UE MHT512
Devoir surveillé, Mardi 23 Octobre 2007

Durée : 3 heures

Texte (*en italiques*) et corrigé (en roman)

Exercice 1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I, à valeurs réelles et monotone sur I.*

a. *Montrez que f est nécessairement $(I,\mathcal{B}(I))$-$(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.*

Pour fixer les idées, on supposera ici f croissante sur I (sinon on remplace f par $-f$). La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est engendrée (par exemple) par tous les intervalles semi-fermés à droite $]\alpha,\beta]$ $(-\infty < \alpha < \beta < +\infty[)$ ou $]\alpha,+\infty[$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ (voir l'exemple 1.2 du cours introduisant la définition de la tribu borélienne). Pour montrer que f est mesurable, il suffit donc de montrer que l'image réciproque par f de tout intervalle de ce type est un borélien de I. On peut même se limiter à montrer que $f^{-1}(]\alpha,+\infty[)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, est un borélien de I (car les intervalles $]\alpha,+\infty[$ suffisent à engendrer la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Or

$$f^{-1}(]a,+\infty[) = \{t \in I\,;\, f(t) > \alpha\} = \Big(\sup\{t \in I\,;\, f(t) = \alpha\}\,,\, +\infty\Big[\cap I$$

si $\alpha \in f(I)$ (la borne inférieure gauche pouvant être incluse ou non) ; sinon cet ensemble $f^{-1}(]\alpha,+\infty[)$ est soit vide, soit égal à I tout entier. Ceci prouve que l'image réciproque de $]\alpha,+\infty[$ par f est en tout cas toujours un borélien de I, donc que f est $(I,\mathcal{B}(I))$-$(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

b. *On suppose $I = [a,b]$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. La fonction f est-elle une fonction intégrable relativement à la mesure de Lebesgue sur I ?*

Si $I = [a,b]$, la monotonie de f implique que $f(I)$ est inclus dans l'intervalle fermé borné de bornes $f(a)$ et $f(b)$. La fonction f est donc une fonction $(I,\mathcal{B}(I))$-$(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurable telle que $|f|$ est bornée par une constante $M = \sup(|f(a)|,|f(b)|)$ sur I. Le critère de domination de la proposition 2.9 implique donc l'intégrabilité de f par rapport à la mesure de Lebesgue puisque la fonction constante $t \longmapsto M$ est intégrable sur $I = [a,b]$ relativement à la mesure de Lebesgue.

Exercice 2.

Déterminer les limites, lorsque n tend vers $+\infty$, des deux suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où

$$I_n \;:=\; \int_{[0,1]} \frac{1+t^2+\cdots+t^{2n}}{1+t+\cdots+t^n}\,dt$$

$$J_n \quad := \quad \int_{[1/2,1]} \frac{t+t^2+\cdots+t^n}{t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+\frac{t^n}{n}}\, dt\,.$$

Dans chacun des deux cas, on citera avec précision le résultat du cours utilisé et l'on justifiera le fait qu'il s'applique.

Pour tout $t \in [0,1[$,

$$\frac{1+t^2+\cdots+t^{2n}}{1+t+\cdots+t^n} = \frac{1-t^{2(n+1)}}{1-t^2} \times \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\,.$$

Pour tout $t \in [0,1[$, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{1+t^2+\cdots+t^{2n}}{1+t+\cdots+t^n}\Big) = \frac{1-t}{1-t^2} = \frac{1}{1+t}\,.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$,

$$0 \leq \frac{1+t^2+\cdots+t^{2n}}{1+t+\cdots+t^n} \leq 1$$

puisque $t^{2k} \leq t^k$ pour tout k, ce qui implique que le numérateur de la fraction concernée (en ajoutant ces inégalités pour $k = 0,...,n$) est bien majoré par son dénominateur. Comme la fonction $t \longmapsto 1$ est mesurable intégrable sur $[0,1]$ relativement à la mesure de Lebesgue, elle fait office de chapeau majorant pour la suite de fonctions

$$f_n \ : t \in [0,1] \longmapsto \frac{1+t^2+\cdots+t^{2n}}{1+t+\cdots+t^n}\,, \ n = 1,2,...$$

