II. Nombres entiers, rationnels, réels et complexes

- L'anneau **Z** des **entiers relatifs**
- Nombres **rationnels** et nombres **réels**
- Le plan R^2 et les nombres **complexes**

L'anneau Z des entiers relatifs

- **Construction de l'anneau ordonné (Z,+,x)**
- **Un exemple de calcul algébrique : l'identité de Bézout**

François Viète
1540 – 1603

Etienne Bézout
1730 – 1783

La construction de Z à partir de l'ensemble N x N des couples d'entiers positifs ou nuls :

PERTE

GAIN

$$[(a,b)] = \{ (p,q) \; ; \; a + q = b + p \}$$

Si b > a, la classe [(a,b)] est notée

b-a

Si a > b, la classe [(a,b)] est notée

- (a-b)

Si a = b, la classe [(a,a)] est notée

0

N sous-ensemble de Z

Z	$[(a,b)]$, $b<a$	Z\N	$[(a,b)]$, $b>a$ ou $a=b$	N

Deux opérations …

$$[(a_1 , b_1)] + [(a_2 , b_2)] := [(a_1 + a_2 , b_1 + b_2)]$$

$$[(a_1 , b_1)] \times [(a_2 , b_2)] := [(a_1 b_2 + a_2 b_1 , a_1 a_2 + b_1 b_2)]$$

… **et un ordre total prolongeant l'ordre sur N en incorporant les deux règles additionnelles suivantes :**

- **Si a et b sont des éléments de N, -a est inférieur ou égal à b**
- **Si a et b sont des éléments de N, -a est inférieur ou égal à –b si et seulement si b est inférieur ou égal à a.**

L'ordre est compatible aux deux opérations

(Z,+) groupe abélien

Addition

Propriétés des opérations

+

(Z,+,x) anneau

commutatif unitaire

- **Commutativité**

  $x+y=y+x$

- **Associativité**

  $x+(y+z)= (x+y)+z$

- **Elément neutre 0**

  $x+0 = 0+x = x$

- **Tout élément x admet un «o pposé» -x**

  $x+(-x) = (-x)+x = 0$

Distributivité mult/addition

$x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)$

Multiplication

x

- **Commutativité**

  $x \times y=y \times x$

- **Associativité**

  $x \times (y \times z)= (x \times y) \times z$

- **Elément unité 1=[(0,1)]**

  $x \times 1 = 1 \times x = x$

Propriétés de Z liées à l’ordre

Toute partie <u>non vide et minorée</u> admet <u>en son sein</u> un plus petit élément (borne inférieure)

Toute partie <u>non vide et majorée</u> admet <u>en son sein</u> un plus grand élément (borne supérieure)

Un exemple de calcul algébrique dans Z : l’identité de Bézout

1730 - 1783

La division dans Z

Soient A et B deux entiers **relatifs** :

On dit que **B divise A** s'il existe un entier relatif q tel que **A=Bq**.

PGCD (A,B) := PGCD (|A|,|B|)
(si A,B non tous les deux nuls)

Le théorème de Bézout
1. Clause d'existence

Soient a et b deux entiers relatifs non tous les deux nuls et d leur PGCD

Il existe au moins un couple d'entiers (u_0,v_0) dans Z^2 tel que :

$$a\,u_0 + b\,v_0 = d \qquad (*)$$

Une démarche algorithmique <u>récursive</u>

fonction [PGCD,u,v] = bezout (a,b)

```
x = a ;
y = abs(b) ;
[q,r] = div (x,y) ;
si r == 0
   PGCD = y ;
   u=0 ;
   v=1 ;
sinon
   [d , u1 ,v1] = bezout (y,r) ;
   PGCD = d ;
   u = v1 ;
   v = signe (b) * (u1- q*v1) ;
fin
```

$a = b\, q_0 + r_0$

$b = r_0\, q_1 + r_1$

$r_0 = r_1\, q_2 + r_2$

….. …….   …….

$r_{N-3} = q_{N-1}\, r_{N-2} + r_{N-1}$

$\boxed{r_{N-2} = q_N\, r_{N-1} + d}$

$r_{N-1} = q_{N+1}\, d + 0$ PGCD $(r_{N-1}, r_N) = d$

$$d = r_{N-2} - q_N\, r_{N-1} = r_{N-2} - q_N\,(r_{N-3} - q_{N-1}\, r_{N-2}) = \ldots = u\, a + v\, b$$

Le théorème de Bézout

2. Clause d'unicité

On suppose a et b non nuls, de PGCD égal à d, avec $a = d\,a'$, $b = d\,b'$ et

$$\mathrm{PGCD}(a',b')=1$$

Les solutions (u,v) dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$a\,u + b\,v = d \qquad (*)$$

sont exactement les couples de la forme

$$(u_0 + b'\,k,\ v_0 - a'\,k)$$

où k désigne un entier arbitraire et (u_0,v_0) une solution particulière de (*)

Le lemme de Gauss

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls

On suppose PGCD (a,b) =1

Alors, si c est un nombre entier relatif tel que b divise ac, nécessairement b divise c.

Carl F. Gauss (1777-1855)

Le théorème d'Euclide (élargi à Z)

Soient a un entier <u>relatif</u> et b un entier positif <u>non nul</u>.
Il existe un UNIQUE couple d'entiers (q,r) tels que :

$$\boxed{a = b\,q + r}$$

et

$$\boxed{r \text{ est entre } 0 \text{ (inclus) et } b-1 \text{ (inclus)}}$$

Définition : le nombre r est dit <u>RESTE</u> dans la division EUCLIDIENNE de a par b.
Le nombre q est dit <u>QUOTIENT</u> dans la division EUCLIDIENNE de a par b.

Nombres rationnels
Nombres réels

- Fractions et développements décimaux périodiques : deux approches des rationnels
- Une approche de l'ensemble des nombres réels
- Suites de nombres réels
- Les opérations sur R
- Le lemme des « gendarmes»
- Borne supérieure, borne inférieure d'un sous-ensemble de R
- Intervalles de R ; la propriété des « segments emboîtés» ; non dénombrabilité de R
- La droite numérique achevée

Fractions : la construction de Q à partir de l'ensemble Z x N*

le point de vue «   abstrait   »

[[(a,b)]] = $\{$ (p,q) dans Z x N* ; a q = p b $\}$

La classe [[(a,b)]] est notée

a/b

Numérateur

Dénominateur

Z sous-ensemble de **Q**

$Q \setminus Z = \{[[(a,b)]] \text{ ; a non multiple de b}\}$

$Z = \{[[(a,b)]] \text{ ; a multiple de b}\}$

Deux opérations …

$$[[(a_1,b_1)]] + [[(a_2,b_2)]] := [[(a_1\, b_2 + a_2\, b_1 \, , \, b_1\, b_2)]]$$

$$[[(a_1,b_1)]] \times [[(a_2,b_2)]] := [[(a_1 a_2 \, , \, b_1 b_2)]]$$

(Q ,+) groupe abélien

Addition

Propriétés des opérations

+

(Q,+, x) corps commutatif

- <u>Commutativité</u>
  x+y=y+x
- <u>Associativité</u>
  x+(y+z)= (x+y) +z
- <u>Elément neutre 0 :</u>
  x+0 = 0 + x = x
- <u>Tout élément x admet un « opposé » -x</u>
  x+ (-x) = (-x) + x = 0

Multiplication

x

- <u>Commutativité</u>
  x x y=y x x
- <u>Associativité</u>
  x x (y x z)= (x x y) x z
- <u>Elément unité 1 = [[(1,1)]]:</u>
  x x 1 = 1 x x = x
- Tout élément non nul admet un inverse pour la multiplication :
  [[(a,b)]] x [[(b,a)]] = 1

<u>Distributivité mult/addition</u>

x x (y+z) = (x x y) + (x x z)

Fractions : développements décimaux

le point de vue «   concret   » (hérité de l'enseignement primaire)

Rationalité → développement décimal périodique

23456 0 | 33567
3315 8 0 | 0 , 6 9

L'un des 33567 restes possibles !

