

Bernhard Hermann Haak

Kontrolltheorie in Banachräumen
und quadratische Abschätzungen

Kontrolltheorie in Banachräumen und quadratische Abschätzungen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik
der Universität Karlsruhe vorgelegte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Bernhard Hermann Haak

aus Aachen

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Juli 2004

Referent: HDoz. Dr. Peer Christian Kunstmann

Korreferent: Prof. Dr. Lutz Weis

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut I der Universität Karlsruhe. Den Mitarbeitern¹ unseres Lehrstuhls, aber auch allen anderen Angehörigen der Fakultät danke ich für die angenehme und anregende Arbeitsatmosphäre, viele fachliche Diskussionen und Vorträge aber auch unseren regelmäßigen Mittagstisch sowie unsere Teerunden, in denen kein Thema außen vorblieb.

Herrn Dr. Peer Christian Kunstmann danke ich für seine, über das rein wissenschaftliche weit hinausgehende Betreuung, die nicht besser hätte sein können. Herrn Prof. Dr. Lutz Weis danke ich für Übernahme des Korreferats und für diese Arbeit wesentliche mathematische Anregungen.

Die Finanzierung meiner Stelle verdanke ich in den ersten zwei Jahren dem vom Land Baden–Württemberg eingerichteten Forschungsschwerpunkt Evolutionsgleichungen, im Anschluß der Förderung des Projektes „ H^∞ –Funktionalkalkül und seine Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen“ durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft. Im Herbst 2001 fand im Grand Hotel Bellavista in Levico-Terme die „Autumn School on Evolution Equations and Semigroups“ statt, an der ich, auch dank einer Förderung der Universität Trento, teilnehmen konnte.

Durch die Förderung des Deutschen Akademischen Auslandsdienstes habe ich die Möglichkeit erhalten, im April 2003 eine Woche in Besançon mit Prof. Christian Le Merdy arbeiten zu können. Seine freundliche Aufnahme und die überaus produktive Stimmung in der gesamten Arbeitsgruppe ließen noch während des Aufenthaltes die Kernidee der Arbeit [22] entstehen.

Eine schöne Bereicherung des Karlsruher Forschungsseminars waren die regelmäßigen TULKA Treffen mit den Arbeitsgruppen Funktionalanalysis bzw.

¹Mitarbeiter im Sinne dieses Textes sind auch Mitarbeiterinnen.

Angewandte Analysis der Universitäten Tübingen und Ulm, die viele interessante Kontakte und Anregungen geboten haben. Besonders erwähnen möchte ich hier Markus Haase aus Ulm und Delio Mugnolo aus Tübingen, sowie Prof. Rainer Nagel, der durch großes Engagement TULKA fordert, fördert und zusammenhält. Das aus dieser Gruppe entstandene jährlich stattfindende Internetseminar habe ich als Teilnehmer, aber auch als Mitorganisator sehr genossen.

Der an den drei TULKA Universitäten eingerichtete Marie-Curie Trainingsite hat mir Freundschaft zu vielen europäischen Doktoranden ermöglicht, unter denen ich Juan Benigno Seoane Sepúlveda und Pierre Portal besonders erwähnen möchte.

Ich bedanke mich bei allen Mitarbeitern, die mir durch mühsames Korrekturlesen geholfen haben. Herr Andreas Fröhlich hat mir immer wieder mit \LaTeX -Fragen geholfen und mir freundlicherweise auch seine Definitionen für den Satzspiegel überlassen. Besonderer Dank gilt Jan Zimmerschied – unsere vielfältigen Diskussionen waren für mich von unschätzbarem Wert. Auch Prof. Dr. Roland Lemmert, den ich seit meinem ersten Semester als Lehrer kenne und schätze, danke ich für seine vielfältige Unterstützung.

Schließlich gilt mein Dank meinen Eltern Hans Herbert und Mathilde, meinen Geschwistern Marion und Wolfgang sowie meiner Freundin Annette Lechler. Ich vermag nicht niederzuschreiben, was ich ihnen alles verdanke.

Bernhard H. Haak

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Einleitung	1
1 Grundbegriffe	5
1.1 Bezeichnungen	5
1.2 Integration vektorwertiger Funktion	6
1.3 Sektorielle Operatoren und Funktionalkalkül	7
1.4 Interpolations- und Extrapolationsräume für Halbgruppen	13
2 Kontrolltheorie in Banachräumen Teil 1	15
2.1 L^2 -Zulässigkeit und quadratische L^2 -Abschätzungen	15
2.2 L^2 -Zulässigkeit auf endlichen Zeitintervallen	25
2.3 L^p -Zulässigkeit	27
2.4 L^2 -Zulässigkeit vom Typ α	31
2.5 L^2 -Zulässigkeit und Interpolation	40
3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen	49
3.1 Etwas Banachraumtheorie	49
3.2 Quadratische Abschätzungen auf $X = L^p$	52
3.3 Verallgemeinerung für beliebige Banachräume	55
3.4 l -Funktionen	57
3.5 l -Beschränktheit	64
3.6 Eine Darstellung des Dualraums	67
3.7 Ein Fortsetzungssatz	70
3.8 Translationsinvariante Operatoren auf $l(\mathbb{R}_+, X)$	80
3.9 l -Sektorialität, quadratische l -Abschätzungen	84
3.10 Spurräume für das Cauchyproblem	86
4 Kontrolltheorie in Banachräumen Teil 2	95
4.1 l -Zulässigkeit	95

