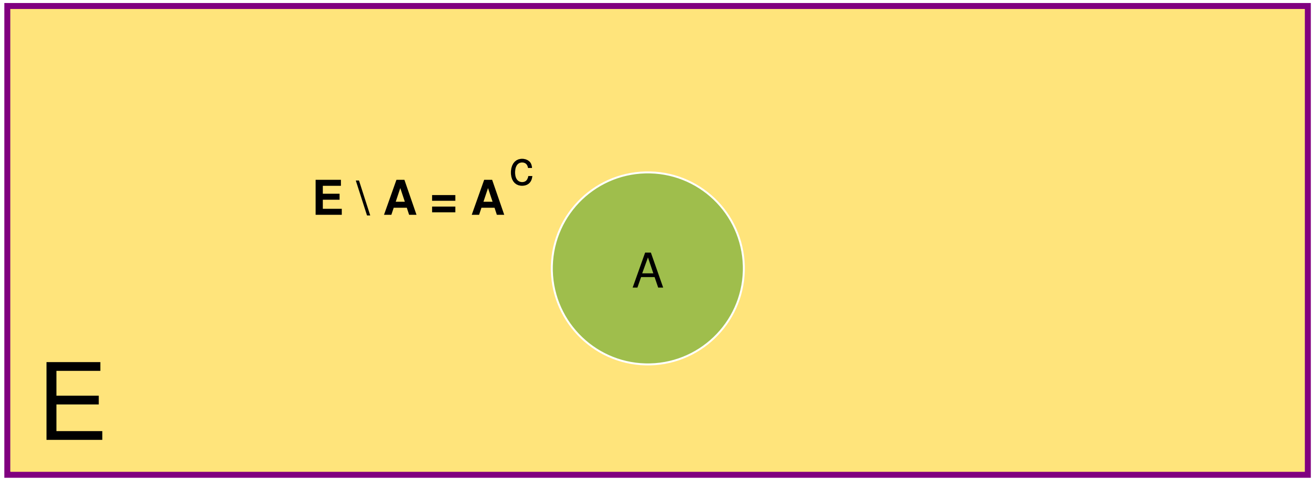
L'**union** de deux parties A et B d'un ensemble E



L'intersection de deux parties A et B d'un ensemble E

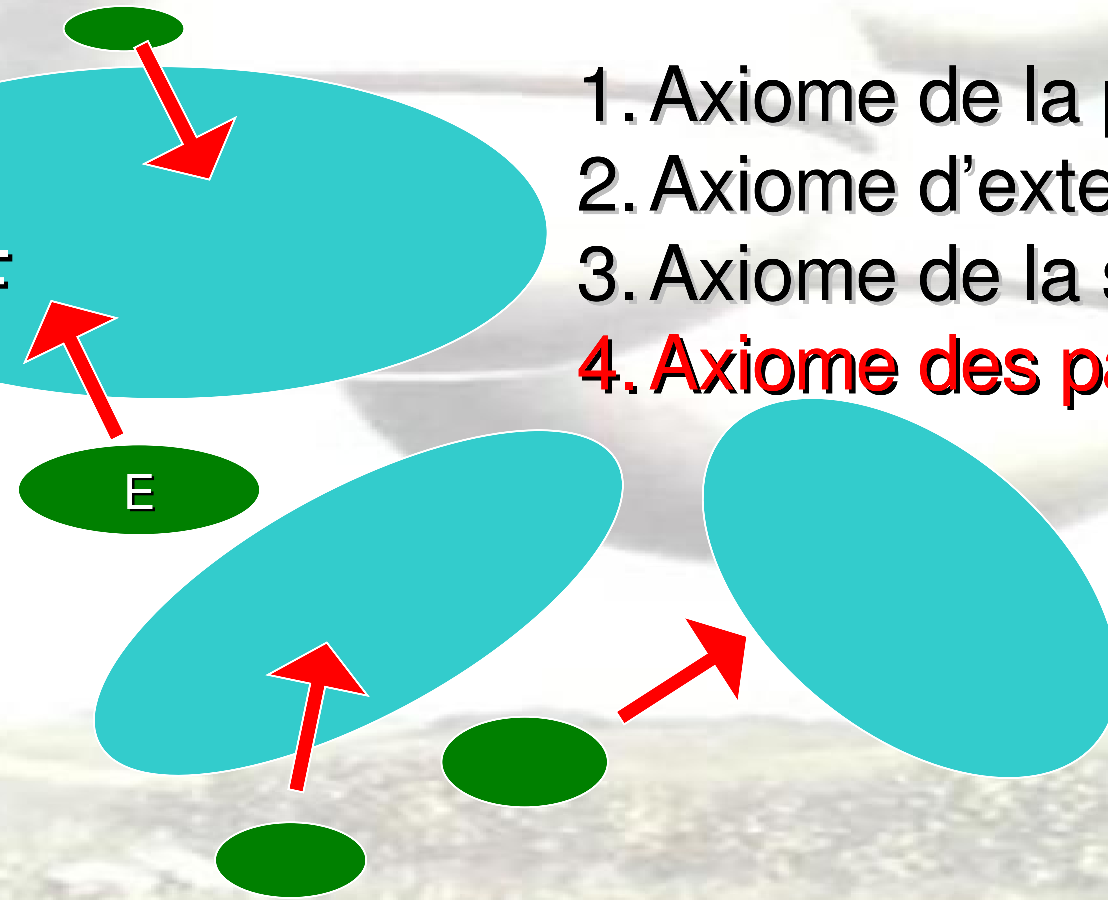


Le complémentaire de A



Les axiomes de la théorie des ensem
(Zermelo-Fraenkel)

A.A.Fraenkel
(1891-1965)