Développement décimal périodique → rationalité

$$x = 12,431\overline{572}$$

$$1000\,x - 12431 = 0,\overline{572}$$

$$1000\,(1000\,x - 12431) = 572,\overline{572}$$

$$1000\,(1000\,x - 12431) - 572 = 1000\,x - 12431$$

$$x = (999 \times 12431 + 572)/999000$$

Fractions : écriture **décimale** et **décimaux**

$$x = m + 0,d_1\,d_2\,d_3\,d_4 \ldots\; d_p \ldots..$$

Partie entière

décimales

$$m + 0,d_1\,d_2\,d_3\,d_4 \ldots\; d_N\; \overline{0}$$

nombres décimaux

$$=$$

$$m + 0,d_1\,d_2\,d_3\,d_4 \ldots\; (d_N\text{-}1)\; \overline{9}$$

Un « manque » à Q : un ensemble majoré n'a pas nécessairement de plus petit majorant dans Q !

<u>Exemple :</u> l'ensemble des nombres rationnels positifs dont le carré est inférieur ou égal à 2 !

Il faut en connaître une (ou plusieurs) preuves !!

Une approche de l'ensemble des nombres réels : les développements décimaux « illimités »

$$x = m + 0,d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ldots\ \ d_p \ldots..$$

Partie entière

décimales

R

Q= {développements illimités avec motif périodique}

Un ordre sur R

$x = m + 0, d_1\ d_2\ d_3\ d_4 \ldots \quad d_p \ldots\ldots$

$x' = m' + 0, d_1'\ d_2'\ d_3'\ d_4' \ldots \quad d_p' \ldots\ldots$

x est «inférieur ou égal à x'» si et seulement si m est inférieur ou égal à m' et si la suite $(d_n)_n$ précède la suite $(d'_n)_n$ pour l'ordre lexicographique construit à partir des lettres {0,…,9}

Suites de nombres réels et convergence

$x_n = x(n)$

$$x_n = m_n + 0,\, d_{n,1}\; d_{n,2}\; d_{n,3}\; d_{n,4} \cdots \quad d_{n,p} \cdots$$

$$x = m + 0,\, d_1\; d_2\; d_3\; d_4 \dots \quad d_p \dots$$

La suite de nombres réels $(x_n)_n$ <u>converge</u> vers le nombre réel x si et seulement si :

1. La suite d'entiers relatifs $(m_n)_n$ finit par «s tationner » pour n assez grand à l'entier relatif m

2. Pour tout entier positif p, la suite de chiffres $(d_{n,p})_n$ finit par «s tationner » pour n assez grand à l'entier d

Une propriété essentielle des suites <u>**monotones**</u> de nombres réels

- **Toute suite $(x_n)_n$ de nombres réels <u>croissante</u> (au sens de l'ordre) et <u>majorée</u> est convergente**
- **Toute suite $(y_n)_n$ de nombres réels <u>décroissante</u> (au sens de l'ordre) et <u>minorée</u> est convergente**

Les opérations sur R

$$x \quad + \quad y \quad = \quad \boxed{x+y}$$

$$x_n \quad + \quad y_n \quad = \quad z_n \qquad \text{(décimaux)}$$

$$x \quad \times \quad y \quad = \quad \boxed{xy}$$

$$x \quad \times \quad y_p \quad = \quad \boxed{u_p}$$

$$x_n \quad \times \quad y_p \quad = \quad u_{p,n} \qquad \text{(décimaux)}$$

Ordre et opérations

- Compatibilité des deux opérations avec l'ordre
- R est <u>archimédien</u> : étant donnés deux nombres réels x et y avec $x > 0$, il existe un entier N tel que $N x > y$

Propriétés des opérations

Addition

+

(R ,+) groupe abélien

(R,+, x) corps commutatif

- Commutativité
  $x+y=y+x$
- Associativité
  $x+(y+z)= (x+y) +z$
- Elément neutre 0 :
  $x+0 = 0 + x = x$
- Tout élément x admet un « opposé » -x
  $x+ (-x) = (-x) + x = 0$

Multiplication

x

- Commutativité
  $x \times y=y \times x$
- Associativité
  $x \times (y \times z)= (x \times y) \times z$
- Elément unité 1:
  $x \times 1 = 1 \times x = x$
- Tout élément non nul admet un inverse pour la multiplication :
  $x\, y = y\, x = 1$

Distributivité mult/addition

$x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)$

Suites adjacentes et lemme « des gendarmes »

Soient deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de nombres réels telles que :

1. Pour tout n dans N, les nombres $x_n, x_{n+1}, y_{n+1}, y_n$ sont rangés dans cet ordre (croissant)
2. La suite $(y_n - x_n)_n$ converge vers 0

Les deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont dites adjacentes

Lemme des gendarmes : ***« deux suites de nombres réels adjacentes sont toutes deux convergentes vers un même nombre réel »***

Un exemple d'application : à la recherche des décimales de π

- $u_n = 4\,(1 - 1/3 + 1/5 + \ldots + 1/(4n-3) - 1/(4n-1))$
- $v_n = u_n + 4/(4n+1)$ [deux suites adjacentes !]

ou par la formule de John Machin (1680-1752)

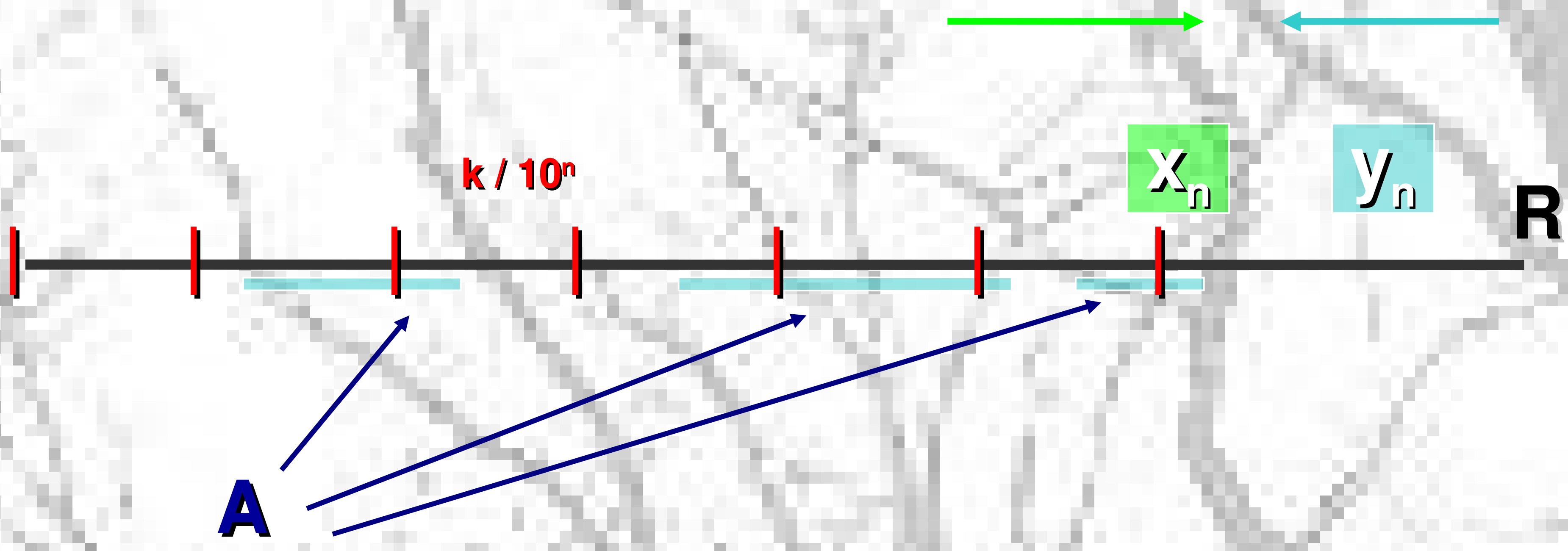
R vérifie la « propriété de la borne supérieure »

Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de R ; l'ensemble des majorants de A admet dans R un plus petit élément (noté sup(A)). Cet élément est appelé <u>borne supérieure de A</u>

<u>Caractérisation de sup (A) (deux clauses)</u>

1. **C'est un majorant de A**
2. **Si y< sup(A), il existe toujours au moins un point x de A avec y<x et x inférieur ou égal à sup (A)**

Une esquisse de preuve *via* le « lemme des gendarmes »



$\sup(A) = \lim (x_n) = \lim (y_n)$

Idem en ce qui concerne la « propriété de la borne inférieure »

Soit A un sous-ensemble non vide et minoré de R ; l'ensemble des minorants de A admet dans R un plus grand élément (noté inf(A)). Cet élément est appelé borne inférieure de A

Caractérisation de inf (A) (deux clauses)

1. **C'est un minorant de A**
2. **Si y > inf (A), il existe toujours au moins un point x de A avec x<y et x supérieur ou égal à inf (A)**

La valeur absolue

$$|x| := \sup(\{ x , -x \})$$

- $|x\ y| = |x|\ \ |y|$
- $|x + y|\qquad |x| + |y|$ (inégalité triangulaire, volet de droite)
- $|\,|x| - |y|\,|\quad |x - y|$ (inégalité triangulaire, volet de gauche)

Quantifier la notion de convergence :

Une suite $(x_n)_n$ de nombres réels converge vers un nombre réel x si et seulement si :

<u>Pour tout</u> ε positif,

<u>il existe</u> $N(\varepsilon)$ dans N ,

tel que :

$n \geqslant N(\varepsilon) \Longrightarrow |x_n - x| \leqslant \varepsilon$

Limites et opérations

- $\lim (x_n) = x$ et $\lim (y_n)=y$ ⇒ $\lim (x_n+y_n) = x+y$
- $\lim (x_n) = x$ et $\lim (y_n) =y$ ⇒ $\lim (x_n y_n) = x y$
- $\lim (x_n) = x$ (non nul) ⇒ $\lim (1/x_n) = 1/x$ *
- $\lim (x_n) =x$ ⇒ $\lim (|x_n|) =|x|$

(*) x_n est forcément non nul pour n assez grand

Intervalles (bornés) de R

- Intervalles **ouverts** :
  $]a,b[= \{x \,;\, a<x<b\}$
- Intervalles **fermés** :
  $[a,b] = \{x \,;\, a \leqslant x \leqslant b\}$
  (on dit aussi «**segments**»)
- Intervalles **semi-ouverts** (2 types) :
  $[a,b[= \{x \,;\, a \leqslant x < b\}$
  $]a,b] = \{x \,;\, a < x \leqslant b\}$

Intervalles (non bornés) de R

- Intervalles **ouverts** : 3 types

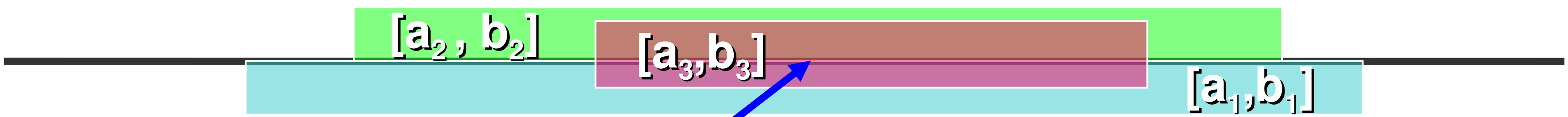
  $\{x \; ; \; x < b\}$, $\{x \; ; \; x > a\}$, R
- Intervalles **fermés** : 3 types

  $\{x \; ; \; x \leqslant b\}$, $\{x \; ; \; x \geqslant a\}$, R

Intérieur, adhérence

- **intérieur (I) :**
  $\mathbf{I \setminus \{bornes\ (sup\ et\ inf)\} = \overset{o}{I}}$
- **adhérence (I) :**
  $\mathbf{I \cup \{bornes\ (sup\ et\ inf)\} = \overline{I}}$

R vérifie le principe des « segments emboîtés »



