Semestre 5, Année 2009-2010 SESSION 1

UE : MHT512

Date : 15 Décembre 2009, 14h-17h Durée : 3h

Texte (en italiques) et corrigé (en roman)

Exercice I

Question préliminaire (1 pt.) : *Enoncer le théorème de Fubini-Tonelli.*

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ensembles, équipés chacun d'une tribu $\mathcal{T}_j$ et d'une mesure positive μ_j σ-finie. Soit f une fonction de $\Omega_1 \times \Omega_2$ dans $[0,\infty]$, mesurable relativement aux tribus $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$ à la source et $\mathcal{B}([0,\infty])$ au but. Les fonctions

$$x \in \Omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y)\,,\ \ y \in \Omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1(x)$$

sont respectivement $(\mathcal{T}_1, \mathcal{B}([0,\infty]))$ et $(\mathcal{T}_2, \mathcal{B}([0,\infty]))$-mesurables et l'on a

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} \Big[\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y)\Big]\, d\mu_1(x) &= \int_{\Omega_2} \Big[\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1(x)\Big]\, d\mu_2(y) \\ &= \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y) d[\mu_1 \otimes \mu_2](x,y)\,.\end{aligned}$$

1 (2 pts). *Après avoir exprimé, pour $t > 0$, la mesure de l'ensemble $\{f > t\}$ comme l'intégrale sur Ω (relativement à la mesure μ) d'une fonction que l'on précisera, montrer, pour tout $p \in [1,\infty[$, que*

$$\int_\Omega f^p\, d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{f > t\})\, dt.$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{f>t\})\, dt &= p\int_{]0,\infty[\times\Omega} t^{p-1}\chi_{\{f(\omega)>t\}}\, dt \otimes d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \Big(\int_0^{f(\omega)} p t^{p-1}\, dt\Big)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega [f(\omega)]^p\, d\mu(\omega).\end{aligned}$$

2 (1+1 pts.). *Vérifier que, pour tout $\alpha > 0$, pour tout nombre réel $x > 0$, on a*

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-\alpha t}\, dt = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}\,,$$

où

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\, du.$$

Expliquer pourquoi la fonction Γ *est bien finie sur* $]0, +\infty[$.

On applique la formule de changement de variables en posant $u = \alpha t$. On a donc

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-\alpha t}\, dt = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{\alpha^{x-1}}\, e^{-u}\, \frac{du}{\alpha} = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}\,.$$

Au voisinage de $t = 0$, $u \mapsto u^{x-1}e^{-u}$ est une fonction positive équivalente à $u \mapsto u^{x-1}$ qui est intégrable sur $]0, \epsilon]$ si et seulement si $x - 1 > -1$, i.e. $x > 0$ (critère de Riemann). Au voisinage de $+\infty$, on peut majorer $u \mapsto u^{x-1}e^{-u}$ par $u \mapsto e^{-u/2}$, puisque le quotient de ces deux fonctions tend vers 0 (ceci est valable quelque soit $x \in \mathbb{R}$). Comme la fonction $u \mapsto e^{-u/2}$ est intégrable sur $[0, \infty[$, le critère de comparaison assure l'intégrabilité de la fonction positive $u \mapsto u^{x-1}e^{-u}$ sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$. La fonction Γ est donc bien définie sur $]0, +\infty[$.

3 (2 pts.). *Montrer que la fonction* $x \mapsto \Gamma(x)$ *est une fonction* C^∞ *sur* $]0, +\infty[$ *et exprimer sous forme d'intégrales dépendant du paramètre* x *les dérivées successives* $x \mapsto d^k\Gamma/dx^k$ *de la fonction* Γ *sur* $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $u \mapsto u^{x-1}e^{-u} = e^{(x-1)\log u - u}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, de dérivée k-ième

$$u \mapsto (\log u)^k e^{(x-1)\log u - u} = (\log u)^k u^{x-1} e^{-u}\,.$$

Si $T > \epsilon > 0$ et si $\epsilon < x < T$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall\, u \in]0, 1[\,,\ u^{x-1}|\log u|^k e^{-u} &\le u^{\epsilon-1}|\log u|^k \le \kappa_\epsilon(k) u^{\epsilon/2-1} \\
\forall\, u \in [1, \infty[\,,\ u^{x-1}|\log u|^k e^{-u} &\le u^{T-1}|\log u|^k e^{-u} \le K_T(k) e^{-u/2}\,.
\end{aligned}$$

