TP6 : Le principe de l'élimination algébrique sous `Maple12`

Cette séance de TP6 s'inscrit dans la poursuite de la familiarisation avec le logiciel de calcul symbolique `Maple12`. Elle vise à illustrer la section 3.4 des notes de cours (élimination au travers de la construction du déterminant de Sylvester). On y verra les fondements de l'intégration symbolique des fonctions rationnelles correspondant aux élémentsd de $\mathbb{Q}(X)$ *via* leur décomposition en éléments simples (méthode de Rothstein-Trager, 1976). Ouvrez pour commencer une feuille de travail vierge sous `Maple12`.

Exercice 1 (Calculs de discriminants ordinaires). Pourquoi (à la lumière du cours) existe-t'il, pour tout entier $d \geq 2$, un polynôme Δ_d en $d-1$ variables $X_1, ..., X_{d-1}$ tel que l'on ait l'équivalence suivante :

$$\Big(z \in \mathbb{C}^{d-1} \text{ et } \Delta_d(z_1, ..., z_{d-1}) = 0\Big)$$
$$\iff \Big(X^d + z_1 X^{d-1} + \cdots + z_{d-1}X - 1 = 0 \text{ a une racine double dans } \mathbb{C}\Big).$$

Ce polynôme Δ_d (en $d-1$ variables $X_1, ..., X_{d-1}$) s'appelle le *discriminant ordinaire d'ordre* d ; il joue un rôle important dans les branches des mathématiques en relation avec la théorie des nombres, la géométrie algébrique ou différentielle, la théorie des équations différentielles, celle des fonctions spéciales (en particulier des fonctions sommes de séries entières $z \mapsto \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ particulières, dites *hypergéométriques*), la combinatoire, *etc.*

(1) Calculez Δ_2 à la main (à un coefficient près).

(2) Étant donnés deux polynômes `P` et `Q` déclarés sous `Maple12` comme des polynômes en les d variables $X_1, ..., X_{d-1}, X$, dites à quoi correspond la routine

```
>> RX:= resultant(P,Q,X);
```

(3) Soient les quatre polynômes respectivement en trois variables `x,y,X`, en quatre variables `x,y,z,X`, en cinq variables `x,y,z,t,X`, en six variables `x,y,z,t,u,X` déclarés ainsi :

```
P3:= X^3 + x*X^2 + y*X -1 ;
P4:= X^4 + x*X^3 + y*X^2 + z*X -1;
P5:= X^5 + x*X^4 + y*X^3 + z*X^2 + t*X -1;
P6:= X^6 + x*X^5 + y*X^4 + z*X^3 + t*X^2 +u*X-1;
```

Existe-t'il un moyen rapide de déclarer un polynôme de cette liste à partir du polynôme qui le précède dans la liste ? En combinant l'utilisation des trois commandes

```
>> Q:=diff(P,X);
>> R:=resultant(P,Q,X);
>> degree(R);
```

calculez les discriminants ordinaires $\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$, ainsi que le degré total de ces trois polynômes. Essayez de deviner une formule donnant le degré de Δ_d, puis justifiez cette formule en vous souvenant que Δ_d doit se représenter comme un certain déterminant de Sylvester ; lequel ?

Sauvez votre feuille de travail comme `TP6exo1.mw` dans votre répertoire `TPMaple12`, puis fermez là.

Exercice 2 (intersection de deux courbes planes). Une courbe plane définie dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{C}$) comme le lieu des zéros d'un polynôme en deux variables de degré total égal à 3 est appelée *cubique* (tandis qu'elle est appelée *conique* si elle est définie comme le lieu des zéros d'un polynôme de degré total égal à 2). Ouvrez une nouvelle feuille de travail sous `Maple12`.