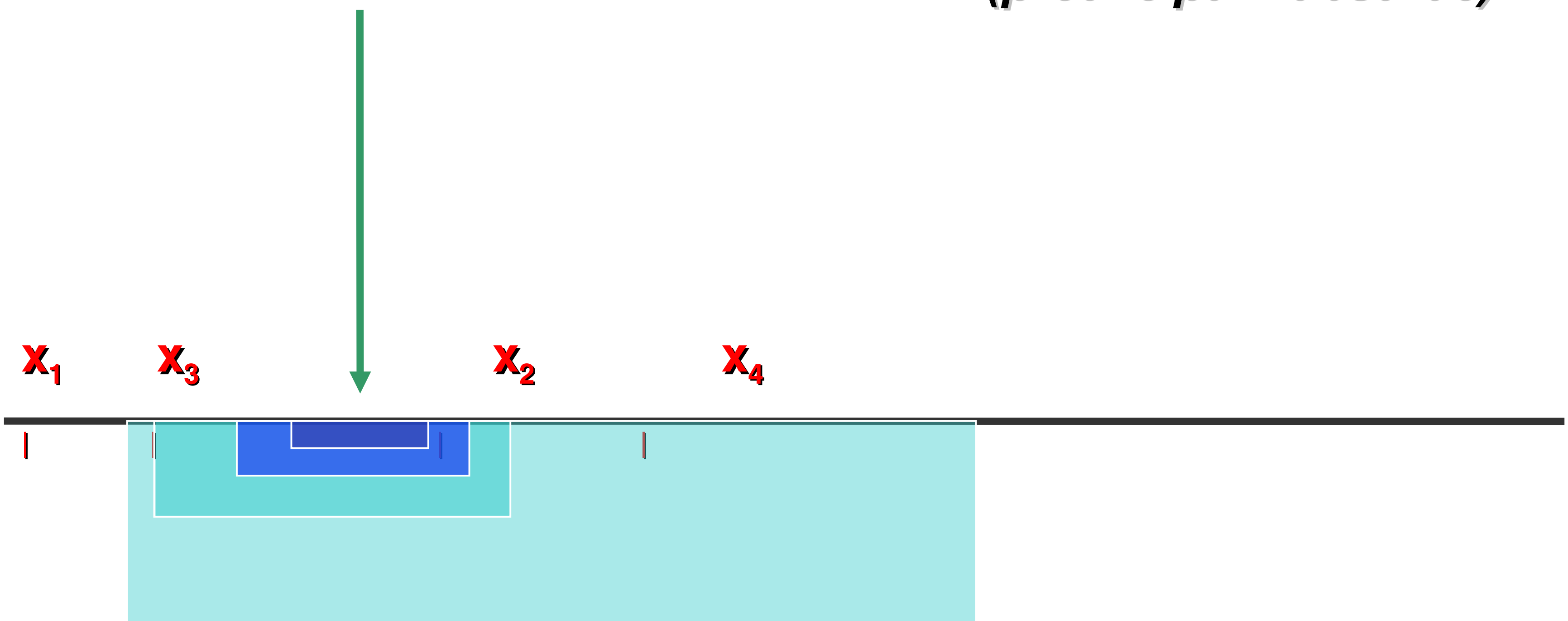
x

Si $([a_n ,b_n])_n$ est une suite de segments <u>emboîtés</u> les uns dans les autres (au sens où $[a_{n+1} ,b_{n+1}]$ est inclus dans $[a_n ,b_n]$ pour tout n) , il existe nécessairement au moins un point dans <u>tous</u> les segments $[a_n ,b_n]$.

Une application du principe des segments emboîtés : la **non-dénombrabilité** de R

$x \quad x_1, x_2, \ldots$

(preuve par l'absurde)

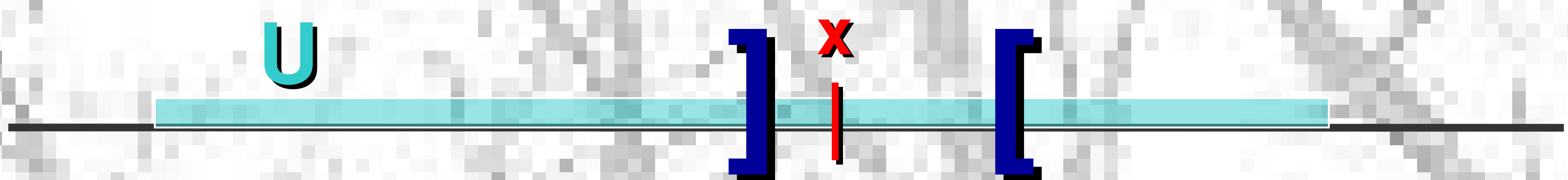


Sous-ensembles ouverts

Un ouvert U de R est un sous-ensemble voisinage de chacun de ses points, ce qui signifie :

Pour tout x dans U,

il existe un intervalle ouvert borné I_x contenant x et inclus dans U



Sous-ensembles **fermés**

Un sous-ensemble F de R est dit fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.

Intérieur, adhérence, frontière d'un sous-ensemble E de R

L'<u>intérieur</u> $\overset{\circ}{E}$ d'un sous-ensemble E de R est <u>le plus grand</u> sous-ensemble ouvert de R <u>inclus</u> dans E

L'<u>adhérence</u> $\overline{E}$ d'un sous-ensemble E de R est <u>le plus petit</u> sous-ensemble fermé de R <u>contenant</u> E

<u>Frontière de</u> **E : =** $\overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$

Caractérisation de l'adhérence

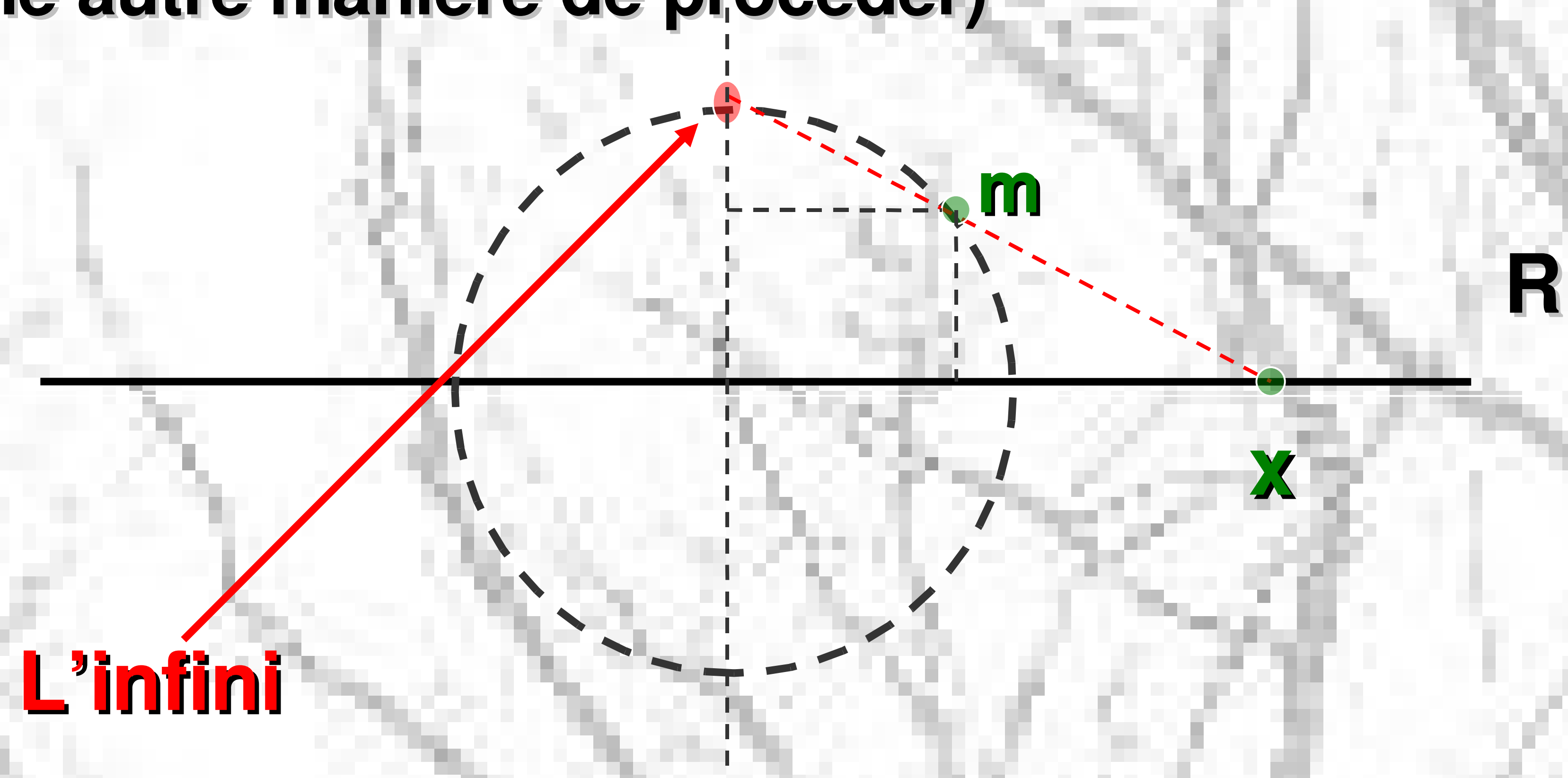
Un point x de R est adhérent à un sous-ensemble E si et seulement si on peut l'atteindre comme limite d'une suite de points de E.