La fonction

$$u \mapsto \kappa_\epsilon(k) u^{\epsilon/2-1} \chi_{]0,1[}(u) + K_T(k) e^{-u/2} \chi_{[1,+\infty[}$$

est une fonction intégrable sur $]0, \infty[$, qui peut jouer le rôle de chapeau d'intégration dans l'application (inductive) du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, ce paramètre (en l'occurrence x) appartenant à $]\epsilon, T[$. On déduit de ce théorème (appliqué de manière inductive) que la fonction Γ est indéfiniment dérivable sur $]\epsilon, T[$, de dérivée k-ième sur cet intervalle

$$x \mapsto \int_0^\infty (\log u)^k u^{x-1} e^{-u}\, du\,.$$

Comme ϵ et T sont arbitraires, on peut prendre ϵ arbitrairement petit et T arbitrairement grand pour conclure que Γ est de classe C^∞ dans $]0,+\infty[$.

4 (2 pts.) *On suppose qu'il existe $\beta > 0$ tel que*

$$C_{p,\beta}(f) := \int_0^\infty e^{\beta t}(\mu(\{f > t\}))^p \, dt < +\infty.$$

Montrer qu'il existe une constante γ_p (indépendante de f et de β) et que l'on calculera telle que

$$\int_\Omega f^p d\mu \leq \gamma_p \frac{[C_{p,\beta}(f)]^{1/p}}{\beta^{p-\frac{1}{p}}}$$

(on distinguera si nécessaire les cas $p > 1$ et $p = 1$).

Supposons d'abord $p > 1$. On écrit, grâce à l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{f>t\}\,dt &= p\int_0^\infty \Big(t^{p-1}e^{-\frac{\beta t}{p}}\Big)\Big(e^{\frac{\beta t}{p}}\,\mu(\{f>t\})\Big)\,dt \\
&\leq p\Big(\int_0^\infty t^{(p-1)p'}e^{-\frac{\beta p' t}{p}}\,dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \times [C_{p,\beta}(f)]^{\frac{1}{p}} \\
&= p\Big(\int_0^\infty t^{p}e^{-\frac{\beta p' t}{p}}\,dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \times [C_{p,\beta}(f)]^{\frac{1}{p}} \\
&= p\Big[\Gamma(p+1)\Big(\frac{p}{p'\beta}\Big)^{p+1}\Big]^{\frac{1}{p'}} \times [C_\beta(f)]^{\frac{1}{p}} \\
&= \gamma_p\beta^{-\frac{p+1}{p'}} \times [C_{p,\beta}(f)]^{\frac{1}{p}} \\
&= \gamma_p\frac{[C_{p,\beta}(f)]^{\frac{1}{p}}}{\beta^{p-\frac{1}{p}}}\,,
\end{aligned}$$

où

$$\gamma_p := p\Big[\Gamma(p+1)(p-1)^{p+1}\Big]^{\frac{1}{p'}}.$$

Si $p = 1$, on a la majoration

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}e^{\beta t}\mu(\{f>t\})\,dt \leq \int_0^\infty e^{\beta t}\mu(\{f>t\})\,dt.$$

On peut donc prendre $\gamma_1 = 1$.