(1) Vérifiez que les sous-ensembles de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ définis par

$$\Gamma_1 := \Big\{(x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\,;\, xy(y-x) - y^2 + 6x - y - 6 = 0\Big\}$$
$$\Gamma_2 := \Big\{(x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\,;\, (y-2x)^2(y-3x) - (x+y)^2 - x - y - 1 = 0\Big\}$$

sont bien des cubiques et que le seul zéro commun des parties homogènes de plus haut degré des polynômes

```
P:= X*Y*(Y-X) - Y^2  + 6*X - Y - 6 ;
Q:= (Y-2*X)^2*(Y-3*X) - (X+Y)^2 - X -Y -1 =0;
```

définissant ces courbes est l'origine $(0,0)$ de $\mathbb{C}^2$. On admettra que dans ce cas (c'est un important théorème de géométrie algébrique attribué à Etienne Bézout) les deux cubiques Γ_1 et Γ_2 se coupent en exactement $9 = 3 \times 3$ (le produit des degrés totaux de leurs équations définissantes `P=0` et `Q=0`) points de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (les points d'intersection des deux courbes pouvant être éventuellement multiples).

(2) Utilisez l'affichage graphique [1]

```
>> with(plots);
>> implicitplot([P=0,Q=0],X=-10..10,Y=-10..10,
   color=[red,blue],gridrefine=2);
```

pour tracer les intersections des deux courbes Γ_1 et Γ_2 avec le monde réel $\mathbb{R}^2$. Qu'observez vous ? Les deux courbes réelles se coupent-elles et en combien de points visibles ? Se coupent t'elles transversalement ? Que peut-on dire des autres points d'intersection des deux courbes Γ_1 et Γ_2 (puisque l'on sait *a priori* qu'il doit y en avoir 9 dans $\mathbb{C}^2$) ?

(3) En utilisant le principe de l'élimination (et donc la commande `resultant`)
   - d'abord pour éliminer la variable `X` entre les équations `P(X,Y)=0` et `Q(X,Y)=0`,
   - ensuite pour éliminer la variable `Y` entre ces deux mêmes équations,

1. Prenez soin de ≪ décortiquer ≫ au préalable le sens des options de la routine `implicitplot` (affichant une courbe dans $\mathbb{R}^2$ donnée par son équation cartésienne) après avoir fait `?implicitplot` dans votre feuille de travail pour analyser toutes les potentialités de cette commande `implicitplot`.

puis la routine

```
>> zeros :=[fsolve(R,T,complex)];
```

(qui donne sous forme de liste les d zéros complexes, calculés de manière approchée, d'un polynôme $R \in \mathbb{C}[T]$ de degré d) déterminer, concernant les points d'intersection (x, y) des deux courbes Γ_1 et Γ_2 dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$:

- 9 valeurs possibles pour x, parmi lesquelles on observe que se trouve une et une seule valeur réelle x_0 ;
- 9 valeurs possibles pour y, parmi lesquelles on observe que se trouve une et une seule valeur réelle y_0.

Déduisez-en les valeurs approchées des coordonnées de l'unique point de $\mathbb{R}^2$ appartenant aux deux cubiques Γ_1 et Γ_2. Le résultat est il bien conforme à ce que vous avez observé graphiquement à la question 2 ?

(4) Rédigez une procédure

```
testzeros = proc(epsilon,P,Q,LX,LY)
```

qui, étant donnés deux polynômes en deux variables `P` et `Q` et deux listes de nombres complexes `LX`, `LY` (déclarés en flottants), renvoie la liste des couples `(L[i],L[j])` en lequels l'évaluation de la fonction $\sqrt{|P|^2 + |Q|^2}$ est strictement inférieure au seuil ϵ. En prenant ϵ convenable (essayez 10^{-k}, k variant entre 3 et 8), exécutez ce code `testzeros` avec comme autres entrées `P`, `Q`, et les deux listes `LX`, `LY` de 9 nombres complexes construites à la question 3, pour obtenir la liste des valeurs approchées des 9 couples de nombres complexes correspondant aux positions des 9 points d'intersection des cubiques Γ_1 et Γ_2 cette fois dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Retrouvez vous bien le point réel observé à la question 2 et calculé de manière approché à la question 3 ?