La droite numérique «achevée»

Adjonction à R de deux éléments

La droite numérique «achevée»

(une autre manière de procéder)



Adjonction à R d'un élément

Retour au premier point de vue (deux points à l'infini)

Une suite $(x_n)_n$ de nombres réels tend vers «plus l'infini» si et seulement si :

Pour tout $A > 0$,

il existe un entier $N=N(A)$ dans N tel que :

$n \geqslant N(A) \Rightarrow x_n \geqslant A$

Une suite $(x_n)_n$ de nombres réels <u>tend vers «moins l'infini»</u> si et seulement si :

Pour tout $A > 0$,

il existe un entier $N=N(A)$ dans N tel que :

$n \geqslant N(A) \Rightarrow x_n \leqslant -A$

Attention aux formes indéterminées !

$n^2 - n$?

$(\log n)/n = (1/n) \times \log n$?

quand n tend vers + l'infini

$\mathrm{Lim}\ (a_0\, n^p + a_1\, n^{p-1} + \dots + a_p) =$

+ l'infini   si $a_0 > 0$

- l'infini   si $a_0 < 0$

$$
\begin{aligned}
(x_n \longrightarrow 0) \wedge (\exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall n\,, a \leq y_n \leq b) &\implies (x_n y_n \longrightarrow 0)\\
(x_n \longrightarrow +\infty) &\implies (\frac{1}{x_n} \longrightarrow 0_+)\\
(x_n \longrightarrow -\infty) &\implies (\frac{1}{x_n} \longrightarrow 0_-)\\
(x_n \longrightarrow +\infty) \wedge (\exists a \in \mathbb{R},\ \forall n\,, y_n \geq a) &\implies x_n + y_n \longrightarrow +\infty\\
(x_n \longrightarrow -\infty) \wedge (\exists b \in \mathbb{R},\ \forall n\,, y_n \leq b) &\implies x_n + y_n \longrightarrow -\infty\\
(x_n \longrightarrow +\infty) \wedge (\exists c > 0,\ \forall n >> 0\,, y_n \geq c) &\implies x_n y_n \longrightarrow +\infty\\
(x_n \longrightarrow -\infty) \wedge (\exists c > 0,\ \forall n >> 0\,, y_n \geq c) &\implies x_n y_n \longrightarrow -\infty\\
(x_n \longrightarrow +\infty) \wedge (\exists c > 0,\ \forall n >> 0\,, y_n \leq -c) &\implies x_n y_n \longrightarrow -\infty\\
(x_n \longrightarrow -\infty) \wedge (\exists c > 0,\ \forall n >> 0\,, y_n \leq -c) &\implies x_n y_n \longrightarrow +\infty
\end{aligned}
$$

Le plan R^2 et les nombres complexes

- **Le plan R^2**
- **Le corps (C , + , x)**
- **Module et argument**
- **La fonction exponentielle complexe et les formules de Moivre et d'Euler**
- **Résolution dans C de l'équation algébrique $z^n=A$**
- **Résolution dans C des équations du second degré**

Le plan $\mathbb{R}^2$: une structure d'espace vectoriel

Addition (loi <u>interne</u>)

$$(x_1\,,\,y_1) + (x_2\,,\,y_2) := (x_1+x_2\,,\,y_1+y_2)$$

(pour $(x_1\,,\,y_1)$, (x_2, y_2) dans R^2)

Action « <u>externe</u> » de R sur R^2

$$a\,.\,(x\,,\,y) = (a \times x\,,\,a \times y)$$

(pour a dans R , (x, y) dans R^2)

Les règles régissant les deux opérations (interne et externe)

- $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe abélien
- $a \,.\, \big(b \,.\, (x,y)\big) = (a \times b) \,.\, (x,y)$
- $(a+b) \,.\, (x,y) = a \,.\, (x,y) + b \,.\, (x,y)$
- $a \,.\, \big((x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = a \,.\, (x_1, y_1) + a \,.\, (x_2, y_2)$
- $1 \,.\, (x,y) = (x,y)$

$(\mathbb{R}^2, +, .)$ R-espace vectoriel

Applications <u>linéaires</u> du plan dans lui-même

$$L\Big(a\,.\,(x_1\,,\,y_1) + b\,.\,(x_2\,,y_2)\Big) =$$

$$a\,.\,L\Big((x_1,y_1)\Big) + b\,.\,L\Big((x_2\,,y_2)\Big)$$

Application linéaire $\Longleftrightarrow$ tableau 2 x 2

$$L\big((1,0)\big) = (a\ ,\ c)$$

$$L\big((0,1)\big) = (b\ ,\ d)$$

Matrice de L

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad L\big((x,y)\big) = (a\,x + b\,y\ ,\ c\,x + d\,y)$$

Composition des applications linéaires et «produit» de tableaux 2 x 2

L_1

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

L_2

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

$L_2 \circ L_1$

$$\begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1+b_2d_1 \\ c_2a_1+d_2c_1 & c_2b_1+d_2d_1 \end{pmatrix}$$

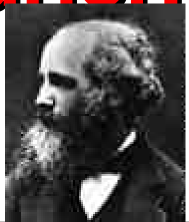
Les complexes ; pourquoi ? Des motivations issues de la physique (et quelques noms)

- Hydrodynamique, Mécanique des fluides (A. Cauchy, G. Stokes, …)
- Astronomie et Mécanique Céleste (P. S. Laplace,…)
- Mécanique Ondulatoire, Thermodynamique, Optique, Electromagnétisme (J. B. J. Fourier, J. C. Maxwell, ..)