Inhaltsverzeichnis

4.2	l -Zulässigkeit auf endlichen Zeitintervallen	102
4.3	l -Zulässigkeit vom Typ α	105
4.4	Beispiele l -zulässiger Operatoren	109
4.5	l -Beobachtbarkeit	115
4.6	l -Steuerbarkeit	123
4.7	Input-Output Regularität	125
4.8	Quasilineare Systeme	127
	Literaturverzeichnis	141

Einleitung

Der Begriff des *Funktional*s wurde von HADAMARD 1903 eingeführt [26]. Er bezeichnet in dieser Arbeit mit „opération fonctionelle“ eine lineare skalarwertige Abbildung U auf Funktionenräumen, und ersetzt den maßgeblich von VOLTERRA geprägten Begriff der „fonction en ligne“. Der Begriff wurde von Funktionenräumen auf beliebige Vektorräume verallgemeinert; man bezeichnet heute Abbildungen von Vektorräumen in ihren Skalarkörper als Funktionale.

Der Begriff des *Funktionalkalküls*² stammt von M. FRÉCHET [15] aus dem Jahre 1906 und bezeichnet das damals im Entstehen begriffene Feld der *Funktionalanalysis*. Zur Zeit verstehen wir unter Funktionalkalkül hingegen eine Abbildung Φ , die Elementen f einer gewissen Funktionenalgebra \mathcal{A} Selbstabbildungen $\Phi(f) : X \rightarrow X$ eines Vektorraumes X zuordnet. Wir schreiben $\Phi(f) =: f(A)$. Diese „fonctions symboliques“ wurden von F. RIESZ [60] jedoch erst 1913 entwickelt, haben in der Untersuchung gebrochener Potenzen („fractional calculus“) des Ableitungsoptors d/dt Vorläufer, die bis auf LEIBNIZ im Jahre 1697 zurückreichen (siehe [61]). Ende der zwanziger Jahre (des 20. Jahrhunderts) untersuchte J. VON NEUMANN [52] die Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren in Hilberträumen, ohne jedoch den Zusammenhang zu Riesz' Funktionalkalkül zu erkennen. Diese Lücke schloß M.H. STONE [65] drei Jahre später. Erstaunlicherweise wurde der von Stone verwendete Begriff des „operational calculus“ im Jahre 1958 beginnend etwa mit [51, 63]³ langsam durch das wesentlich weniger sinnvolle Kompositum Funktionalkalkül ersetzt, das, wie aus den obigen Ausführungen ersichtlich, mit Funktionalen wenig gemein hat.

In dieser Arbeit verwende ich den maßgeblich von A. MCINTOSH entwickelten H^∞ -Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren auf Banachräumen. Dabei tritt dieser zum einen als ein mächtiges Beweismittel auf, das es erlaubt, verwickelte

²Auf den Begriff des Funktionalkalküls in der mathematischen Logik gehe ich im Folgenden nicht weiter ein.

³Ich vermochte jedenfalls keine frühere Verwendung nachzuweisen.

operatortheoretische Fragestellungen auf vergleichsweise einfache funktionentheoretische Probleme zu reduzieren. Die Charakterisierung des beschränkten H^∞ -Kalküls eines Operators mittels quadratischer L^2 -Abschätzungen auf Hilberträumen und der Zusammenhang dieser Abschätzungen mit dem Zulässigkeitsbegriff der Kontrolltheorie haben aber auch die Grundidee der vorgelegten Formulierung der l -Zulässigkeit auf allgemeinen Banachräumen entstehen lassen, und zwar über die in [7] formulierte Beschreibung des H^∞ -Funktionalkalküls auf L^p -Räumen ($p \in (1, \infty)$), die schließlich von KALTON und WEIS auf beliebige Banachräume endlichen Kotyps verallgemeinert wurde. Somit stellt der H^∞ -Funktionalkalkül ein wesentliches Element der vorgelegten Arbeit dar, deren Inhalt wir im Folgenden zusammenfassen:

Wir befassen uns mit Differentialgleichungen der Form $x'(t) + Ax(t) = Bu(t)$, $x(0) = x_0$ auf einem Banachraum X . Das zugehörige homogene Problem möge dabei eine klassische Lösung besitzen, die von der von $-A$ erzeugten stark stetigen Halbgruppe $T(\cdot)$ mittels $x(t) = T(t)x_0$ gegeben sei. Nun ist die Inhomogenität von spezieller Gestalt, nämlich durch den Kontrolloperator $B \in B(U, X)$ gegeben, wobei U ein weiterer Banachraum sei. Die Wahl von Kontrollfunktionen u erlaubt Einflußnahme auf die Lösung $x(\cdot)$, in günstigen Fällen Kontrolle über die Lösung oder etwa ihr asymptotisches Verhalten. Nun entspricht es vielen praktischen Modellierungen, daß die Lösung $x(\cdot)$ nicht direkt, sondern nur vermittelt einer Beobachtung der Form $y(t) = Cx(t)$ zugänglich ist, wobei $C \in B(X, Y)$ in einen weiteren Banachraum Y abbilde. Man denke etwa an die Temperaturverteilung in einem Werkstück. Für Modellierungen ist es wenig realistisch anzunehmen, man kenne seine Temperatur in einem ganzen Kontinuum; vielmehr werden punktuelle (oder räumlich sehr begrenzte) Beobachtungen in Betracht zu ziehen sein. Dies aber läßt es sinnvoll erscheinen, auch unbeschränkte Beobachtungsoperatoren zuzulassen. Damit sind wir in der Thematik des **Kapitels 2** angekommen. Der Begriff der L^2 -Zulässigkeit eines (unbeschränkten) Beobachtungsoperators wird eingeführt und eine Charakterisierung von CHR. LE MERDY mit einem kurzen und übersichtlichen Beweis nachgewiesen. Mit ähnlichen Techniken wird auch eine Charakterisierung für die Zulässigkeit von Kontrolloperatoren angegeben. Dann wenden wir uns einem weiteren Zulässigkeitsbegriff zu, der L^2 -Zulässigkeit vom Typ α . Die Überlegungen, die auf diesen Begriff führten entstanden während eines einwöchigen Aufenthaltes bei Le Merdy im Frühjahr 2003, und werden in der gemeinsamen Arbeit [22] ausgeführt. Eine genaue Betrachtung des klassischen

L^2 -Zulässigkeitsbegriffs zeigt, daß man in einem geeigneten Sinn $A^{1/2}$ als Prototyp für die Beobachtung C ansieht. Beim Begriff der Zulässigkeit vom Typ α haben wir untersucht, welche Konsequenzen die Betrachtung des Prototyps A^s für positive s auf den Zulässigkeitsbegriff hat. Man wird so zu einem Zulässigkeitsbegriff in einem mit der Funktion t^α gewichteten L^2 -Raum geführt. Damit ist eine schöne Verallgemeinerung der bisher bekannten Theorie entstanden, und auch die oben angesprochene Charakterisierung von Le Merdy überträgt sich auch die allgemeinere Situation. Schließlich führt diese Betrachtung auch auf ein neues Feld: die in der WEISSschen Vermutung auftauchenden Abschätzungen an den Beobachtungsoperator C kann man als eine Bedingung an die Räume auffassen, nämlich dergestalt, daß der Definitionsbereich $\mathcal{D}(C)$ einen geeigneten Interpolationsraum zwischen X und X_1 umfassen muß.

Nun werden für die Charakterisierungen der Zulässigkeit von Beobachtungsoperatoren quadratische L^2 -Abschätzungen für A , in der Charakterisierung für Kontrolloperatoren jedoch quadratische L^2 -Abschätzungen für seinen adjungierten Operator A' benötigt. Während dies im Hilbertraumfall äquivalent zu einem beschränkten H^∞ -Kalkül ist, sind derartige Abschätzungen im allgemeinen Banachraumkontext extrem selten anzutreffen. Als „moralische Rechtfertigung“ hierfür kann man anführen, daß bei der Verallgemeinerung des Normbegriffs von dem Hilbertraum $X = L^2(\Omega)$ nach dem Satz von Fubini zwei Möglichkeiten in Betracht kommen: ist $X = L^p(\Omega)$, $p \in (0, \infty)$ so kann man zum einen den Funktionenraum $L^2(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$, aber auch den Raum $L^p(\Omega, L^2(\mathbb{R}_+))$ zur Definition des Begriffs quadratischer Abschätzungen heranziehen. Hier zeigt sich, daß die zweite Wahl die günstigere ist; dies war den Erfindern des H^∞ -Kalküls für sektorische Operatoren um A. M^CINTOSH (siehe [46]) bekannt; von N. KALTON und L. WEIS stammt eine Verallgemeinerung dieser Norm für beliebige Banachräume X ([37]). Die hierfür benötigten Begriffe werden zu Beginn des **Kapitels 3** vorgestellt. Darüberhinaus fügen wir in Abschnitt 3.7 neue abstrakte Ergebnisse hinzu und untersuchen in 3.10 Spurräume für das Cauchyproblem.