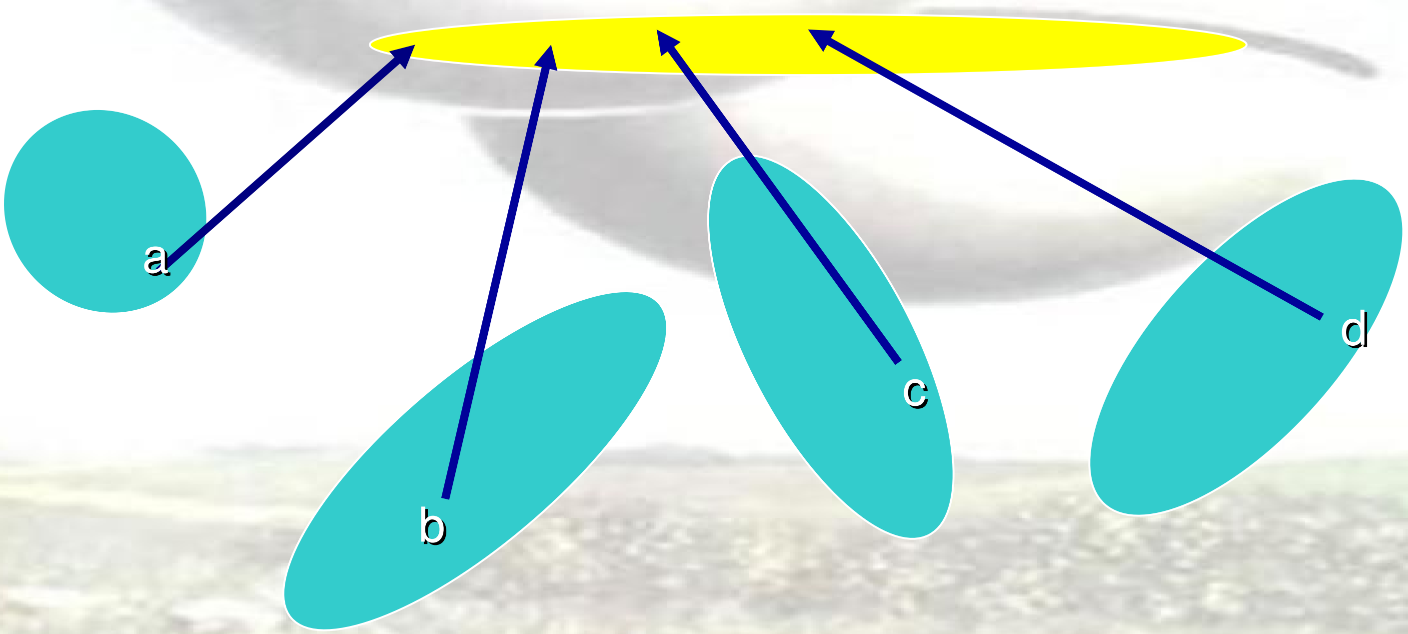


1. Axiome de la paire
2. Axiome d'extensionnalité
3. Axiome de la somme
4. Axiome des parties

E.F.Zermelo
(1871-1953)

L’axiome du choix

« ***Etant donnée une collection d’ensembles non vides de l’univers n’ayant deux à deux aucun élément commun, on peut construire un nouvel ensemble en prenant un élément dans <u>chacun</u> des ensembles de la collection*** »



L'axiome de fondation

« ***Tout ensemble non vide contient un élément avec lequel il n'a aucun élément en commun*** »

intuitivement : aucun ensemble ne peut s'auto-appartenir

Encore quelques opérations entre ensembles ou parties d’un ensemble …

- **Le produit de deux ensembles**
- **L’union d’une famille de parties d’un ensemble**
- **L’intersection d’une famille de parties d’un ensemble**

Apprendre à raisonner : Le principe du **raisonnement par l'absurde**

BUT : montrer que R est VRAIE

PRINCIPE :

2. on suppose R fausse
3. on exhibe (*via* notre système d'axiomes) une certaine assertion S
4. on montre que (R fausse+ axiomes) implique [S est VRAIE]
5. on montre que (R fausse+ axiomes) implique [S est FAUSSE]

CONCLUSION : R est VRAIE

Apprendre à raisonner :
Le principe de contraposition

$$\boxed{[R \longrightarrow S]} \Longleftrightarrow \boxed{[(\text{non } S) \longrightarrow (\text{non } R)]}$$

Compter, calculer, ordonner

Raisonner par récurrence (ou induction)

BUT : montrer que R {n} est VRAIE à tout cran n

PRINCIPE :

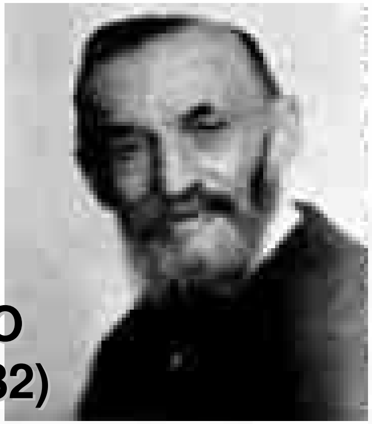
2. on montre que **R{0} est VRAIE**
3. on montre : **([R {n} VRAIE] implique [R {n+1} VRAIE])** à tout cran n

CONCLUSION : R {n} est VRAIE à tout cran n

Vers l'axiomatique des entiers …

Les axiomes de N (G. Peano)

- 1. N contient au moins un élément (noté «0 »)
- 2. Tout élément n de N admet un *successeur* S(n)
- 3. Deux éléments ayant mêmes successeurs sont égaux
- 4. «0 » n'est successeur d'aucun élément
- 5. Le seul sous-ensemble de N contenant à la fois 0 et les successeurs de tous ses éléments est N tout entier *(principe de récurrence)*



G. PEANO (1858-1932)

Deux opérations sur N

- somme = a
- répéter b fois
- somme = S (somme)

a + b

- produit = 0
- répéter a fois
- produit = produit + b

a x b

Un ordre total sur N

a « est plus petit que b »

Il existe un élément x de N tel que b = a + x

Cet ordre est compatible avec addition et multiplication

$$a \leqslant b$$

Trois propriétés « clef » de N (équivalentes aux axiomes de Peano)

- 1. Toute partie A <u>non vide</u> possède un plus petit élément (borne inférieure)
- 2. Toute partie A <u>non vide et majorée</u> admet un plus grand élément (borne supérieure)
- 3. L'ensemble N tout entier n'a pas de majorant

(1) $\Rightarrow$ Cet ordre est total (on peut toujours comparer deux éléments)

Les deux principes de récurrence

Données : une assertion R {n} où figure le caractère « n» et un nombre entier n_0 fixé

PRINCIPE 1 L'assertion :

$$\left(R\{n_0\} \text{ et } \left[\text{pour tout } n \text{ plus grand que } n_0,\ R\{n\} \Rightarrow R\{n+1\}\right] \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\text{pour tout } n \text{ plus grand que } n_0,\ R\{n\}\right)$$

est une évidence dans l'axiomatique de Peano

PRINCIPE 2 L'assertion :

$$R\{n_0\} \text{ et } \left[\text{pour tout } n \text{ plus grand que } n_0, [\, R\{k\} \text{ OK pour } k=n_0,\ldots,n] \Rightarrow R\{n+1\}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\text{pour tout } n \text{ plus grand que } n_0,\ R\{n\}\right)$$

est une évidence dans l'axiomatique de Peano

Les nombres premiers : illustration de deux modèles de raisonnement

- Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier (preuve par récurrence)