Augustin Cauchy
1789-1857

Joseph Fourier
1768-1830

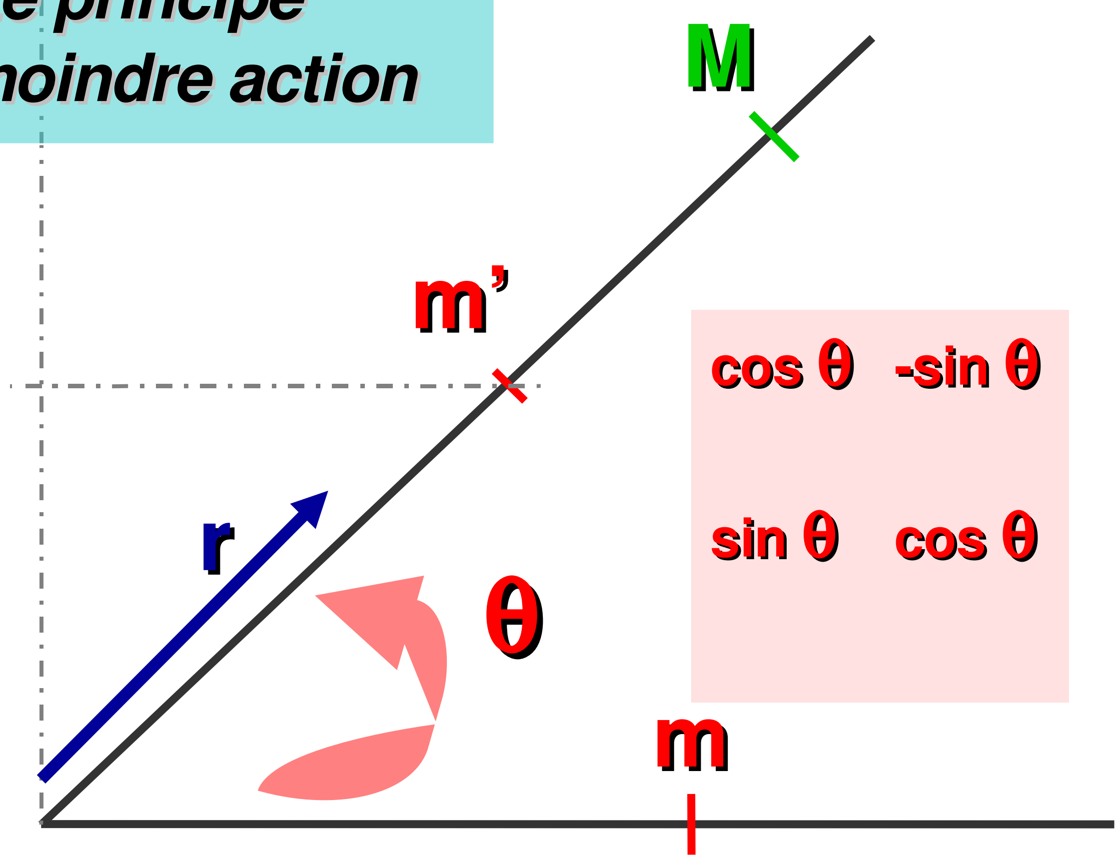
Pierre Simon Laplace
1749-1827



James C. Maxwell
1831-1879

Quelles sont les applications linéaires préservant les angles orientés des figures ??

Le principe de moindre action



$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$a = r\cos(\theta)$$

$$b = r\sin(\theta)$$

L’ensemble des nombres complexes (l’ensemble C)

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \; ; \quad a \, , b \text{ dans } R \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a+ib = a \cdot 1 + b \cdot i$$

L'addition sur C

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -(b_1+b_2) \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$$

$$(a_1 + i\, b_1)+(a_2 + i\, b_2) := (a_1+a_2) + i\,(b_1+b_2)$$

$$(a_1+i\,b_1) \times (a_2 + i\,b_2) = (a_1a_2-b_1b_2) + i\,(a_1b_2 + b_1\,a_2)$$

La Multiplication
Sur C

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -(a_1b_2+b_1a_2) \\ a_1b_2+b_1a_2 & a_1a_2-b_1b_2 \end{pmatrix}$$

Inverse d'un élément non nul pour la multiplication

$$(a+ib) \times \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \times (a+ib) = 1$$

Propriétés des opérations

Addition

+

(C ,+) groupe abélien

- Commutativité
  $z_1+z_2=z_2+z_1$
- Associativité
  $z_1+(z_2+z_3)= (z_1+z_2) +z_3$
- Elément neutre 0 :
  $z+0 = 0 + z = z$
- Tout élément z admet un « opposé » -z
  $z+ (-z) = (-z) + z = 0$

(C,+, x) corps commutatif

Multiplication

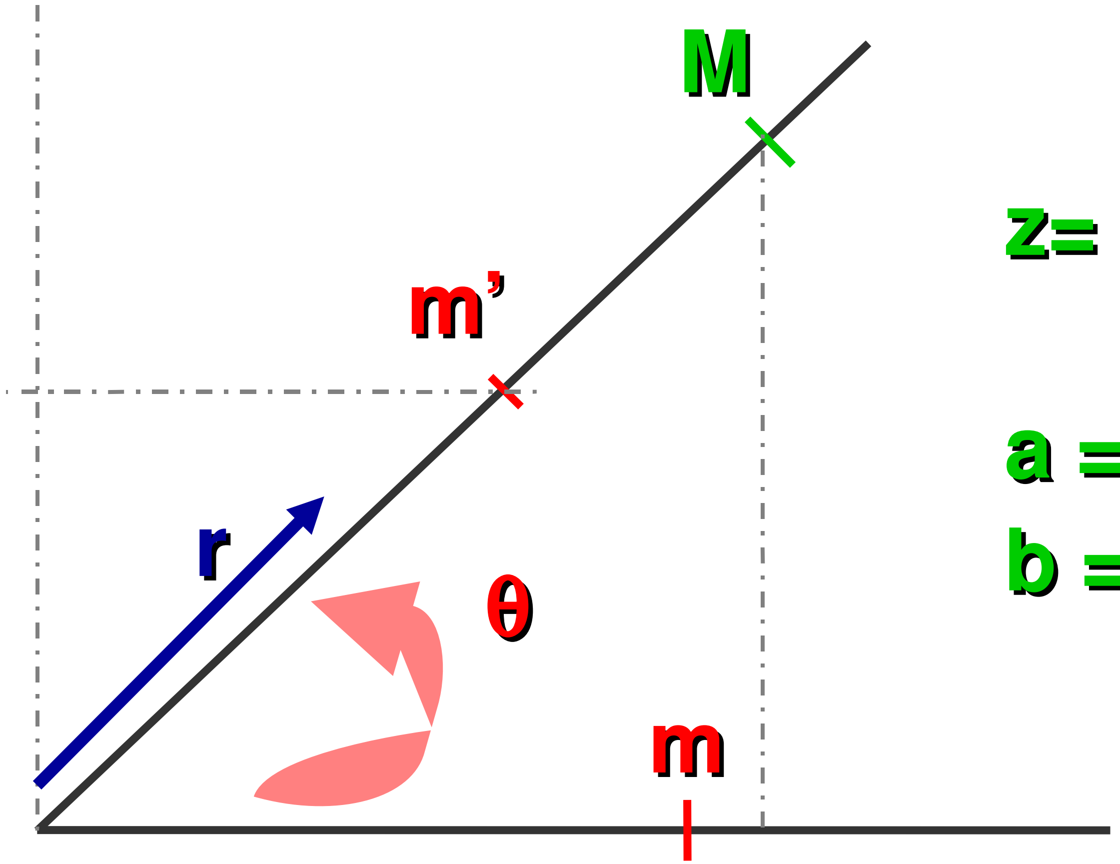
x

- Commutativité
  $z_1 \times z_2=z_2 \times z_1$
- Associativité
  $z_1 \times (z_2 \times z_3)= (z_1 \times z_2) \times z_3$
- Elément unité 1:
  $z \times 1 = 1 \times z = z$
- Tout élément non nul admet un inverse pour la multiplication :
  $z z^{-1} = z^{-1} z = 1$

Distributivité mult/addition

$z_1 \times (z_2+z_3) = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3)$

Module et argument (d'un nombre complexe non nul)