(5) On considère, à la place de la cubique Γ_2, la cubique Γ_3 définie par

$$\Gamma_1' := \Big\{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}\,;\, xy(x - y) - x^2 + 6y - x - 6 = 0\Big\}.$$

Par quelle transformation simple de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dans lui-même la cubique Γ_1' se déduit-elle de la cubique Γ_1 ? Vérifiez que le lieu des zéros communs des parties homogènes de plus haut degré des polynômes définissant Γ_1 et Γ_1' est constitué cette fois de trois droites de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$: on dira alors que les deux cubiques Γ_1 et Γ_1' se coupent en trois points à l'infini de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (ces trois ≪ points à l'infini ≫ se situant à l'infini précisément lorsque l'on suit l'une des trois directions données par les trois droites vectorielles que l'on vient de trouver). Reprenez les questions 2,3,4 précédentes avec cette fois Γ_1' à la place de Γ_2 pour vérifier que les deux cubiques Γ_1 et Γ_1' se coupent en $6 = 9 - 3$ points distincts dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. On calculera cette fois ces points algébriquement et de manière non plus approchée, mais exacte (utilisez la routine `solve` au lieu de `fsolve`). Combien parmi ces points sont-t'ils des points à coordonnées réelles ?

Sauvez votre feuille de travail comme `TP6exo2.mw` dans votre répertoire `TPMaple12`, puis fermez la.

Exercice 3 (construction de la matrice et du déterminant de Sylvester). Dans cet exercice, on vous propose de revenir aux sources et de rédiger une procédure qui fournisse, étant donnés en `input` deux polynômes `P` et `Q` en une variable `X` (de degrés respectifs p et q, à coefficients pouvant dépendre de manière polynomiale ou rationnelle d'autres variables `Y,Z`...), fournisse en `output` le déterminant de la matrice de Sylvester (de taille $(p+q, p+q)$), voir (3.14) dans la section 3.4 du polycopié de cours) de `P` et `Q`, considérés comme des polynômes en `X`. Ouvrez une nouvelle feuille de travail sous `Maple12`.

(1) Chargez les bibliothèques suivantes :

```
>> with(PolynomialTools);
>> with(LinearAlgebra);
```

et étudiez ce que font les routines :

```
>> ?CoefficientList;
>> ?Determinant;
```

ainsi que la syntaxe régissant leur utilisation. Consultez aussi

```
>> ?Matrix;
>> ?MVassignment;
```

pour voir comment modifier une matrice `S` de taille $D \times D$ donnée composée initialement de zéros (déclarée par `S:=Matrix(D)`).

(2) Rédigez une procédure

```
Sylvester := proc(P,Q,X)
```

fournissant, lorsque `P` et `Q` sont deux polynômes non nuls de degrés strictement positifs en la variable `X`, la matrice de Sylvester (*i.e* la matrice (3.14) des notes de cours).

(3) Rédigez une procédure

```
resultantTP := proc(P,Q,X)
```

fournissant, lorsque `P` et `Q` sont deux polynômes non nuls de degrés strictement positif en la variable `X`, leur résultant. Recalculez les déterminants ordinaires Δ_3 et Δ_4 de l'exercice 1 (question 3) avec cette fois votre routine **`resultantTP`** et comparez avec les résultats obtenus à l'exercice 1 (question 3) avec la routine (intégrée au logiciel) **`resultant`**.

(4) Étant donnés deux polynômes `P` et `Q` de degrés respectifs $p > 0$ et $q > 0$, montrez que l'on ne change pas le déterminant de la matrice de Sylvester (matrice (3.14) dans les notes de cours) en remplacant le dernier vecteur colonne par le vecteur colonne :

$$\begin{bmatrix} \mathtt{X}^{\mathtt{q}-1} * \mathtt{P(X)} \\ \vdots \\ \mathtt{X} * \mathtt{P(X)} \\ \mathtt{P(X)} \\ \mathtt{X}^{\mathtt{p}-1} * \mathtt{Q(X)} \\ \vdots \\ \mathtt{X} * \mathtt{Q(X)} \\ \mathtt{Q(X)} \end{bmatrix} \qquad (*)$$