Le théorème de convergence dominée (théorème 2.3 du cours) s'applique et l'on peut affirmer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{[0,1]} \frac{dt}{1+t} = [\log(1+t)]_0^1 = \log 2\,.$$

Dans le second exemple, on utilise le fait que, pour $t \in [0,1[$,

$$\log(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$$

(ce résultat supposé connu s'obtient en intégrant terme à terme sur $[0,t[$ la somme de la série géométrique). Posons, pour $t \in [1/2,1]$,

$$g_n(t) := \frac{t+t^2+\cdots+t^n}{t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+\frac{t^n}{n}}\,, \ n = 1,2,...$$

Pour tout $t \in [1/2, 1[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} (g_n(t)) = \lim_{n\to+\infty} t\frac{1-t^n}{(1-t)} \times \frac{1}{-\log(1-t)} = \frac{-t}{(1-t)\log(1-t)}\,.$$

D'après le lemme de Fatou (théorème 2.2 du cours)

$$\int_{[1/2,1]} \liminf_{n\to+\infty} g_n(t)\,dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \Big(\int_{[1/2,1]} g_n(t)\,dt\Big)\,,$$

soit

$$\int_{[1/2,1]} \frac{tdt}{(t-1)\log(1-t)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \Big(\int_{[1/2,1]} g_n(t)\,dt\Big)\,.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1-\epsilon} \frac{tdt}{(t-1)\log(1-t)} &\geq -\frac{1}{2}\int_{\epsilon}^{1/2} \frac{du}{u\log u} \\ &= -\frac{1}{2}[\log(|\log u|)]_{\epsilon}^{1/2} = -\frac{\log(\log 1/2)}{2} + \frac{\log(|\log\epsilon|)}{2}\end{aligned}$$

et l'on a

$$\lim_{\epsilon\to 0} \log(|\log\epsilon|) = +\infty\,,$$

ce qui implique

$$\int_{[1/2,1]} \frac{tdt}{(t-1)\log(1-t)} = +\infty\,.$$

Le lemme de Fatou permet donc de conclure

$$\liminf_{n\to+\infty} \Big(\int_{[1/2,1]} g_n(t)\,dt\Big) = +\infty\,,$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = +\infty\,.$$

Exercice 3.

Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu, $\mu\ : \mathcal{T} \longrightarrow [0,\infty]$ une mesure positive, $f\ : \Omega \longrightarrow [0,\infty]$ une fonction $(\Omega,\mathcal{T})$-$([0,\infty],\mathcal{B})$ mesurable.

a. *On suppose qu'il existe un nombre $T > 0$ tel que*

$$\int_{\Omega} [f(\omega)]^{-T}\,d\mu(\omega) < \infty \text{ et } \int_{\Omega} [f(\omega)]^{T}\,d\mu(\omega) < \infty\,.$$

Montrer que les ensembles $\{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) = 0\}$ et $\{\omega \in \Omega\,;\, f(\omega) = +\infty\}$ sont μ-négligeables.

D'après l'inégalité de Markov (proposition 2.3 du cours), la mesure de l'ensemble $\{f > n\}$ est majorée par

$$\mu(\{f > n\}) \leq \frac{1}{n^T} \int_\Omega [f(\omega)]^T \, d\mu(\omega)$$

puisque

$$[f(\omega)]^T = \exp(T \log f) > \exp(T \log n) = n^T$$

sur l'ensemble $\{\omega \, ; \, f(\omega) > n\}$. Comme

$$\{f = +\infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{f > n\} \,,$$

l'intersection étant décroissante, et que

$$\mu(\{f > n\}) \leq \frac{1}{n^T} \int_\Omega [f(\omega)]^T \, d\mu(\omega)$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (puisque f^T est intégrable relativement à μ sur Ω), on a