In **Kapitel 4** führen wir den Begriff der l -Zulässigkeit für Beobachtungs- und Kontrolloperatoren ein und untersuchen sie mit den im 3. Kapitel vorgestellten Methoden. Nun haben wir einen Zulässigkeitsbegriff auf Banachräumen, der sich analog zur L^2 -Zulässigkeit charakterisieren läßt, aber die benötigten quadratischen l -Abschätzungen für A (im Falle von Beobachtungsoperatoren) und für A' (im Falle von Kontrolloperatoren) sind, zumindest bei Banachräu-

men endlichen Kotyps, stets erfüllt, wenn A einen beschränkten H^∞ -Kalkül hat. Es besteht die allgemeine Überzeugung, daß dies bei allen „vernünftigen“ Differentialoperatoren auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ der Fall sein sollte. Die so gefundene Charakterisierung der l -Zulässigkeit scheint aus diesem Grunde praktikabler, was die Voraussetzung der quadratischen Abschätzungen angeht. Andererseits ist der Nachweis der l -Beschränktheit in der Resolventenabschätzung an den Beobachtungs- bzw. Kontrolloperator schwieriger, als dies beim klassischen L^2 -Begriff der Fall ist. In Abschnitt 4.4 geben wir Beispiele zur Konstruktion l -zulässiger Beobachtungs- und Kontrolloperatoren auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ an. Der Zulässigkeitsbegriff vom Typ α erlaubt ebenfalls eine Übertragung auf den l -Fall mit analoger Charakterisierung zum klassischen L^2 -Fall.

Danach wenden wir uns dem Begriff der Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit zu, und zeigen, wie man sie auf den l -Fall überträgt. Zu der in den letzten Jahren diskutierten Vermutung von RUSSELL und WEISS, eines Versuchs der Charakterisierung exakter Beobachtbarkeit, konnten wir zwar notwendige Voraussetzungen aufzeigen, die allgemeine Gültigkeit der Vermutung bleibt jedoch offen.

Im letzten Abschnitt betrachten wir ein nichtlineares Kontrollproblem der Form

$$\begin{cases} x'(t) + A(x(t))x(t) & = B(x(t))u(t) \\ x(0) & = x_0 \\ y(t) & = Cx(t). \end{cases}$$

Eine derartige Zustandsabhängigkeit des Kontrolloperators $B(\cdot)$ ist in vielen Modellierungen sinnvoll, etwa dann, wenn die Wirkung der äußeren Kontrolle von physikalischen Parametern des Systems wie etwa Temperatur, Aggregatzustand, elektrischer Leitfähigkeit oder dergleichen abhängt. Wir untersuchen die Lösbarkeit des durch $u(t) := Fy(t) = FCx(t)$ rückgekoppelten Systems

$$\begin{cases} x'(t) + A(x(t))x(t) & = B(x(t))FCx(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

mit einer an eine Arbeit von CLEMENT und LI angelehnten Methode. Dabei stellen den Fall von strikten Lösungen im L^p -Sinne und eine analoge Formulierung mit l -Funktionen einander gegenüber. Die Betrachtung von l -Funktionen ist in diesem Zusammenhang völlig neu. Hierbei kann man zur Überprüfung der Voraussetzungen des erreichten lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatzes die zuvor entwickelte Theorie der Zulässigkeit von Kontroll- und Beobachtungsoperatoren (jeweils im L^p -Sinne, bzw. im l -Sinne) verwenden.

1 Grundbegriffe

1.1 Bezeichnungen

In der vorliegenden Arbeit wollen wir stets nichttriviale, also vom Nullraum verschiedene, komplexe Vektorräume betrachten. Sind X und Y normierte Räume, so bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(X, Y)$ die Menge der linearen Operatoren von X nach Y . Den Definitionsbereich eines linearen Operators $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ bezeichnen wir als $\mathcal{D}(A)$, seinen Bildraum als $\mathcal{R}(A)$. Die abgeschlossenen Operatoren aus $\mathcal{L}(X, Y)$, also diejenigen Operatoren A , deren Graph $G_A := \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\}$ in $X \times Y$ abgeschlossen ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{A}(X, Y)$. Schließlich bezeichnen wir mit $B(X, Y)$ die Menge der beschränkten Operatoren A von X nach Y mit der Operatornorm

$$\|A\|_{X \rightarrow Y} := \|A\|_{B(X, Y)} := \sup\{\|Ax\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}.$$

Mit $\mathcal{L}(X), \mathcal{A}(X)$ bzw. $B(X)$ bezeichnen wir jeweils den Spezialfall $X = Y$.

Ist A ein linearer Operator auf X , so sei mit $\sigma(A)$ sein Spektrum und mit $\rho(A)$ seine Resolventenmenge bezeichnet.

Den Dualraum von X bezeichnen wir mit X' , also $X' := B(X, \mathbb{C})$. Ist A auf X dicht definiert, so sei sein dualer Operator A' durch die Gleichung $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A'y \rangle$ gegeben.

Sind H_1, H_2 Hilberträume und ist $A \in B(H_1, H_2)$, so sei mit der Hilbertraumadjungierten diejenige Abbildung $A^* \in B(H_2, H_1)$ bezeichnet, die sich mittels des Rieszschen Darstellungssatzes aus $A' \in B(H_2', H_1')$ durch die kanonische Isomorphie von H_i zu H_i' ergibt.

1.2 Integration vektorwertiger Funktion

Dem Buch von DIESTEL und UHL [11] (genauer den ersten beiden Kapiteln) folgend geben wir hier die wichtigsten Begriffe wieder, die in unserem Zusammenhang benötigt werden.

(Ω, Σ, μ) sei ein Maßraum und X ein Banachraum.