5 (1+.5 pts.). *On suppose que $(f_k)_{k\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ telle que, pour un certain $\beta > 0$, on ait la propriété :*

$$\forall\,\epsilon > 0\,, \exists N(\epsilon) \text{ tel que } \forall\, n,m \geq N(\epsilon)\,,\ C_{p,\beta}(|f_n - f_m|) < \epsilon.$$

Montrer (en utilisant le résultat établi à la question **4***) que la suite* $(\dot{f}_k)_{k\geq 0}$ *converge dans* $L^p(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ *vers un élément* $\dot{g}\in L^p(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ *et que l'on peut extraire de la suite de représentants* $(f_k)_{k\geq 0}$ *une sous-suite convergeant* μ*-presque partout vers un représentant de* $\dot{g}$*.*

Comme

$$\int_\Omega |f_n-f_m|^p\,d\mu \leq \gamma_p \frac{C_{p,\beta}(|f_n-f_m|)}{\beta^{p-1/p}}\,,$$

il résulte de l'hypothèse faite dans cette question **5** que la suite $(\dot{f}_n)_n$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega,\mathcal{T},\mu)$. D'après le théorème de Riesz-Fischer (assurant que $L^p(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ est un espace de Banach, i.e. un espace vectoriel normé complet), cette suite converge donc dans $L^p(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ vers un élément $\dot{g}$. On sait aussi (c'est un avatar de la preuve du théorème de Riesz-Fischer) que l'on peut extraire de la suite de représentants $(f_n)_n$ (suite de $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{T},\mu)$) une sous-suite convergeant μ-presque partout vers un représentant de $\dot{g}$ dans $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{T},\mu)$.

6 (1.5 + 1.5 pts.). *On suppose que* $(f_k)_{k\geq 0}$ *est une suite de fonctions mesurables de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *(relativement à la tribu* $\mathcal{T}$ *sur* Ω*, à la tribu* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *sur* $\mathbb{R}$*), telles que*

$$\forall\, t>0\,,\ \lim_{k\to+\infty}\mu(\{|f_k|>t\})=0$$

et que

$$\forall\, k\in\mathbb{N}\,,\ \mu(\{|f_k|>t\})\leq Ce^{-\beta_0 t}$$

pour un certain $\beta_0>0$ *et une certaine constante positive* C*. Montrer que les fonctions* f_k *sont dans tous les espaces* $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ *et que la suite des classes* $(\dot{f}_k)_k$ *tend vers* 0 *dans chaque* $L^p(\Omega,\mathcal{T},\mu)$*.*

Soit $p\in[1,\infty[$. On a, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\forall\, t\in]0,\infty[\,,\ t^{p-1}\mu(\{|f_k|>t\})\leq t^{p-1}e^{-\beta_0 t}\,.$$

Comme la fonction $t\in]0,\infty[\mapsto t^{p-1}e^{-\beta_0 t}$ est intégrable sur $]0,\infty[$ (car majorée par $c_p e^{-\beta_0 t/2}$ sur cet intervalle), elle peut être considérée comme un « chapeau intégrable » dominant toutes les fonctions

$$t\in]0,\infty[\mapsto t^{p-1}\mu(\{|f_k|>t\})\,.$$

Comme cette suite de fonctions converge (par hypothèses) simplement vers la fonction nulle sur $]0,\infty[$, et qu'il s'agit d'une convergence dominée, le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure que

$$\lim_{k\to+\infty}\Big(\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{|f_k|>t\})\,dt\Big)=0.$$

Il résulte alors de la formule établie à la question **1** que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega |f_k|^p \, d\mu = 0\,,$$

ce qui signifie que la suite $(\dot{f}_k)_k$ converge vers $\dot{0}$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Exercice 1 : *autour du théorème de convergence dominée.*

Question préliminaire (1 pt.) : *énoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.*