$$\mu(\{f = \infty\} = \lim_{n \to +\infty} (\mu(\{f > n\}) = 0 \,.$$

De même, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu(\{f < 1/n\}) \leq \frac{1}{n^T} \int_\Omega [f(\omega)]^{-T} \, d\mu(\omega)$$

puisque

$$[f(\omega)]^{-T} = \exp(-T \log f) > \exp(T \log n) = n^T$$

sur l'ensemble $\{\omega \, ; \, f(\omega) < 1/n\}$. Comme

$$\{f = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{f < 1/n\} \,,$$

l'intersection étant décroissante, et que

$$\mu(\{f < 1/n\}) \leq \frac{1}{n^T} \int_\Omega [f(\omega)]^{-T} \, d\mu(\omega)$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (puisque f^{-T} est intégrable relativement à μ sur Ω), on a

$$\mu(\{f = 0\} = \lim_{n \to +\infty} (\mu(\{f < 1/n\}) = 0 \,.$$

b. *On suppose maintenant que* $f(\Omega) \subset]0,\infty[$. *Sous les hypothèses du* **a**, *vérifier que si* z *est un nombre complexe de partie réelle dans* $[-T,T]$, *la fonction*

$$\omega \longmapsto [f(\omega)]^z$$

est intégrable relativement à la mesure μ, *ainsi que toutes les fonctions*

$$\omega \longmapsto (\log[f(\omega)])^k\,,\ k \in \mathbb{N}\,,$$

et que l'on a, si de plus z *est tel que* $|z| < T$,

$$\int_\Omega f^z\, d\mu = \int_\Omega \exp(z \log[f(\omega)])\, d\mu(\omega) = \sum_{k=0}^\infty \Big(\int_\Omega (\log[f(\omega)])^k\, d\mu(\omega)\Big) \frac{z^k}{k!}\,.$$

On prendra soin de citer avec précision le théorème que l'on utilise pour justifier l'intervertion entre série et prise d'intégrale impliquant la seconde égalité.

Si $\operatorname{Re} z \in [-T,T]$, on a, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$|[f(\omega)]^z| = \exp(\operatorname{Re} z \times \log[f(\omega)]) \le \sup([f(\omega)]^T, [f(\omega)]^{-T})$$

(on distingue par exemple les cas $f(\omega) \in]0,1[$ et $f(\omega) \ge 1$). Comme les deux fonctions f^T et f^{-T} sont supposées intégrables, la fonction f^z l'est aussi d'après le critère de domination donné par la proposition 2.9 du cours.

Sur $\{f \in [1,+\infty[\}$, on peut écrire

$$f^T = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\log f)^k}{k!} T^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{(|\log f|)^k}{k!} T^k$$

tandis que sur $\{f \in]0,1[\}$, on peut écrire

$$f^{-T} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(\log f)^k}{k!} T^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{(|\log f|)^k}{k!} T^k\,.$$

On a donc

$$\int_\Omega \Big(\sum_{k=0}^\infty \frac{(|\log f(\omega)|)^k}{k!} T^k \Big)\, d\mu(\omega) \le \int_{\{f \in]0,1[\}} f^{-T}\, d\mu + \int_{\{f \ge 1\}} f^T\, d\mu < \infty\,.$$

Ceci prouve l'intégrabilité de toutes les fonctions $\omega \longmapsto (\log[f(\omega)])^k$, $k \in \mathbb{N}$, par rapport à la mesure μ.

Pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\exp(z \log[f(\omega)]) = \lim_{n \to +\infty} \Big(\sum_{k=0}^n \frac{(\log[f(\omega)])^k}{k!} z^k \Big)$$

d'après le développement en série entière $e^z = \sum_0^\infty z^k/k!$ de l'exponentielle complexe). La fonction

$$\omega \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\log f(\omega)|)^k}{k!}|z|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\log f(\omega)|)^k}{k!} T^k\,,$$

qui est mesurable comme limite de fonctions mesurables et de plus, d'après ce qui précède, intégrable par rapport à μ sur Ω, joue le rôle de chapeau intégrant coiffant toutes les fonctions