- Il y a une infinité de nombres premiers (preuve par l'absurde)

Le théorème d’Euclide

Soient a et b deux entiers positifs avec b <u>non nul</u>.
Il existe un UNIQUE couple d’entiers (q,r) tels que :

$$\boxed{a = b\,q + r}$$

et

$$\boxed{r \text{ est entre } 0 \text{ (inclus) et } b-1 \text{ (inclus)}}$$

Définition : le nombre r est dit <u>RESTE</u> dans la division EUCLIDIENNE de a par b.
Le nombre q est dit <u>QUOTIENT</u> dans la division EUCLIDIENNE de a par b.

Quelques applications du théorème d'Euclide

- La recherche du PGCD
- Le développement en base b
- Le développement en fraction continue d'une fraction

Trois «   programmes»   basés sur l'algorithme d'Euclide

fonction PGCD = PGCD (a,b)

MATLAB 7.1.lnk

fonction X= newbase (a,b)

MATLAB 7.1.lnk

fonction DVLP= fraccont (a,b)

fonction PGCD=PGCD (a,b)
L'algorithme d'Euclide

Al-Khwarizmi
(780 – Bagdad 850)

- x=a ;
- y=b ;
- tant que y>0
- [q,r] = div(x,y);
- si r==0
- PGCD = y;
- y = 0 ;
- sinon
- [q1,r1] = div(y,r);
- x = r;
- PGCD = x ;
- y=r1 ;
- fin
- fin

$a = b\, q_0 + r_0$ $\quad$ $PGCD\,(a,b) = PGCD\,(b,r_0)$

$b = r_0\, q_1 + r_1$ $\quad$ $PGCD\,(b,r_0) = PGCD\,(r_0,r_1)$

$r_0 = r_1\, q_2 + r_2$ $\quad$ $PGCD\,(r_0,r_1) = PGCD\,(r_1,r_2)$

....

$r_{N-2} = q_N\, r_{N-1} + r_N$ $\quad$ $PGCD\,(r_{N-2},r_{N-1}) = PGCD(r_{N-1},r_N)$

$r_{N-1} = q_{N+1}\, r_N + 0$ $\quad$ $PGCD\,(r_{N-1},r_N) = r_N$

fonction X=newbase (a,b)
Comment écrire a «en base b » ?

- X=[ ] ;
- x=a ;
- tant que x > 0
-   [q,r]= div (x,b);
-   x=q;
-   X=[r , X] ;
- fin

$$a = b\,q + d_0$$
$$= b\,(b\,q_1 + d_1) + d_0$$
$$= b\,(b\,(b\,q_2 + d_2) + d_1) + d_0$$
$$= d_0 + d_1\,b + \dots + d_{N-1}\,b^{N-1}$$

$$a : [\,d_{N-1}\ \ d_{N-2}\ \ \dots\ \ d_2\ \ d_1\ \ d_0\,]$$

fonction DVLP = fraccont (a,b)

Comment développer une fraction a/b en « fraction continue » ?

- DVLP=[ ] ;
- x=a ;
- y=b ;
- tant que y > 0
-     [q,r] = div (x,y) ;
-     DVLP=[DVLP,q] ;
-     x = y ;
-     y = r ;
- fin

$$\frac{a}{b} = \frac{b\,q + r}{b}$$

$$= q + \frac{r}{b}$$

$$= q + \frac{1}{b/r} = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{r_1}{r}}$$

etc ....

Notion de fonction

Eléments de combinatoire

GRAPHES ET FONCTIONS

Définition : on appelle *fonction* d'un ensemble E dans un ensemble F
La donnée d'un sous ensemble G_f de E x F tel que :

Pour tout x dans E , il existe un UNIQUE élément y de F tel que (x,y) soit un élément de G_f

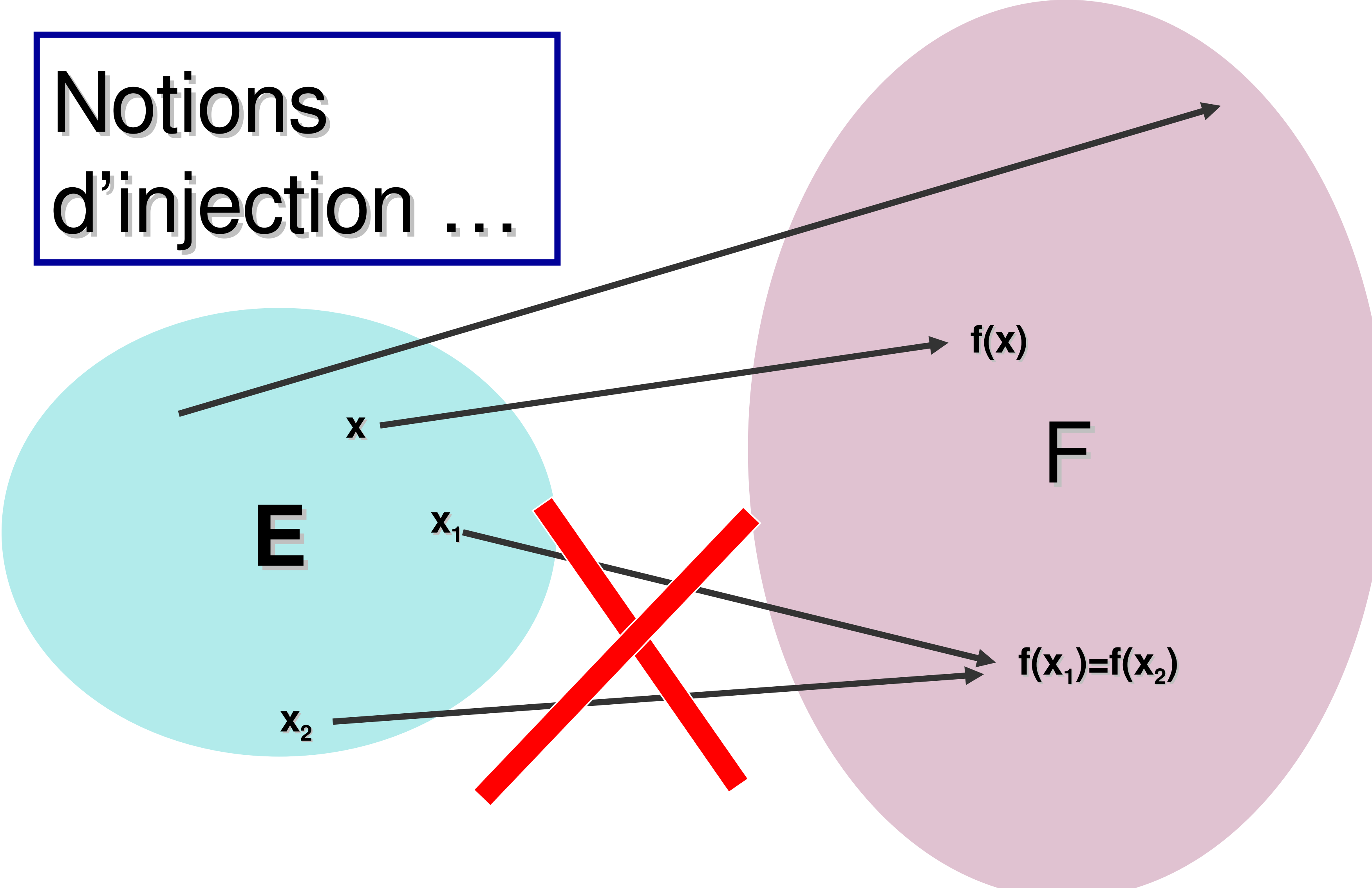
L'ensemble G_f est dit *graphe* de la fonction f ainsi associée à G_f et on note