(pensez pour cela à ajouter au dernier vecteur colonne la somme de tous les vecteurs colonnes précédents multipliés par $\mathtt{X}^{\mathtt{p+q}-1}$, $\mathtt{X}^{\mathtt{p+q}-2}$, ...). Réalisez une procédure

```
resultantTPmodif:=proc(P,Q,X,S,T);
```

qui, étant donnés deux polynômes `P` et `Q` en une variable `X` (de degrés strictement positifs `p` et `q`, les coefficients de ces polynômes pouvant dépendre de manière polynomiale ou rationnelle d'autres variables `Y,Z`...), calcule le déterminant de la matrice `Sylvester(P,Q,X)` modifiée par le fait que la dernière colonne y ait été remplacée par

$$\begin{bmatrix} \mathtt{X}^{\mathtt{q}-1} * \mathtt{S} \\ \vdots \\ \mathtt{X} * \mathtt{S} \\ \mathtt{S} \\ \mathtt{X}^{\mathtt{p}-1} * \mathtt{T} \\ \vdots \\ \mathtt{X} * \mathtt{T} \\ \mathtt{T} \end{bmatrix}, \qquad (**)$$

où `S` et `T` sont deux nouvelles variables. La sortie de cette procédure doit donc être un polynôme en les variables `X`, `S`, `T` et les coefficients des polynômes `P` et `Q`. Vous pourrez au préalable consulter l'aide

```
>>?Vector;
```

pour voir comment déclarer le vecteur colonne (**). Calculez, étant donnés deux polynômes `P` et `Q` comme ci-dessus

```
>> R:= resultantTPmodif(P,Q,X,S,T);
>> resultant(P,Q,X) - simplify(P*diff(R,S)+Q*diff(R,T));
```

Expliquez d'où ce résultat provient. Si le résultant de `P` et `Q` par rapport à `X` est non nul, pourquoi obtient-on ainsi une identité de Bézout `1=A*P+B*Q` avec $\deg \mathtt{A} < \mathtt{q}$ et $\deg \mathtt{B} < \mathtt{q}$?

Sauvez votre feuille de travail comme `TP6exo3.mw` dans votre répertoire `TPMaple12`, puis fermez la.

Exercice 4 (Intégration symbolique de fractions rationnelles et élimination). Les méthodes reposant sur l'élimination algébrique ainsi que sur la division euclidienne (algorithme de Bézout étendu) jouent un rôle clef dans le noyau de logiciels de calcul symbolique tels `Maple12` lorsqu'il s'agit d'effectuer l'intégration symbolique des fractions rationnelles. C'est ceci que cet exercice se propose d'illustrer. Ouvrez une nouvelle feuille de travail sous `Maple12`.

(1) Soit Q un polynôme en une variable à coefficients entiers, de degré strictement plus grand que 1, n'ayant aucune racine double dans $\mathbb{C}$. Pourquoi le résultant (par rapport à X) de Q et $Q' := dQ/dX$ est-il non nul ? Pourquoi existe-t-il bien dans ce cas deux polynômes U et V à coefficients rationnels, avec de plus $\deg(U) \leq \deg Q - 2$ et $\deg V \leq \deg Q - 1$ tels que l'on ait l'identité $Q(X)U(X) + Q'(X)V(X) \equiv 1$?

(2) Regardez la syntaxe de la routine `gcdex` :

```
>> gcdex(P1,P2,X,'U','V');
>> U;
>> V;
>> simplify(U*P1+V*P2);
```

Prenez un polynôme `Q` de degré `3` sans racine double et à coefficients entiers, par exemple

```
>> Q:= X^3 - 2*X^2 + 3*X+5;
```

et calculez les polynômes `U` et `V` tels que `U*Q+V*diff(Q,X)=1` donnés par la routine `gcdex`. Calculez d'autre part

```
>> resultant(Q,diff(Q,X),X);
```

Qu'observez vous ? Est-ce une surprise et avez vous une explication (pensez ̀regarder ici les notes de cours, section 3.4) ?