$$\omega \longmapsto \Big|\sum_{k=0}^{n} \frac{(\log[f(\omega)])^k}{k!} z^k\Big|\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 2.3 du cours) permet donc d'affirmer que, pour tout z tel que $|z| < T$ (même d'ailleurs $|z| \leq T$), on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\log[f(\omega)])^k}{k!}\, z^k\Big)\, d\mu(\omega) = \\
&= \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\log[f(\omega)])^k}{k!}\, z^k\Big)\, d\mu(\omega) \\
&= \int_\Omega \exp(z\log[f(\omega)])\, d\mu(\omega)\,,
\end{aligned}$$

ce qui est la formule demandée.

Exercice 4.

a. *Soit $P = [a,b]$ un segment borné de $\mathbb{R}$. Calculer, pour $\omega \in \mathbb{R}$, l'intégrale*

$$\int_{[a,b]} e^{-i\omega t}\, dt$$

et vérifier que

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} \Big(\int_{[a,b]} e^{-i\omega t}\, dt\Big) = 0\,.$$

Le calcul donne

$$\int_{[a,b]} e^{-i\omega t}\, dt = \Big[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\Big]_a^b = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega}$$

si $\omega \neq 0$ et $b-a$ si $\omega = 0$. Comme $|e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}| \leq 2$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\Big| \int_{[a,b]} e^{-i\omega t}\, dt \Big| \leq \frac{2}{|\omega|}$$

pour tout ω dans $\mathbb{R}^*$, d'où

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \Big(\int_{[a,b]} e^{-i\omega t}\, dt \Big) = 0\,.$$

b. *Soit f une fonction $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$-$(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ mesurable et de plus intégrable sur $\mathbb{R}$ relativement à la mesure de Lebesgue. Vérifier que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction φ_ϵ, combinaison linéaire finie à coefficients complexes de fonctions caractéristiques de segments bornés du type $[\alpha, \beta]$, telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - \varphi_\epsilon(t)|\, dt < \epsilon\,.$$

Indication : *on commencera par montrer ce résultat lorsque f est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble intégrable de $\mathbb{R}$ (relativement à la mesure de Lebesgue), puis on l'étendra au cas où f est une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $[0, \infty]$, intégrable sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue, avant de passer finalement au cas général.*

Si $f = \chi_A$, où A est un sous-ensemble intégrable de $\mathbb{R}$, on sait (d'après le critère d'intégrabilité de la proposition 1.4) qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_A(t) - \chi_U(t)|\, dt = \mu(U \setminus A) < \epsilon/2\,;$$

pour prouver le résultat pour $f = \chi_A$, il suffit de le prouver pour $f = \chi_U$ avec ouvert intégrable en construisant φ_ϵ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_U(t) - \varphi_\epsilon(t)|\, dt < \epsilon/2\,.$$

Si $U = I$ est un intervalle ouvert $]a, b[$ de mesure finie (donc borné), le résultat est vrai car on a $f = \chi_{[a,b]}$ presque partout ; si maintenant f est la fonction caractéristique d'une union finie d'intervalles ouverts bornés disjoints, le résultat est encore vrai par linéarité de la prise d'intégrale ; or tout ouvert intégrable s'écrivant comme union dénombrable d'intervalles ouverts bornés disjoints, le résultat pour χ_U, où U est un ouvert intégrable quelconque, résulte du théorème de convergence monotone de Beppo-Levi (théorème 2.1 du cours). C'est encore ce même théorème qui permet, en utilisant le fait que toute fonction mesurable positive intégrable est limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives intégrables (pour lesquelles le résultat est acquis par linéarité), de l'étendre au cas où f est une fonction mesurable positive, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour finir, dans le cas général, on utilise le résultat acquis ainsi pour $(\mathrm{Re}\, f)^{\pm}$ et $(\mathrm{Im}\, f)^{\pm}$ (toutes mesurables positives et intégrables) et la formule

$$f = (\mathrm{Re}\, f)^+ - (\mathrm{Re}\, f)^- + i(\mathrm{Im}\, f)^+ - i(\mathrm{Im}\, f)^-$$

pour en déduire (par linéarité de la prise d'intégrale) le résultat pour f.