$$y = f(x)$$

l'unique élément de F tel que (x,y) soit dans G_f

FE

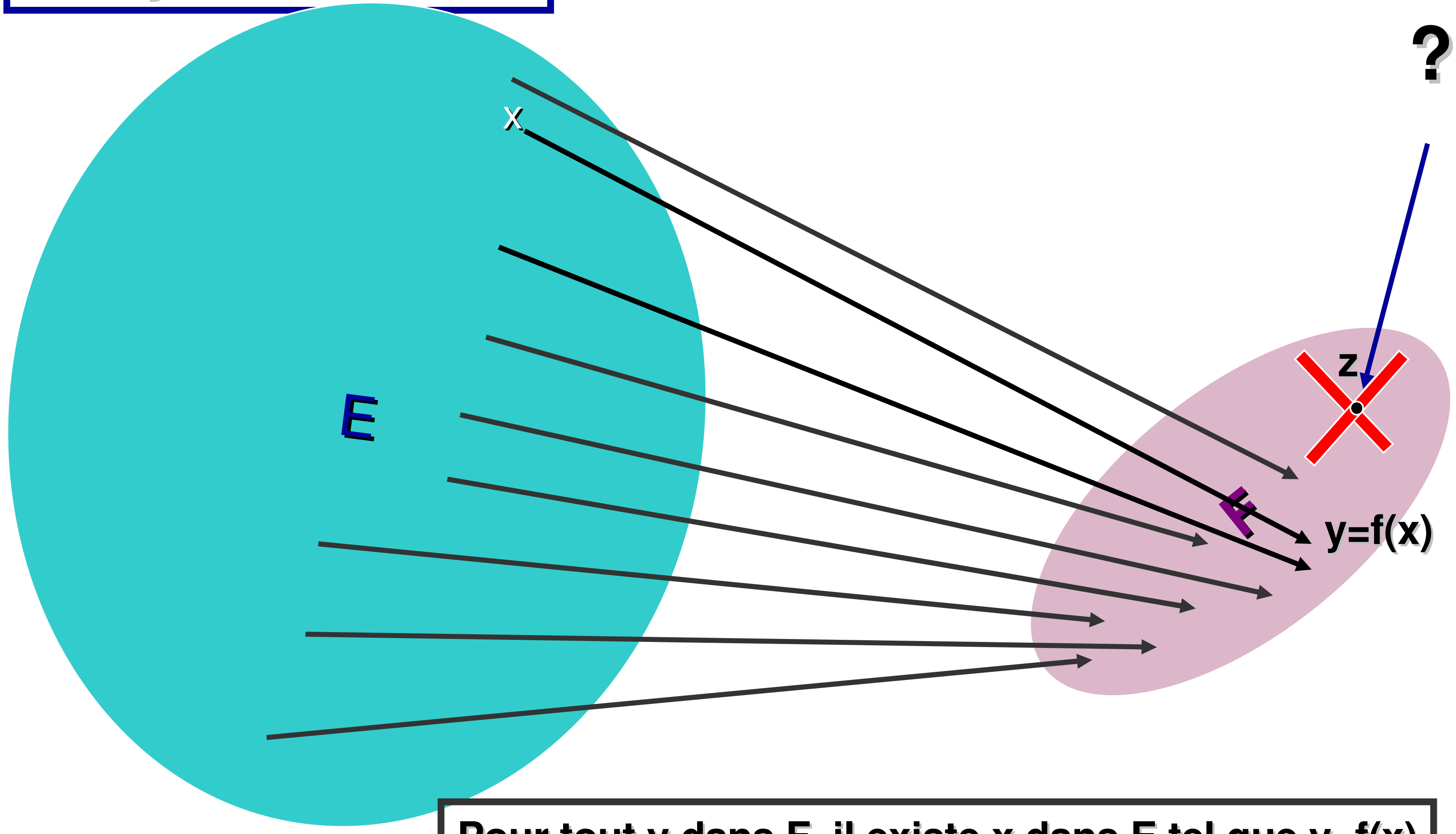
Notions d'injection …



Pour tout x_1 dans E, pour tout x_2 dans E, $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

Pour tout x_1 dans E, pour tout x_2 dans E, x_1 non= $x_2 \Rightarrow f(x_1)$ non= $f(x_2)$