(3) Vérifiez, si P et Q sont deux polynômes (avec $\deg Q > 0$ et Q sans racine double dans $\mathbb{C}$) que, si U et V sont tels que l'on ait l'identité de Bézout $1 = UQ + VQ'$, alors, pour tout entier $n > 1$,

$$\int^X P(t)\,\frac{dt}{(Q(t))^n} = \frac{1}{1-n}\,\frac{V(X)P(X)}{((Q(X))^{n-1}} + \\ + \int^X \Big(P(t)U(t) + \frac{1}{n-1}\frac{d}{dt}[PV](t)\Big)\,\frac{dt}{(Q(t))^{n-1}}.$$

(4) En utilisant la procédure `gcdex` (algorithme d'Euclide étendu résolvant l'identité de Bézout, voir la question 2) et la procédure `int`

```
>> F:=int(P,X);
```

appliquée aux polynômes (qui fournit une primitive d'un polynme en X et qu'il vous serait aisé de construire vous-même), rédigez une procédure récursive

```
HermiteItere:=proc(P,Q,X,n)
```

qui, étant donnés deux polynômes `P`, `Q` en la variable `X` (avec `Q` de degré strictement positif et sans racine double) à coefficients entiers retourne une liste `[R,H]`, où `R` est un élément de $\mathbb{Q}(\mathtt{X})$ de dénominateur $\mathtt{Q}^{n-1}$ et `H` un élément de $\mathbb{Q}(\mathtt{X})$ de degré strictement inférieur au degré de `Q` tels que l'on ait :

$$\int^{\mathtt{X}} \frac{\mathtt{P}(t)}{(\mathtt{Q}(t))^n}\,dt = \mathtt{R}(\mathtt{X}) + \int^{\mathtt{X}} \frac{\mathtt{H}(t)}{\mathtt{Q}(t)}\,dt.$$

(5) Soient `H` et `Q` deux polynômes à coefficients rationnels tels que $0 \leq \deg \mathtt{H} < \deg \mathtt{Q} = d$ et

```
>> RX := resultant(H-Y*diff(Q,X),Q,X);
```

Pourquoi `RX` est-il un polynôme en `Y` à coefficients rationnels ? Quel est son degré ? Soient $\alpha_1, ..., \alpha_d$ les d racines (complexes, mais algébriques, toutes simples par hypothèses) de `Q`. Montrez (en revenant à la définition du résultant) que :

$$\mathtt{RX}(\mathtt{z}) = 0 \Longleftrightarrow \Big(\exists\, l \in \{1, ..., d\} \text{ t.q. } \mathtt{z} = \frac{\mathtt{H}(\alpha_l)}{\mathtt{Q}'(\alpha_l)}\Big).$$

Montrez que, si `z` est une racine de `RX`, alors le polynôme

```
>>  Rz:= gcdex(H-z diff(Q,X),Q,X);
```

(PGCD des deux polynômes en X que sont H-zQ' et Q) a exactement pour facteurs le produit des polynômes $\mathtt{X} - \alpha_l$, où les α_l sont les nombres complexes pris dans la liste $\{\alpha_1, ..., \alpha_d\}$ et tels que $\mathtt{z} = \mathtt{H}(\alpha_l)/\mathtt{Q}(\alpha_l)$.

(6) Soient H et Q comme à la question 4. En se basant sur la formule (décomposition en éléments simples)

$$\frac{\mathtt{H(X)}}{\mathtt{Q(X)}} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\mathtt{H}(\alpha_j)}{\mathtt{Q}'(\alpha_j)} \frac{1}{\mathtt{X} - \alpha_j}, \qquad (***)$$

vérifiez qu'une primitive de H/Q s'obtient comme

$$\sum_{\mathtt{RX(z)}=0} \mathtt{z} \ln \big(\mathtt{Rz(X)}\big),$$

les zéros de RX étant considérés ici comme distincts, c'est-à-dire comptés sans leur multiplicité. Ceci est très important, c'est d'ailleurs tout le ≪ sel ≫ de la méthode, outre le fait que tous les calculs faits ici (hormis la recherche des zéros de RX sont des calculs impliquant des polynômes à coefficients entiers ou algébriques (mais jamais traités comme des nombres complexes).