c. *Soit f une fonction $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$-$(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ mesurable et de plus intégrable sur $\mathbb{R}$ relativement à la mesure de Lebesgue. Montrer que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-i\omega t} f(t)$ est aussi mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}$ relativement à la mesure de Lebesgue, et que de plus*

$$\lim_{\omega \to +\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t)\, dt \Big) = 0\,.$$

Il existe, pour tout $\epsilon > 0$, une fonction φ_ϵ, combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de segments bornés $[\alpha, \beta]$, telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - \varphi_\epsilon(t)|\, dt < \epsilon/2\,;$$

ceci résulte du **(b)**. On écrit ensuite, pour $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Big| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \Big| &\leq \Big| \int_{\mathbb{R}} \varphi_\epsilon(t) e^{-i\omega t}\, dt \Big| + \Big| \int_{\mathbb{R}} (f(t) - \varphi_\epsilon(t)) e^{-i\omega t}\, dt \Big| \\
&\leq \Big| \int_{\mathbb{R}} \varphi_\epsilon(t) e^{-i\omega t}\, dt \Big| + \int_{\mathbb{R}} |f(t) - \varphi_\epsilon(t)|\, dt \\
&\leq \Big| \int_{\mathbb{R}} \varphi_\epsilon(t) e^{-i\omega t}\, dt \Big| + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

en utilisant au passage le fait que le module d'une intégrale est majoré par l'intégrale du module de la fonction sous l'intégrale (proposition 2.7 du cours). On applique maintenant le résultat du **(a)** qui assure, du fait de la forme de φ_ϵ, que

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi_\epsilon(t) e^{-i\omega t}\, dt \Big) = 0\,.$$

En particulier, pour $\omega > \Omega(\epsilon)$, on a

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} \varphi_\epsilon(t) e^{-i\omega t}\, dt \Big| \leq \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Au bilan final, on a donc, pour $\omega > \Omega(\epsilon)$,

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \Big| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

On a bien montré ainsi le résultat demandé (car ϵ était arbitraire).

Exercice 5.

Soit Ω un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω, $\mu\ :\mathcal{T} \longrightarrow [0,\infty]$ une mesure positive $f\ :\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $(\Omega,\mathcal{T})$-$(\mathbb{C},\mathcal{B})$ mesurable, intégrable sur Ω relativement à la mesure μ. Prouver

$$\lim_{R\to+\infty} [R\,\mu(\{|f| \geq R\})] = 0\,.$$

On écrit, grâce à l'inégalité de Markov (proposition 2.3 du cours),

$$R\mu\{|f| \geq R\} \leq \int_{\{|f|\geq R\}} |f|\, d\mu = \int_\Omega |f| \chi_{\{|f|>R\}}\, d\mu\,. \qquad (*)$$

Or

$$\int_\Omega |f|\, d\mu < \infty$$

car f est supposée intégrable relativement à la mesure μ. Si $(R_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres strictement positifs tendant vers $+\infty$, il résulte du théorème de convergence dominée de Lebesgue (théorème 2.3 du cours) que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f| \chi_{\{|f|>R_n\}}\, d\mu = 0 \qquad (**)$$

puisque, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{n\to+\infty} [|f|\chi_{\{|f|>R_n\}}](\omega) = 0$$

puisque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ (donc finies) partout. La conclusion voulue

$$\lim_{R\to+\infty} [R\,\mu(\{|f| \geq R\})] = 0\,.$$

découle alors du fait que

$$\lim_{n\to+\infty} [R_n\,\mu(\{|f| \geq R_n\})] = 0$$

du fait de la majoration $(*)$ et du résultat $(**)$, ce pour toute suite $(R_n)_{n\geq 0}$ tendant vers $+\infty$.