… et de surjection



Pour tout y dans F, il existe x dans E tel que y=f(x)

f injective et surjective

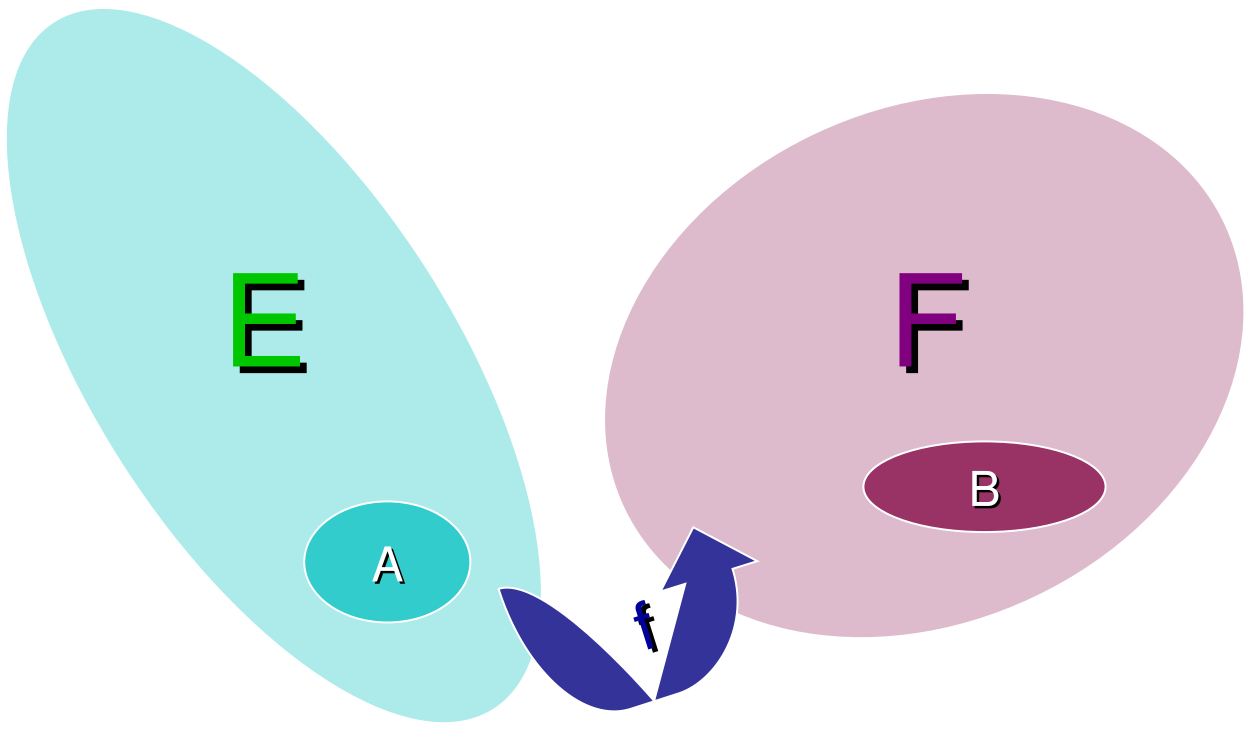
$\Updownarrow$

f bijective

<u>Exemple</u> : l'ensemble des parties de E est en bijection avec l'ensemble des applications de E dans {0,1}

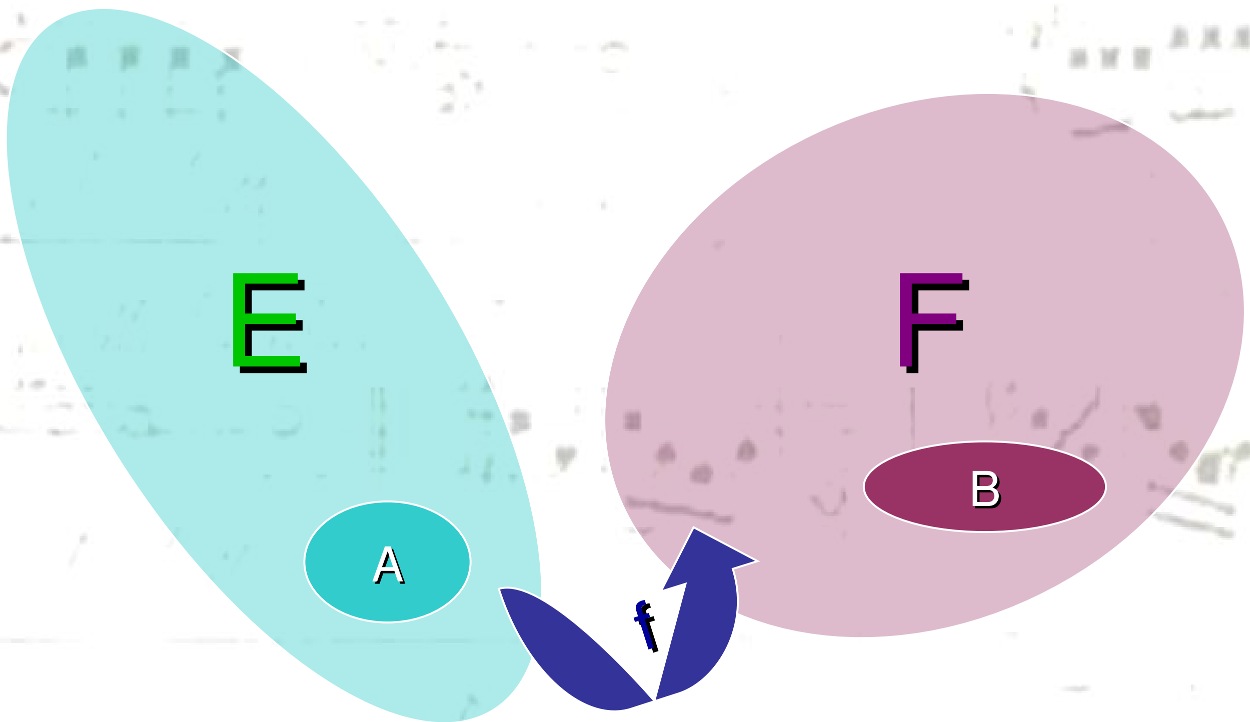
$A \subset E$ **Fonction caractéristique de A**