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de Ω (muni de la tribu $\mathcal{T}$) dans $\mathbb{C}$ (muni de la tribu borélienne sur $\mathbb{C}$). On suppose que, pour $\omega \in \Omega \setminus E$ (avec $\mu(E) = 0$), la suite $(f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $f(\omega)$, et qu'il existe une fonction $g\ : \Omega \mapsto [0, \infty]$, mesurable de Ω (équipé de la tribu $\mathcal{T}$) dans $[0, \infty]$ (muni de la tribu borélienne), intégrable relativement à la mesure μ, et telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, \omega \in \Omega\,,\ |f_n(\omega)| \leq g(\omega)\,.$$

Alors, toutes les fonctions f_n sont intégrables par rapport à la mesure μ (d'après le principe de domination), la fonction f se prolonge en une fonction mesurable $\tilde{f}$ de Ω dans $\mathbb{C}$, intégrable elle aussi relativement à la mesure μ, et l'on a :

$$\int_{\Omega\setminus E} f\, d\mu = \int_\Omega \tilde{f}\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu\,.$$

1.a. (2+1 pt.) *En utilisant par exemple le procédé d'intégration par parties, calculer, pour $k \geq 1$, la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty (\sin t)\, e^{-kt}\, dt \qquad (*)$$

après avoir justifié la convergence de cette intégrale. L'intégrale (*) est-elle convergente (au sens de Lebesgue) si $k = 0$?

La convergence de l'intégrale est assurée par le fait que

$$\forall\, t \in [0, \infty[\,,\ |(\sin t)\, e^{-kt}| \leq e^{-kt}$$

et que $\int_0^\infty e^{-kt}\, dt = 1/k < +\infty$; l'intégrabilité sur $[0, \infty[$ de la fonction $t \mapsto \sin t \times e^{-kt}$ résulte donc du principe de domination. Par parties, on a, pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A (\sin t)\, e^{-kt}\, dt \ = \ \Big[\sin t \times \frac{e^{-kt}}{k}\Big]_0^A + \frac{1}{k}\int_0^A (\cos t)\, e^{-kt}\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sin A\, e^{-Ak}}{k} + \frac{1}{k}\Big(\Big[-\frac{\cos t\, e^{-kt}}{k}\Big]_0^A - \frac{1}{k}\int_0^A (\sin t)\, e^{-kt}\, dt\Big) \\
&= \frac{\sin A \times e^{-Ak}}{k} + \frac{1-\cos A \times e^{-kA}}{k^2} - \frac{1}{k^2}\int_0^A (\sin t)\, e^{-kt}\,.
\end{aligned}
$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, il vient donc

$$
\int_0^\infty (\sin t)\, e^{-kt}\, dt = \frac{1}{k^2}\Big(1 - \int_0^\infty (\sin t)\, e^{-kt}\, dt\Big)\,,
$$

d'où

$$
\int_0^\infty (\sin t)\, e^{-kt}\, dt = \frac{1}{1+k^2}\,.
$$

Comme la fonction $t \mapsto |\sin t|$ est une fonction positive périodique de période π et que

$$
\int_0^\pi |\sin t|\, dt = 2\,,
$$

on a $\int_0^\infty |\sin t|\, dt = +\infty$. L'intégrale (*) n'est donc pas convergente si $k = 0$.
1.b. (2 pts., dont 1 pt. pour la justification). *Vérifier la formule*

$$
\int_0^\infty \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{1+k^2}
$$

après avoir justifié la convergence (au sens de Lebesgue) de l'intégrale figurant dans le membre de gauche.
Au voisinage de $t = 0$ ($t > 0$), on a

$$
\frac{|\sin t|}{e^t - 1} \sim \frac{|\sin t|}{t} \sim 1\,,
$$

et le critère de comparaison implique la convergence (au sens de Lebesgue) de toute intégrale $\int_0^A \sin t/(e^t - 1)\, dt$, lorsque $A > 0$. Pour t assez grand, on a

$$
\frac{|\sin t|}{e^t - 1} \leq \frac{1}{e^t - 1} \leq 2e^{-t}\,.
$$

Le critère de comparaison implique également

$$
\int_A^\infty \frac{|\sin t|}{e^t - 1}\, dt \leq 2\int_A^\infty e^{-t}\, dt\,.
$$