$z = a+ib$

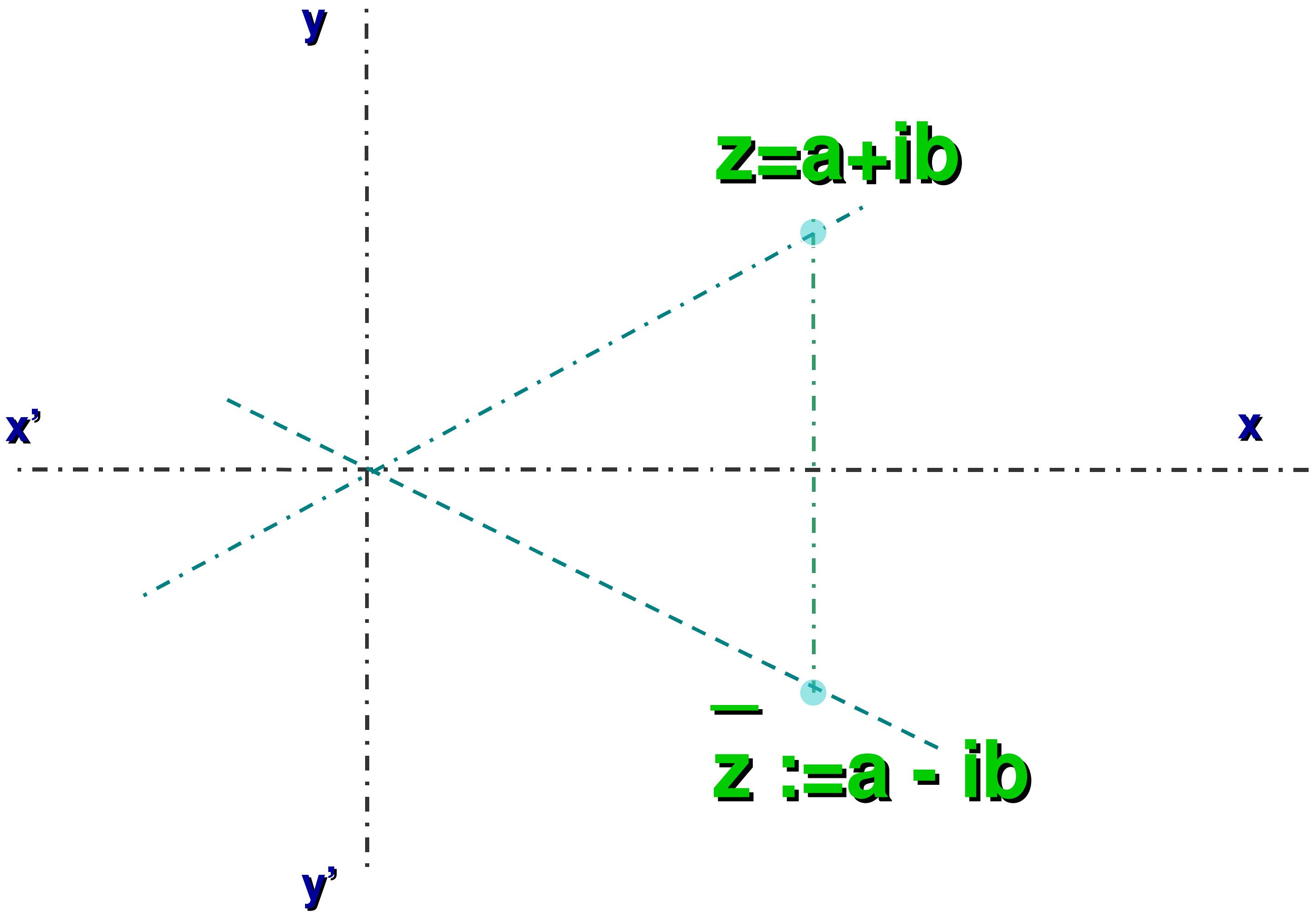
$a = r \cos(\theta)$

$b = r \sin(\theta)$

$r = |z| = (a^2+b^2)^{1/2}$: <u>module</u> (amplitude) de z

θ (modulo 2π) = arg (z) : <u>argument</u> (phase) de z

Conjugaison complexe



Quelques formules utiles (sans ambiguïté)

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$|z_1 \, z_2| = |z_1| \times |z_2|$$

$$|z|^2 = z \, \bar{z}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$1/z = \bar{z} \,/ |z|^2$$

$$\overline{z_1 \, z_2} = \bar{z}_1 \, \bar{z}_2$$

D'autres formules (à manier avec précaution !)

$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ si z est non nul

<u>Attention</u> !! Ce sont des égalités entre classes de nombres réels modulo 2π

La fonction exponentielle

sur R : $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$

sur C : $\exp(x+iy) := \exp(x) \times (\cos(y) + i \sin(y))$

sur C : $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$

En particulier : $\exp(z) = 1/(\exp(-z))$ [**non nul**]

$i^2 = -1$

3.14159265358979385...

$$e^{2 i \pi} = 1$$

fonction exponentielle

$e = \exp(1) = e^1 = 2.7182818284590452354...$

Formes trigonométriques, forme cartésienne d'un nombre complexe

- Forme trigonométrique : $\boxed{z = r \cos \theta + i\, r \sin \theta}$
- (avec $r=|z|$ et $\theta = \arg(z)$ [modulo 2π])

- Autre forme trigonométrique : $\boxed{z = r \exp(i\,\theta)}$

(avec $r=|z|$ et $\theta = \arg(z)$ [modulo 2π])

- Forme cartésienne : $\boxed{z = a + i\, b}$

(avec $a = \mathrm{Re}(z)$ [partie réelle] et $b = \mathrm{Im}(z)$ [partie imaginaire])

Les formules de MOIVRE

$$\cos(n\theta) = \sum_{\{p\in\mathbb{N}\,;\,2p\leq n\}} \binom{n}{2p}(-1)^p(\sin\theta)^{2p}(\cos\theta)^{n-2p}$$

$$\sin(n\theta) = \sum_{\{p\in\mathbb{N}\,;\,2p+1\leq n\}} \binom{n}{2p+1}(-1)^p(\sin\theta)^{2p+1}(\cos\theta)^{n-(2p+1)}$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Les formules d'Euler

$$(\cos\theta)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{i(n-2k)\theta} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos((n-2k)\theta)$$

$$(\sin\theta)^n = \frac{(-i)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k e^{i(n-2k)\theta}$$

$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(-1)^k\cos((2(p-k)\theta)\ si\ n=2p$$

$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p+1}}\sum_{k=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k}(-1)^k\sin((2(p-k)+1)\theta)\ si\ n=2p+1.$$

$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ **$\sin\theta = (-i/2)\,(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$**

Résoudre $a z^2 + b z + c = 0$

$$az^2+b z+c = a\left(z^2 + (b/a)\, z\right) + c$$

$$= a\left(\left(z+ b/(2a)\right)^2 - (b^2-4ac)/(4a^2)\right)$$

δ= discriminant

$\boxed{X^2 = (b^2-4ac)/(4a^2)}$ a (dans C) deux racines $X=u$ et $X=-u$ distinctes si b^2-4ac est non nul