(7) Après avoir examiné la syntaxe de la routine sqrfree

```
>>?sqrfree;
```

construire une procédure

```
ReduceFormPol:= proc(R,X)
```

qui, étant donné un polynôme R à coefficients rationnels en la variable X, renvoie un polynôme en la variable X à coefficients entiers ayant dans $\mathbb{C}$ les mêmes zéros que R, mais cette fois tous simples (donc distincts).

(8) Combinez la procédure HermiteItere réalisée à la question 4 avec le résultat établi à la question 6 ainsi que la procédure ReduceFormPol réalisée à la question 7 pour réaliser cette fois une procédure

```
IntSymb := proc(P,Q,X,n)
```

pour la fraction rationnelle $\mathtt{P}/\mathtt{Q}^{\mathtt{n}}$. La procédure que vous avez rédigé ici est due à Michael Rothstein et Barry Trager (autour de 1976). Elle est devenue aujourd'hui une brique de base essentielle en calcul symbolique.

(9) Testez la procédure IntSymb pour calculer les primitives suivantes :

$$\int^{\mathtt{X}} \frac{3t^2+5}{t^4+1}\,dt \qquad , \qquad \int^{\mathtt{X}} \frac{3t^2+1}{(t^4+1)^5}\,dt$$

$$\int^{\mathtt{X}} \frac{43t^9+48t^8-116t^7-126t^6-11t^3-26t^2-23t-8}{(t^2-2)(t+1)(t^7+t+1)}\,dt$$

$$\int^{\mathtt{X}} \frac{6t^3+13t^2+28-72t}{t^4-48-8t^2+t^3+4t}\,dt \qquad , \qquad \int^{\mathtt{X}} \frac{dt}{t^{(}1+t^2)}.$$

Calculez dans les cinq cas la dérivée de votre résultat $\mathtt{X} \mapsto \mathtt{Primj(X)}$ avec

```
>> Derj:=normal(diff(Primj,X));
>> Derj:=normal(numer(Derj)/factor(expand(denom(Derj))));
```

(la seconde routine est un peu compliquée, mais je n'ai pas trouvé mieux pour regrouper les facteurs avec radicaux figurant au dénominateur de la fraction rationnelle `Derj` initiale). Calculez aussi le résultant `RXj` et sa factorisation avec les commandes

```
>>RXjbis:=Split(RXj,Y);
>>convert(RXjbis,radical);
```

En conclusion de ces exemples, on voit que la procédure de Rothstein-Trager s'avère d'autant plus intéressante que le résultant `RX` a des zéros multiples. Le nombre de zéros distincts de `RX` peut s'avérer alors nettement plus petit que le degré du polynôme `Q` (qui est aussi le degré en `Y` du résultant `RX`, voir la question 5). De plus, si par chance les racines distinctes de `RX` sont rationnelles (comme dans l'exemple 3), le calcul de la liste des PGCD `Rz` (pour `z` balayant la liste des zéros distincts de `RX`) ne fait pas apparaitre de factorisation intempestive impliquant des radicaux. Si les zéros distincts de `RX` sont calculables, mais complexes, on notera cependant que le regroupement des logarithmes conjugués *via* la formule formelle

$$\texttt{ln}\big(\texttt{X-(a+I*b)}\big) - \texttt{ln}\big(\texttt{X-(a-I*b)}\big) = 2 * \texttt{I} * \texttt{arctan}\big(\texttt{(X-a)/b}\big)$$

si $\texttt{a} \in \mathbb{R}$ et $\texttt{b} \in \mathbb{R}^*$ n'est pas opéré ici. Il conviendrait de l'effectuer pour avoir une forme simplifiée (et réelle) de l'expression de la primitive obtenue, ce que nous ne ferons pas faute de temps. Vous pouvez ajouter cette opération supplémentaire de concaténation à titre d'exercice.

Sauvez votre feuille de travail comme `TP6exo4.mw` dans votre répertoire `TPMaple12`, puis fermez la.