L'intégrale

$$
\int_0^\infty \frac{\sin t}{e^t - 1}\, dt
$$

est donc convergente au sens de Lebesgue. De plus, si l'on pose

$$F_N(t) = \sin t \times \sum_{k=0}^{N} e^{-(k+1)t}\,,$$

on a, pour tout $t > 0$,

$$\lim_{N\to+\infty} F_N(t) = \sin t \times e^{-t} \times \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} = \frac{(\sin t)\, e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{\sin t}{e^t - 1}\,.$$

D'autre part, pour tout $t > 0$,

$$|F_N(t)| \leq |\sin t| \times \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)t} = \frac{|\sin t|}{e^t-1} := g(t)\,.$$

Comme la fonction g est intégrable sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la suite $(F_N)_{N\geq 0}$, et l'on en déduit

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^\infty F_N(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty (\sin t) e^{-(k+1)t}\, dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{e^t-1}\, dt\,.$$

En appliquant (pour chaque $k \in \mathbb{N}$) la formule établie à la question **1.a**, on en déduit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \int_0^\infty \frac{\sin t}{e^t-1}\,.$$

2 (2 pts.). *Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$, où*

$$I_n := \int_{]0,1]} (\sin(1/t))^n\, dt.$$

C'est une application du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Pour presque tout $t \in]0,1]$, $1/t$ n'est pas un multiple impair de $\pi/2$ et l'on a donc $|\sin(1/t)| < 1$. Ceci implique que, pour presque tout $t \in]0,1]$, on ait

$$\lim_{n\to+\infty} |\sin(1/t)|^n = 0\,.$$

Cette convergence simple est en fait dominée, car on a aussi

$$\forall\, t \in]0,1]\,,\ |\sin(1/t)|^n \leq 1\,,$$

et que $t \mapsto 1$ est une fonction intégrable sur $]0,1]$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue et conclure

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,1]} (\sin(1/t))^n \, dt = 0 \, .$$

Exercice 2 : *la formule de changement de variables.*

Question préliminaire (1 pt.) : *énoncer la formule de changement de variables dans les intégrales de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ relativement à C^1-difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.*

Soient $\Phi : U \to V$ un C^1 difféomorphisme entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : V \to \mathbb{C}$ est intégrable sur V (relativement à la mesure de Lebesgue, et pour les tribus boréliennes à la source et au but) si et seulement si la fonction

$$x \in U \mapsto f(\Phi(x)) \times |\mathrm{Jac}(\Phi)(x)|$$

est intégrable sur U. On a de plus

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f(\Phi(x))\, |\mathrm{Jac}(\Phi)(x)|\, dx \, . \qquad (**)$$

Si f est mesurable positive, cette formule est vraie, que f soit intégrable ou non par rapport à la mesure dy : si f est positive mais non intégrable, les deux membres de la formule (**) valent $+\infty$; si f est positive et intégrable, ils sont égaux au même nombre réel positif.

2.a (2 pts.). *Soient $x \in]0,1[$ et*

$$f \ : (t,s) \in]0,\infty[^2 \mapsto t^{x-1} s^{-x}\, e^{-(t+s)} = \left(\frac{t}{s}\right)^x \frac{e^{-(t+s)}}{t} \in]0,\infty[^2 \, .$$

En utilisant un changement de variables convenable ($u = t/s$, $v = t+s$) dont on montrera qu'il s'agit bien d'un C^1-difféomorphisme entre $]0,\infty[^2$ et $]0,\infty[^2$, montrer que l'on a la formule

$$\iint_{]0,\infty[^2} f(t,s)\, dtds = \iint_{]0,\infty[^2} u^{x-1} \frac{e^{-v}}{u+1}\, du\, dv \, .$$