Conclusion : 2 cas à distinguer

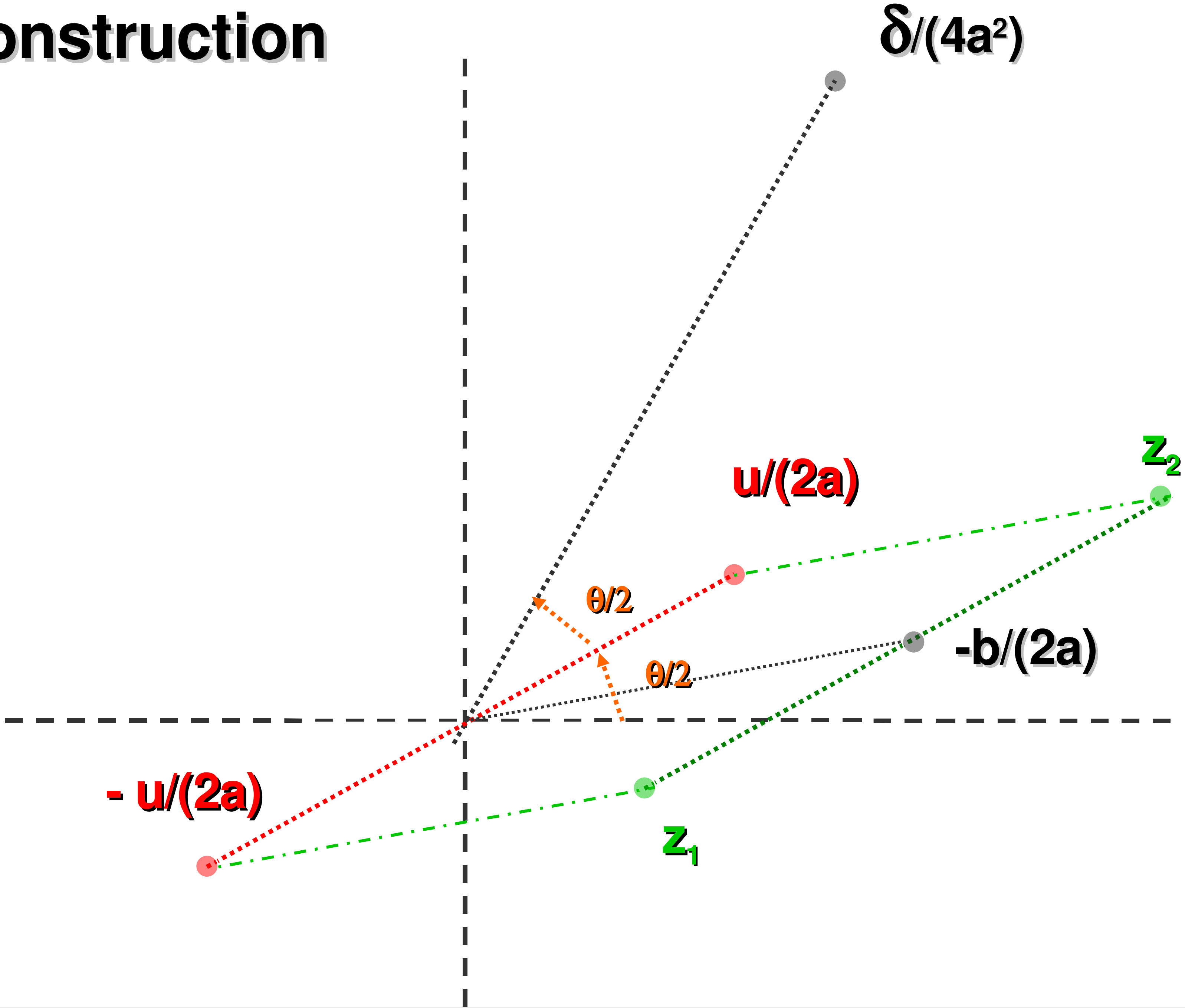
- Si $b^2 - 4\ ac = 0$, il y a une seule solution donnée par $z = -b/(2a)$
- Si $b^2 - 4\ ac$ non nul, il y a deux solutions données par :

$$z_1 = -b/(2a) - u/(2a)$$

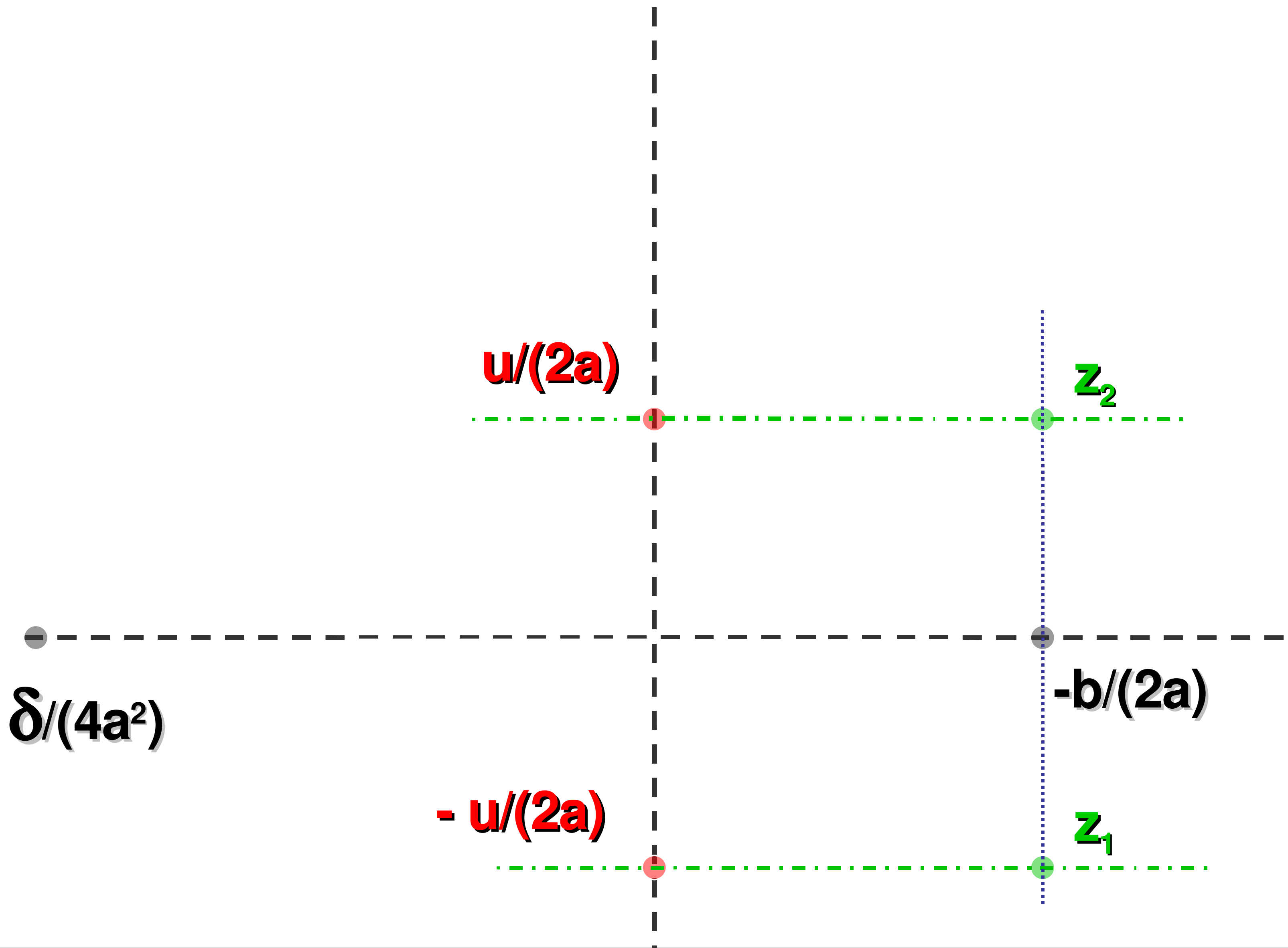
$$z_2 = -b/(2a) + u/(2a)$$

$$u^2 = b^2 - 4\ ac$$

Construction



Cas particulier : a,b,c réels et $\delta < 0$



Autres relations utiles pour le calcul de la racine carrée

- $Re(z^2) = x^2 - y^2$
- $|z^2| = x^2 + y^2$
- $\Rightarrow$ $x^2 = [|z^2| + Re(z^2)]/2$
- $y^2 = [|z^2| - Re(z^2)]/2$
- $Im(z^2) = 2xy$
- $\Rightarrow$ signe($Im(z^2)$) = signe (xy)

$\Rightarrow$ **Détermination des racines De $z^2 = A$ sans ambiguïté**

Fin du chapitre 2