Image directe, image réciproque



f(A)= image directe de A = {y, y dans F ; ∃x dans A tel que y= f(x) }

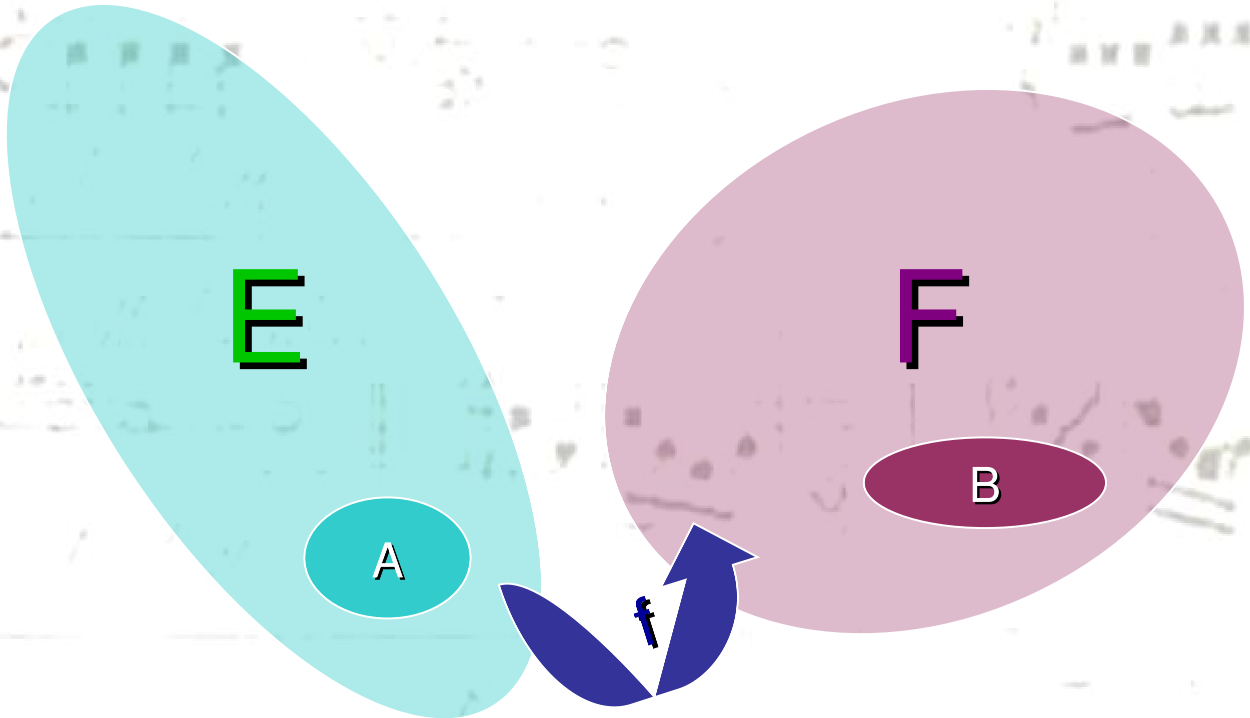
f^{-1}(B)= image réciproque de B = {x, x dans E ; f(x) est dans B }



A c $f^{-1}(f(A))$ pour toute partie A de E

$f(f^{-1}(B))$ c B pour toute partie B de F

Quelques règles



(f injective) $\Rightarrow$ $\left(A = f^{-1}(f(A))\right.$ pour toute partie A de E$\left.\right)$

(f surjective) $\Rightarrow$ $\left(f(f^{-1}(B)) = B\right.$ pour toute partie B de F$\left.\right)$

Composition des applications

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

g o f (x) : = g (f(x)) pour tout x dans E

Inverse à gauche …

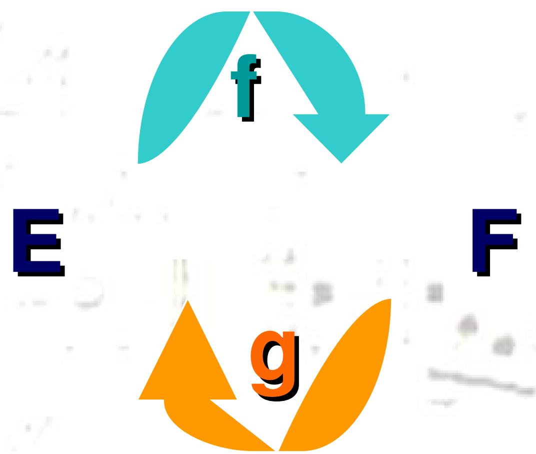
$$E \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} F$$

g (f(x)) = x
pour tout x dans E

et injectivité :

<< f est injective de E dans F si et seulement si f admet un inverse à gauche >>

Inverse à droite …

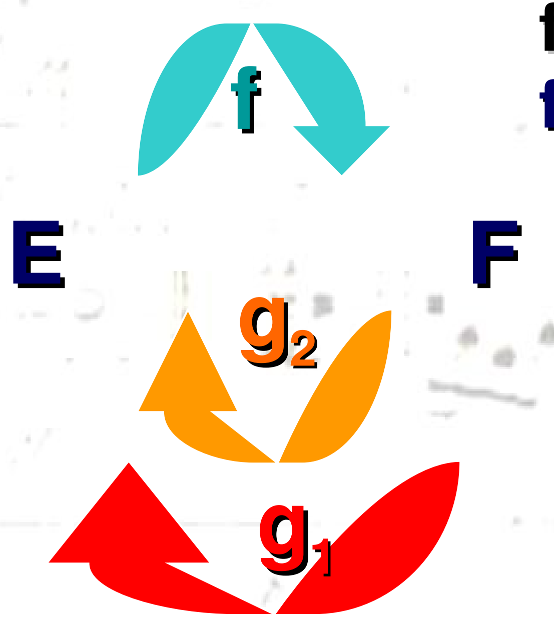


$f(g(y)) = y$
pour tout y dans F

et surjectivité :

<< f est surjective de E dans F si et seulement si f admet un inverse à droite >>

Inverse des applications bijectives



$f(f^{-1}(y))=y$ pour tout y dans F

$f^{-1}(f(x))=x$ pour tout x dans E

$f(g_2(y)) = y$

pour tout y dans F

$g_1(f(x)) = x$

pour tout x dans E

$$g_1 = g_2 = f^{-1}$$

Le cas des ensembles finis

Si E et F sont des ensembles finis de cardinaux respectifs p (pour E) et n (pour F), l'ensemble des fonctions de E dans F est un ensemble de cardinal