Les fonctions $(t,s) \mapsto t/s$ et $(t,s) \mapsto t+s$ sont de classe C^1 dans $]0,\infty[^2$. De plus, pour tout $(t,s) \in]0,\infty[^2$, on a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/s & -t/s^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{s+t}{s^2} \, .$$

Si $u = t/s$ et $v = t + s$, on a $v = su + s = s(u+1)$, ce qui implique $s = v/(u+1)$, et, par conséquent $t = us = uv/(u+1)$. L'application

$$\Phi\ : (u,v) \in]0,\infty[^2 \mapsto \Big(\frac{uv}{u+1}, \frac{v}{u+1}\Big)$$

est une application de classe C^1, d'image $]0,\infty[^2$, et dont l'inverse est l'application $(t,s) \in]0,\infty[^2 \mapsto (t/s, t+s)$. Cette application réalise donc bien un C^1 difféomorphisme Φ de $]0,\infty[^2$ dans lui-même. Le jacobien de Φ au point (u,v) vaut (d'après le cours de calcul différentiel, plus précisément l'expression du jacobien d'une application inverse) vaut

$$\frac{1}{\frac{s+t}{s^2}} = \frac{s^2}{s+t} = \frac{s}{1+u} = \frac{v}{u+1} \times \frac{1}{u+1} = \frac{v}{(u+1)^2}\,.$$

D'après la formule de changement de variable (appliquée ici à une fonction mesurable positive, dont on peut se dispenser de vérifier qu'elle est intégrable du fait de la positivité), on a

$$\begin{aligned}\iint_{]0,\infty[} f(t,s)\,dtds &= \iint_{]0,\infty[^2} f(\Phi(u,v))\,\frac{v\,dudv}{(u+1)^2}\\ &= \iint_{]0,\infty[^2} \frac{u^x}{t(u,v)}e^{-v}\frac{v\,dudv}{(u+1)^2}\\ &= \iint_{]0,\infty[^2} \frac{u^x(u+1)}{uv}e^{-v}\frac{v\,dudv}{(u+1)^2}\\ &= \iint_{]0,\infty[^2} u^{x-1}\,\frac{e^{-v}}{u+1}\,dudv\,.\end{aligned}$$

C'est là la formule demandée.

2.b (2 pts.). *Après avoir justifié la convergence des trois intégrales impliquées dans la formule, prouver l'identité :*

$$\forall\, x \in]0,1[\,,\ \Big(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\Big) \times \Big(\int_0^\infty s^{-x}e^{-s}\,ds\Big) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{u+1}\,du\,.$$

Les deux premières intégrales impliquées dans le produit de droite sont bien convergentes : en effet, on a à la fois

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(x) < +\infty \text{ car } x > 0,$$

et

$$\int_0^\infty s^{-x}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty s^{(1-x)-1}\,e^{-t}\,dt = \Gamma(1-x) < +\infty \text{ car } 1-x > 0$$

(voir par exemple la question **2** de l'exercice I à laquelle on peut se référer ici). Au voisinage de $u = 0$, on a

$$\frac{u^{x-1}}{u+1} \sim u^{x-1}\,;$$

cette fonction est bien intégrable au voisinage de 0 d'après le critère de Riemann, pourvu que $x - 1 > -1$, i.e. $x > 0$, ce qui est le cas ici. Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{u^{x-1}}{u+1} \sim u^{x-2}\,;$$

cette fonction est donc bien intégrable au voisinage de $+\infty$, toujours d'après le critère de Riemann, puisque $x - 2 < -1$ du fait que $x < 1$. L'intégrale figurant au membre de droite de la formule à établir est donc bien aussi convergente.