Eine meßbare Funktion $f : \Omega \rightarrow X$ heie *Treppenfunktion*, wenn sie einen endlichen Wertebereich hat, wenn also x_1, \dots, x_n aus X und E_1, \dots, E_n aus Σ existieren, für die f sich als endliche Summe $f = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{E_i} x_i$ darstellen läßt. Ist für eine solche Darstellung $\mu(E_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$ endlich, so heißt f *integrierbar* und wir setzen

$$\int_{\Omega} f(\omega) \, d\mu(\omega) := \sum_{i=1}^n \mu(E_i) x_i.$$

Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Darstellung (Allerdings wird dies in [11] nicht gezeigt. Siehe hierzu etwa [73, Lemma IV.1.1]).

Eine Funktion f heie *stark mebar*, wenn eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen existiert, die punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert. Eine Funktion f heie *schwach mebar*, wenn für jede stetige Linearform x' auf X die skalarwertige Funktion $x'(f)$ μ -mebar ist. Nach einem Satz von PETTIS (etwa [11, Theorem II.1.2]) ist eine wesentlich separabelwertige (also eine bis auf eine Nullmenge separabelwertige) Funktion genau dann stark mebar, wenn sie schwach mebar ist. Wenn zu einer stark mebaren Funktion f eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen existiert, für die

$$\lim_n \int_{\Omega} \|f_n - f\| \, d\mu = 0$$

gilt, so heie f *Bochner-integrierbar*. Ist $E \in \Sigma$, so ist $\int_E f \, d\mu$ als Grenzwert der Elemente $\lim_n \int_E f_n \, d\mu$ erklärt. Eine stark mebare Funktion ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn $\int_{\Omega} \|f\| \, d\mu$ endlich ist. Wir notieren noch einen wichtigen Satz von HILLE (siehe etwa [11, II.2, Theorem 6]):

SATZ 1.2.1 Es sei X ein Banachraum und T ein abgeschlossener Operator auf X . Es gelte $f(\omega) \in \mathcal{D}(T)$ fast überall, die Funktionen f und Tf seien Bochner-integrierbar und es sei $\int_{\Omega} f \, d\mu \in \mathcal{D}(T)$. Dann gilt

$$T\left(\int_{\Omega} f \, d\mu\right) = \int_{\Omega} Tf \, d\mu.$$

Ist f schwach meßbar und ist für jedes x' die Funktion $x'(f)$ in $L^1(\Omega)$, so wird für $E \in \Sigma$ durch

$$x''_E(x') := \int_E x'(f) d\mu$$

ein Element $x''_E \in X''$ definiert. Die Funktion f heiße dann *Dunford-integrierbar* und es wird $D\text{-}\int_E f d\mu := x''_E$ gesetzt. Wenn für alle $E \in \Sigma$ ein $x_E \in X$ so existiert, daß für alle $x' \in X'$ gilt: $\langle x', x''_E \rangle = \langle x_E, x' \rangle$, so heiße f *Pettis-integrierbar* und das Integral werde mit $P\text{-}\int_E f d\mu$ bezeichnet.

1.3 Sektorielle Operatoren und Funktionalkalkül

Wir führen nun den hauptsächlich von A. M^CINTOSH entwickelte Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren (siehe etwa [7], [45], [46]) ein:

Unter dem *Sektor* S_θ , $\theta \in (0, \pi)$, verstehen wir die offene Menge aller von Null verschiedenen komplexen Zahlen z , die sich als $z = |z|e^{i\varphi}$ mit $|\varphi| < \theta$ schreiben lassen (siehe auch Abbildung 1.1).

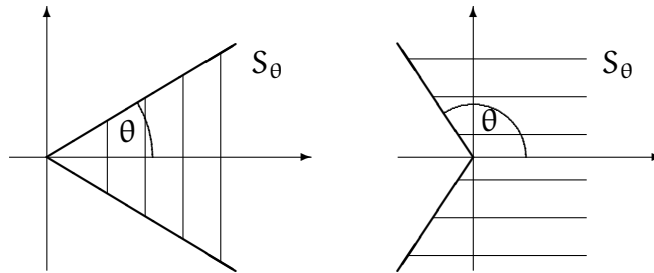


Abbildung 1.1: Der Sektor S_θ für $\theta < \pi/2$ bzw. $\theta > \pi/2$.

DEFINITION 1.3.1 Ein linearer Operator A heiße *sektoriell vom Typ ω* , falls sein Spektrum im abgeschlossenen Sektor $\overline{S_\omega}$ enthalten ist und für jedes $\theta \in (\omega, \pi)$ eine Zahl M_θ existiert, für die

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq M_\theta \quad \text{für alle } \lambda \notin \overline{S_\theta} \text{ gilt.} \quad (1.3.1)$$

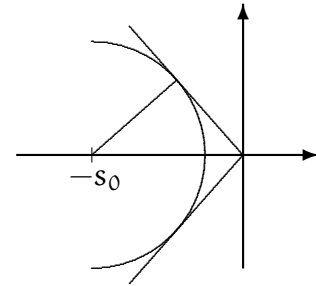
Aus der Potenzreihenentwicklung der Resolvente ergibt sich, daß eine Resolventenabschätzung der Form (1.3.1) auf der negativen reellen Halbachse bereits hinreichend ist, um einen linearen Operator als sektoriell zu erkennen:

1 Grundbegriffe

Es sei $s_0 > 0$. Dann ist für $s \in \mathbb{C}$ mit $|s_0 - s| < \|R(-s_0, A)\|^{-1}$

$$R(-s, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (s - s_0)^n R(-s_0, A)^{n+1}.$$

Für ein von s_0 unabhängiges $C > 0$, das ohne Einschränkung in $(0, 1)$ gewählt werden kann, gilt nun $\|R(-s_0, A)\|^{-1} \geq C s_0$. Also muß das Spektrum von A in einem gewissen Sektor S_θ enthalten sein.



Konvergenzbereich der Potenzreihe

Aus der Abbildung ist erkennbar, daß $\theta \leq \pi - \arcsin(C)$ gelten muß. Man beachte, daß von einem sektoriellen Operator nach unserer Definition weder verlangt wird, daß er dicht definiert sei, noch dichtes Bild habe. Dahingegen sind sektorielle Operatoren stets abgeschlossen, da sie eine nichtleere Resolventenmenge besitzen.

Wenn wir für sektorielle Operatoren den H^∞ -Funktionalkalkül benutzen wollen, kommt drei grundlegenden Funktionenklassen eine besondere Bedeutung zu: Mit $H(S_\theta)$ bezeichnen wir die Algebra aller auf dem Sektor S_θ definierten, holomorphen Funktionen. $H^\infty(S_\theta)$ bezeichne die Unter algebra aller beschränkten Funktionen aus $H(S_\theta)$, und schließlich sei

$$H_0^\infty(S_\theta) := \{f \in H(S_\theta) : \exists c, s > 0 \forall z \in S_\theta : |f(z)| \leq c \min(|z|^s, |z|^{-s})\}.$$

Das Besondere an dieser letzten Klasse ist die Tatsache, daß für Funktionen $f \in H_0^\infty(S_\theta)$ die Funktion $f(z)/z$ auf geeigneten Halbstrahlen in von Null gegen Unendlich integrierbar ist. Dies erlaubt für sektorielle Operatoren vom Typ ω und Funktionen der Klasse $H_0^\infty(S_\theta)$ mit $\theta \in (\omega, \pi)$ den beschränkten Operator $f(A)$ als das Bochner-Integral

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R(\lambda, A) d\lambda$$

zu definieren. Dabei sei Γ derjenige Integrationsweg in der komplexen Zahlenebene, der für ein $\nu \in (\omega, \theta)$ durch die Parametrisierung

$$\gamma(t) := \begin{cases} te^{-i\nu}, & t \geq 0 \\ -te^{i\nu}, & t < 0 \end{cases} \quad (1.3.2)$$

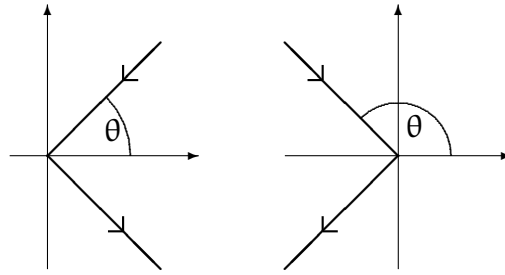


Abbildung 1.2: Der Integrationsweg Γ (mit $\theta < \frac{\pi}{2}$ bzw. $\theta > \frac{\pi}{2}$).

gegeben ist (siehe auch Abbildung 1.2). Man kann nun zeigen, daß diese Abbildung nicht von ν abhängt und einen Algebrenhomomorphismus von $H_0^\infty(S_\theta)$ nach $B(X)$ definiert. Eine sehr ausführliche Darstellung dieses Kalküls ist Inhalt der Diplomarbeit [17] von A. FRÖHLICH.

Diesen elementaren Funktionalkalkül kann man nun auf Funktionen der Klasse H^∞ erweitern. Dazu sei A als injektiver sektorieller Operator vom Typ ω mit dichtem Bild und Definitionsbereich vorausgesetzt. Wir setzen $\psi(z) := z(1+z)^{-2}$; es ist dann $\psi(A) = A(1+A)^{-1}$ injektiv, und man kann für $F \in H^\infty(S_\theta)$, $\theta \in (\omega, \pi)$, durch

$$F(A) := \psi(A)^{-1}(F\psi)(A)$$

einen abgeschlossenen Operator $F(A)$ definieren. Dieser Erweiterungsprozeß des Funktionalkalküls läßt sich auch abstrakt durchführen, wie M. HAASE in [25] zeigt. $F(A)$ hängt dabei nicht von der gewählten Regularisierungsfunktion ψ ab: solange zu einem $F \in H(S_\theta)$ irgendeine Funktion ψ des elementaren Funktionalkalküls (in unserem Falle also der Klasse $H_0^\infty(S_\theta)$) existiert, für die $\psi(A)$ injektiv ist und $\psi F \in H_0^\infty(S_\theta)$ gilt, so erlaubt die obige Definition von $F(A)$ in natürlicher Art und Weise $F(A)$ zu definieren. Damit läßt sich der Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren sogar über die Funktionenklasse $H^\infty(S_\theta)$ hinaus fortsetzen, etwa auf Funktionen, die im Nullpunkt und gegen Unendlich höchstens polynomiell wachsen. So lassen sich etwa für $\alpha \in \mathbb{C}$ auch gebrochene Potenzen A^α über den Funktionalkalkül erklären.