$$\mathbf{Card}\ (F^{E}) = n^{p}$$

Exemple : E fini de cardinal p, F={0,1}

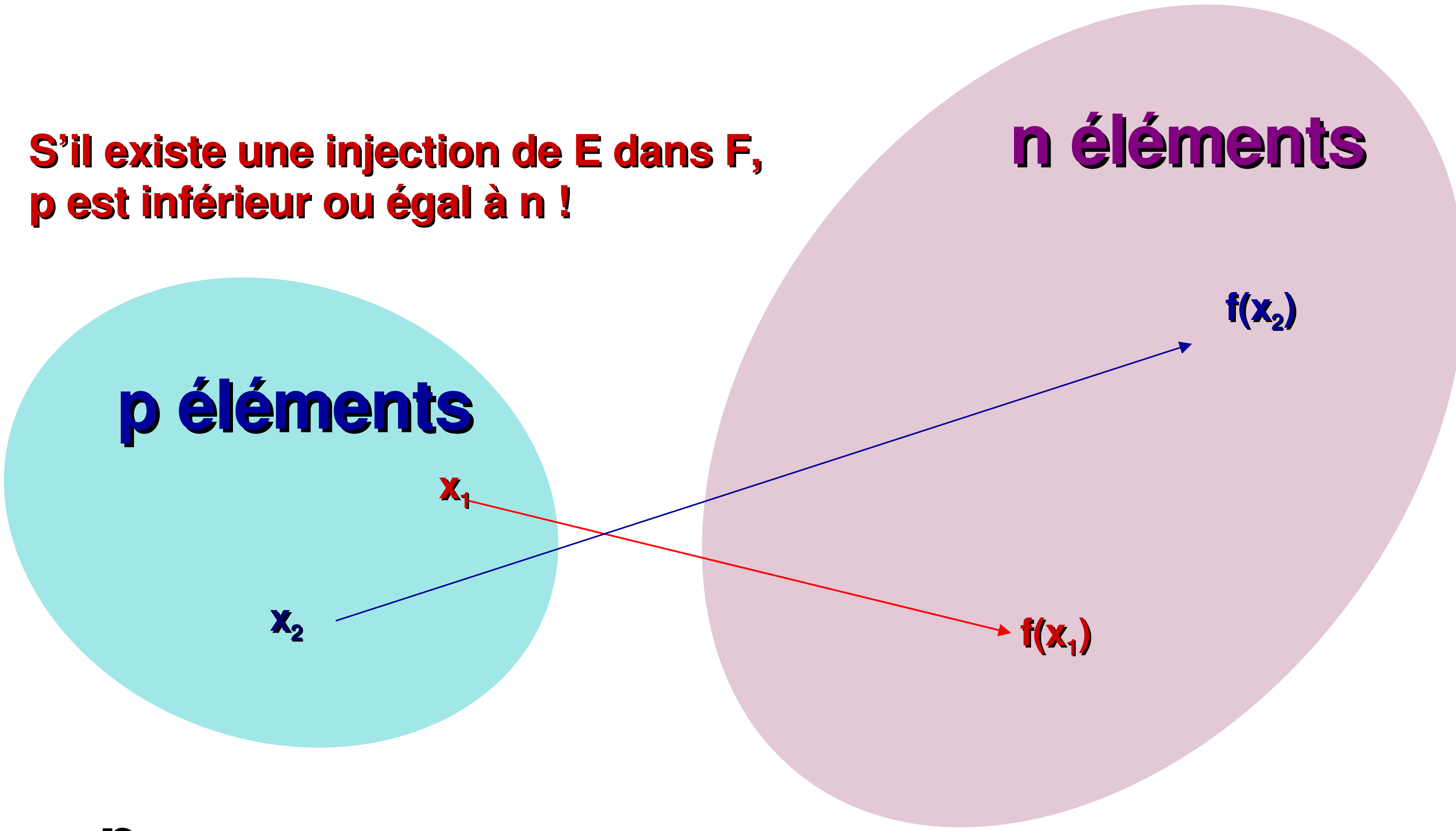
$$\mathbf{Card}\ (\{0,1\}^{E}) = 2^{p}$$

Nombre d'arrangements de p éléments parmi n

=nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments

$$\boxed{A_n^p}$$

S'il existe une injection de E dans F,
p est inférieur ou égal à n !



$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Un cas particulier important :

Le nombre de permutations d'un ensemble à p élements vaut :

$$A_p^p = \boxed{p \times (p-1) \ldots \times 2 \times 1 = p!}$$

Nombre de <u>combinaisons</u> de p éléments parmi n

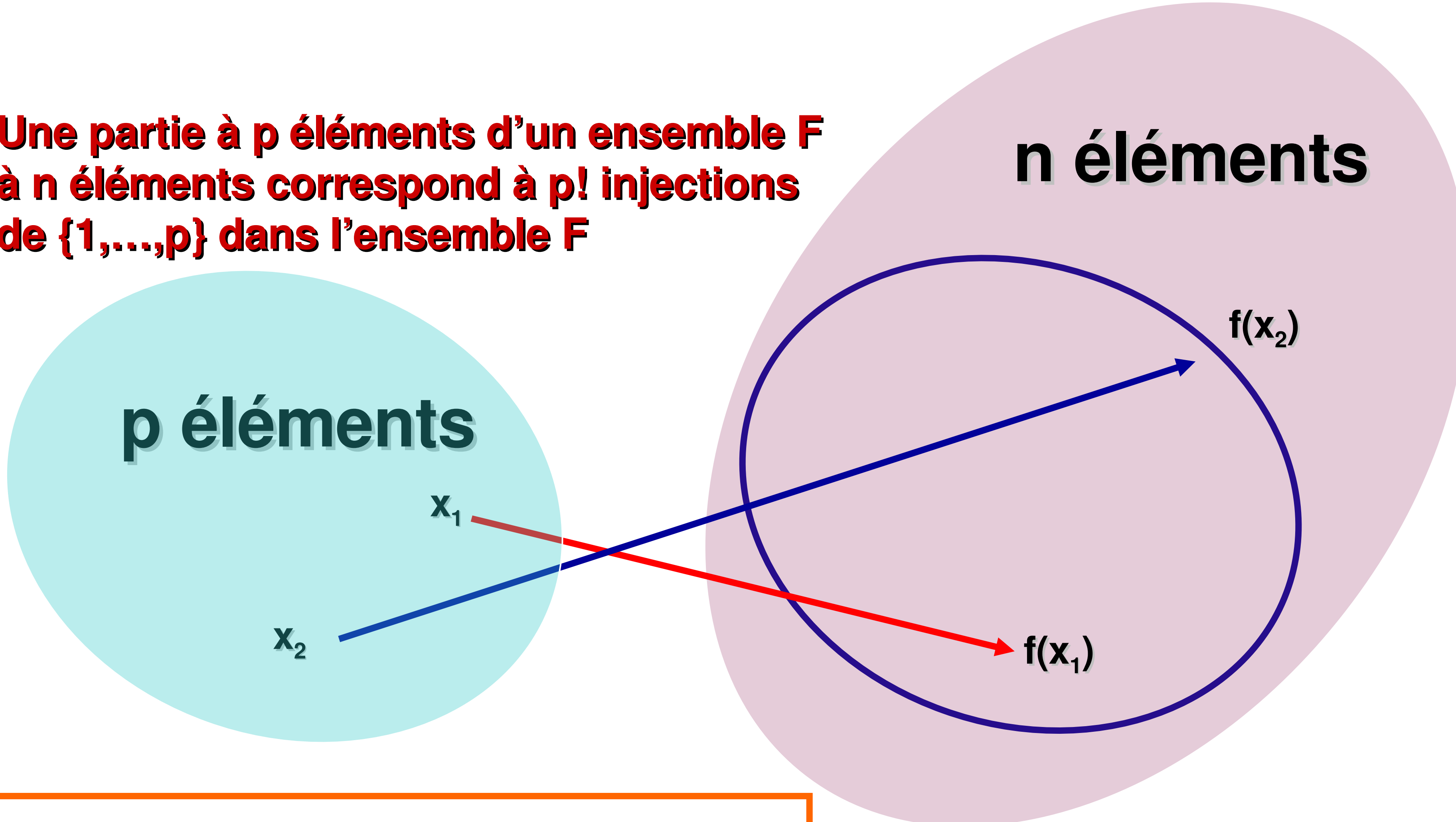
= nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{0}{1} = 0$$