D'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\iint_{]0,\infty[^2} \frac{u^{x-1}}{u+1}\, e^{-v}\, dudv = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{u+1}\, du \times \int_0^\infty e^{-v} dv = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{u+1}\, du\,.$$

C'est, une fois utilisée la relation $e^{-(t+s)} = e^{-t}e^{-s}$, ce même théorème de Fubini-Tonelli que l'on invoque pour affirmer que

$$\iint_{]0,\infty[} t^{x-1}s^{-x}e^{-(t+s)}\, dtds = \Big(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dt\Big) \times \Big(\int_0^\infty s^{-x}e^{-s}\, ds\Big)\,.$$

On obtient ainsi la formule demandée.

Exercice 3 : *théorème de Fubini et propriétés de la mesure de Lebesgue.*

Soient f et g deux fonctions boréliennes de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$, intégrables sur $]0,\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

3.a (2 pts.). Montrer que

$$\iint_{]0,\infty[^2} |f(u)|\, |g(x-u)|\, \chi_{0<u<x}(x,u)\, dudx = \int_0^\infty |f(u)|\, du \times \int_0^\infty |g(x)|\, dx.$$

Il s'agit ici encore d'une application du théorème de Fubini-Tonelli.

$$\begin{aligned}
&\iint_{]0,\infty[^2} |f(u)|\, |g(x-u)|\, \chi_{0<u<x}(x,u)\, dudx \\
= \;& \int_0^{+\infty} |f(u)| \Big(\int_u^\infty |g(x-u)|\, dx\Big)\, du \\
= \;& \int_0^\infty |f(u)| \Big(\int_0^\infty |g(x)|\, dx\Big)\, du \\
= \;& \int_0^\infty |f(u)|\, du \times \int_0^\infty |g(x)|\, dx
\end{aligned}$$

(pour passer de la seconde à la troisième ligne, on a utilisé l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$).

3.b (1+1 pts.). *En déduire que pour presque tout $x \in]0,\infty[$, l'intégrale*

$$\int_0^x f(u)\, g(x-u)\, du$$

est absolument convergente et que

$$\int_0^\infty \Big| \int_0^x f(u) g(x-u)\, du \Big|\, dx \leq \int_0^\infty |f(u)|\, du \times \int_0^\infty |g(x)|\, dx.$$

On a

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \Big(\int_0^x |f(u)|\, |g(x-u)|\, du \Big)\, dx \\ = & \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty |f(u)|\, |g(x-u)| \chi_{0<u<x}\, du \Big)\, dx \\ = & \iint_{]0,\infty[^2} |f(u)|\, |g(x-u)|\, \chi_{0<u<x}\, dx du \end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini-Tonelli. Cette intégrale est convergente d'après le résultat établi à la question **3.a** (puisque f et g sont toutes les deux supposées intégrables sur $]0,\infty[$, donc que $\int_0^\infty |f(u)|\, du \times \int_0^\infty |g(x)|\, dx$ est une quantité finie). La fonction (intégrable sur $]0,\infty[$)

$$x \in]0,\infty[\mapsto \int_0^x |f(u)|\, |g(x-u)|\, du$$

est donc finie pour presque tout $x \in]0,\infty[$ (au sens de la mesure de Lebesgue) ; ceci résulte de l'inégalité de Markov. Pour dx presque tout $x \in]0,\infty[$, l'intégrale

$$\int_0^x f(u)\, g(x-u)\, du$$

est donc convergente au sens de Lebesgue. De plus, on a, pour un tel $x > 0$ pour lequel cette intégrale converge,

$$\Big| \int_0^x f(u) g(x-u)\, du \Big| \leq \int_0^x |f(u)|\, |g(x-u)|\, du$$

(d'après les propriétés de l'intégrale). On a donc, après intégration par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,\infty[$,

$$\int_{]0,\infty[} \Big| \int_0^x f(u) g(x-u)\, du \Big|\, dx \leq \int_{]0,\infty[} \Big(\int_0^x |f(u)|\, |g(x-u)|\, du \Big)\, dx\,.$$

On conclut en utilisant à nouveau le théorème de Fubini-Tonelli et l'égalité établie à la question **3.a**. L'inégalité demandée en résulte.