Der so erweiterte Funktionalkalkül hat die folgenden Eigenschaften: für die Einsfunktion ist $\mathbb{1}(A) = \text{Id}_X$, für $r_\lambda(z) = (\lambda+z)^{-1}$ gilt die Gleichheit $r_\lambda(A) =$

$(\lambda+A)^{-1}$. Allgemeiner stimmt der Kalkül mit dem (ad hoc definierten) rationalen Funktionalkalkül überein (siehe etwa [17, Satz 2.4.12]). Sind F und G zwei über den Erweiterungsprozeß für den Funktionalkalkül von A zugelassene Funktionen, so gelten die typischen Eigenschaften eines Funktionalkalküls:

$$\begin{aligned} F(A) + G(A) &\subseteq (F + G)(A) \\ F(A)G(A) &\subseteq (FG)(A) \\ \mathcal{D}(F(A)G(A)) &= \mathcal{D}((FG)(A)) \cap \mathcal{D}(G(A)). \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Da $F(A)$ für Funktionen F der Klasse H^∞ stets ein abgeschlossener, aber nicht notwendigerweise beschränkter Operator ist, kommt gewissen Operatoren A besondere Bedeutung zu:

DEFINITION 1.3.2 Es sei A ein injektiver sektorieller Operator vom Typ ω , der dichtes Bild und dichten Definitionsbereich habe. Existiert ein $\theta \in (\omega, \pi)$ so, daß für alle $F \in H^\infty(S_\theta)$ $F(A) \in B(X)$ erfüllt ist, so sagen wir, A habe einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$ -Funktionalkalkül.

Will man nachweisen, daß für eine spezielle Funktion F der Operator $F(A)$ beschränkt ist, so liefert die folgende Konvergenzeigenschaft des Kalküls ein starkes Hilfsmittel:

SATZ 1.3.3 ([7, Lemma 2.1]) Es sei A ein injektiver sektorieller Operator vom Typ ω , der dichtes Bild und dichten Definitionsbereich habe. Sind für ein $\theta \in (\omega, \pi)$ eine Funktionenfolge (f_n) und eine Funktion f derart in $H^\infty(S_\theta)$ gegeben, daß gelten:

- (a) Die Funktionen f_n sind gleichmäßig beschränkt.
- (b) Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen f .
- (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n(A) \in B(X)$ mit einer gleichmäßigen Normabschätzung $\|f_n(A)\| \leq M$,

so ist auch $f(A) \in B(X)$ und $\|f(A)\| \leq M$. Außerdem konvergieren die Operatoren $f_n(A)$ stark gegen $f(A)$, für jedes $x \in X$ gilt also $f_n(A)x \rightarrow f(A)x$.

A. FRÖHLICH wies darauf hin, daß man die in der Originalarbeit geforderte Bedingung der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge (f_n) wegen des Satzes von MONTEL zu obiger Bedingung (b) abschwächen kann ([18, Satz 1.3.1]).

Hat ein Operator A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$ -Kalkül, so gilt für ein $C > 0$ die Abschätzung $\|f(A)\| \leq C\|f\|_\infty$: Der Operator $\Phi : H^\infty(S_\theta) \rightarrow B(X)$ ist nach Satz 1.3.3 nämlich abgeschlossen und nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen somit stetig. Umgekehrt hat A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$ -Kalkül, wenn diese Abschätzung auf der kleineren Menge $H_0^\infty(S_\theta)$ gilt. Es existieren allerdings Operatoren, die keinen beschränkten H^∞ -Funktionalkalkül besitzen (siehe etwa [46]).

LEMMA 1.3.4 Es sei A ein sektorieller Operator vom Typ ω auf dem Banachraum X . Dann gilt für alle $\theta \in (\omega, \pi)$ und $r \geq s \geq 0$ die Abschätzung

$$\|A^s(\lambda+A)^{-r}\| \leq M_\theta |\lambda|^{s-r} \quad \text{auf } S_{\pi-\theta}$$

für ein geeignetes $M_\theta > 0$.