$$C_n^p$$

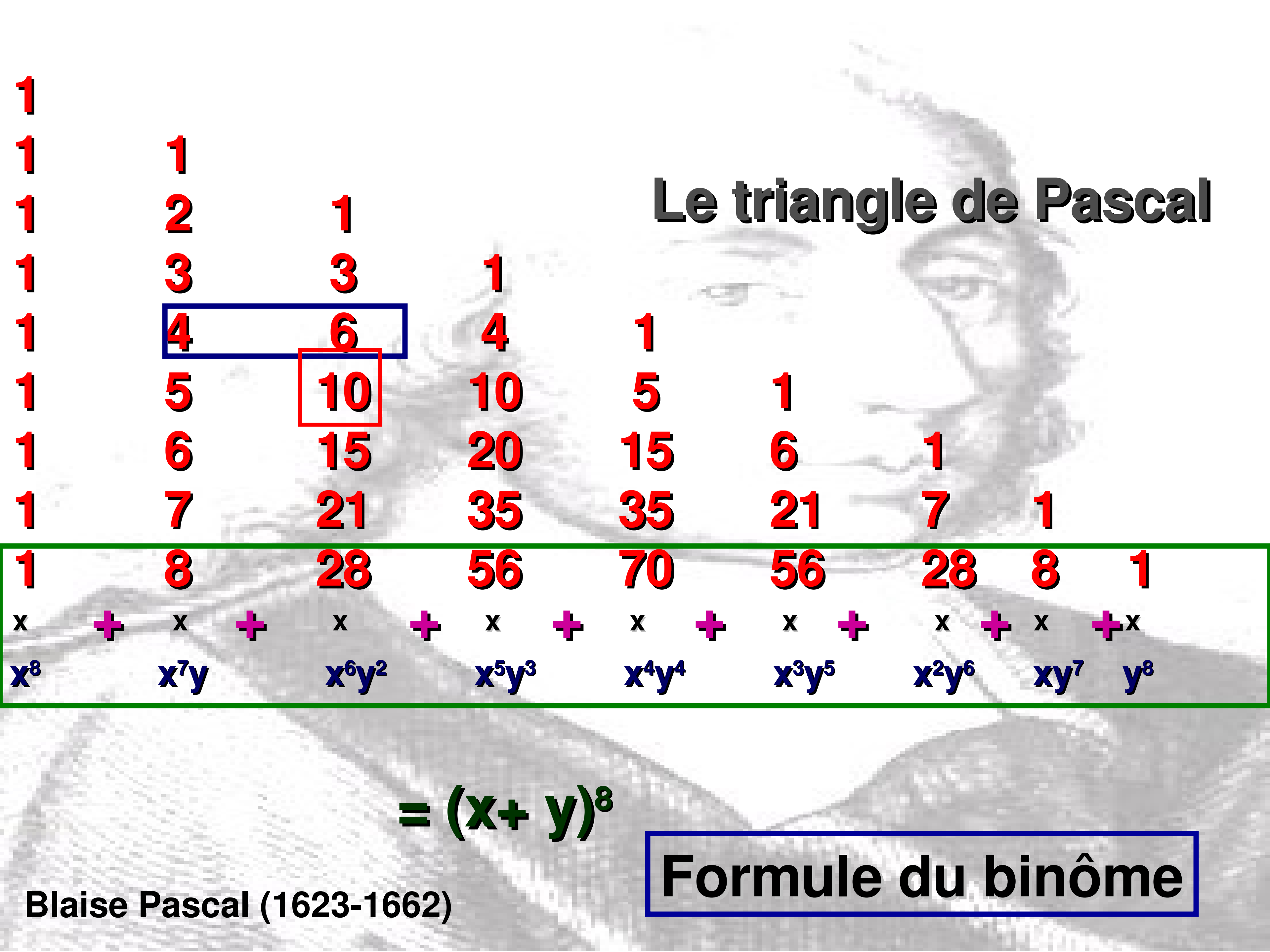
Une partie à p éléments d'un ensemble F à n éléments correspond à p! injections de {1,…,p} dans l'ensemble F



$$A_n^p = p! \times C_n^p$$

Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n vaut :

$$\frac{n\,!}{p\,! \times (n-p)\,!}$$



Le triangle de Pascal

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

$$1 \times x^8 + 8 \times x^7y + 28 \times x^6y^2 + 56 \times x^5y^3 + 70 \times x^4y^4 + 56 \times x^3y^5 + 28 \times x^2y^6 + 8 \times xy^7 + 1 \times y^8$$

$$= (x+y)^8$$

Formule du binôme

Blaise Pascal (1623-1662)

Si x × y = y × x
(clause de commutativité)

$$(x+y)^n = C_n^0\, x^n + C_n^1\, x^{n-1}\, y$$
$$\ldots + C_n^p\, x^p\, y^{n-p} \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-1}\, x\, y^{n-1} + C_n^n\, y^n$$

Fin du Chapitre 1