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall $s \in (0, r)$. Γ sei der durch (1.3.2) gegebene Integrationsweg. Da für jedes $\theta < \pi$ gilt: $z^s(\lambda+z)^{-r} \in H_0^\infty(S_\theta)$, folgt

$$\begin{aligned} \|A^s(\lambda+A)^{-r}x\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z^s}{(\lambda+z)^r} R(z, A)x \, dz \right\| \\ &\leq \text{const. } \|x\| \int_0^\infty \frac{t^s}{|\lambda + e^{\pm i\nu}t|^r} \frac{dt}{t} \\ &\stackrel{t=\lambda u}{=} \text{const. } \lambda^{s-r} \|x\| \underbrace{\int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{|1 + e^{\pm i\nu}u|^r} du}_{< \infty} \end{aligned}$$

Im Fall $s=0, r > 0$, betrachten wir die Abbildung $\psi(z) := (1+z)^{-r} - (1+z)^{-1}$. Sie liegt in H_0^∞ (die Abschätzung im Nullpunkt folgt aus $\psi(0) = 0$ und der Holomorphie von ψ in einer Nullumgebung). Es ist $\psi(\lambda^{-1}A) = \lambda^r(\lambda+A)^{-r} - \lambda(\lambda+A)^{-1}$. Wegen

$$\|\psi(\lambda^{-1}A)\| = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \psi(z/\lambda) R(z, A) \, dz \right\| \leq c \int_\Gamma |\psi(z/\lambda)| \frac{|dz|}{|z|} \stackrel{z=\lambda\mu}{=} c \int_\Gamma |\psi(\mu)| \frac{|d\mu|}{|\mu|}$$

ist $\sup_{\lambda>0} \|\psi(\lambda^{-1}A)\| < \infty$, sodaß mit der Sektorialität von A die Behauptung für $s=0$ folgt. Schließlich betrachten wir den Fall $s=r > 0$. Die Funktion $\varphi(z) := \psi(1/z) = z^r(1+z)^{-r} - z(1+z)^{-1}$ liegt in H_0^∞ , $\varphi(\lambda^{-1}A) = A^r(\lambda+A)^{-r} - A(\lambda+A)^{-1}$ und wie oben ist $\sup_{\lambda>0} \|\varphi(\lambda^{-1}A)\| < \infty$, also sind die Operatoren $A^r(\lambda+A)^{-r}$ für $\lambda > 0$ gleichmäßig beschränkt. \square

Die Randfälle $s \in \{0, r\}$ des obigen Lemmas wurden in [40, Lemma 10] mit Hilfe einer Version von Lemma 1.3.6 gezeigt, der hier gegebene Beweis ist von [23, Prop. 2.7] inspiriert. Das folgende Lemma ist eine unmittelbare Anwendung der obigen Erkenntnis. Es ist in dieser Form der Arbeit [36, Proposition 4.2] entnommen, kommt jedoch auch etwa in [42, Beweis von 4.1] implizit vor.

LEMMA 1.3.5 Es sei A ein sektorieller Operator vom Typ ω und für ein $\theta \in (\omega, \pi)$ sei $f \in H_0^\infty(S_\theta)$. Ist $\nu \in (\omega, \theta)$ und Γ der durch (1.3.2) gegebene Integrationsweg, so gilt für jedes $s \in (0, 1)$ und $x \in X$:

$$f(A)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} f(\lambda) A^s R(\lambda, A)x \, d\lambda.$$

Ist $-A$ Erzeuger einer beschränkten stark stetigen Halbgruppe, so ist A nach dem Satz von HILLE und YOSHIDA stets dicht definiert und sektoriell vom Typ $\pi/2$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wenn die Sektorialitätskonstante M aus der Abschätzung $\|\lambda(\lambda+A)^{-1}\| \leq M$ nicht als eins gewählt werden kann. Ein Beispiel hierfür findet sich in [13, Ex. II.3.12(3)].

LEMMA 1.3.6 Es sei $-A$ Erzeuger einer beschränkten stark stetigen Halbgruppe $T(\cdot)$ vom Typ ω und $\lambda \in S_{\pi-\omega}$. Dann gilt für alle $0 < \alpha < \beta$:

$$(\lambda+A)^{-\alpha} = \mathcal{B}(\alpha, \beta-\alpha)^{-1} \int_0^\infty \mu^{\beta-\alpha-1} (\lambda+\mu+A)^{-\beta} \, d\mu,$$

hierbei ist $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ die Betafunktion.

Beweis. Ist $-B$ stetig invertierbarer Erzeuger der stark stetigen Halbgruppe $S(\cdot)$, so sind die Operatorpotenzen $B^{-\alpha}$ nach dem PHILLIPS-Funktionalkalkül (siehe etwa [54, Abschnitt 2.6]) durch

$$B^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} S(t) \, dt$$

gegeben. Wenden wir dies auf $B := \lambda+\mu+A$ bzw. $S(\cdot) := e^{-(\lambda+\mu)\cdot} T(\cdot)$ an, so erhalten wir

$$(\lambda+\mu+A)^{-\beta} x = \int_0^\infty \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-(\lambda+\mu)t} T(t)x \, dt.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \mu^{\beta-\alpha-1} (\lambda+\mu+A)^{-\beta} x \, d\mu &= \int_0^\infty \mu^{\beta-\alpha-1} \int_0^\infty \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-(\lambda+\mu)t} T(t)x \, dt \, d\mu \\
 &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\lambda t} \int_0^\infty \mu^{\beta-\alpha-1} e^{-\mu t} \, d\mu \, T(t)x \, dt \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \\
 &= \mathcal{B}(\alpha, \beta-\alpha) (\lambda+A)^{-\alpha} x,
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

KOROLLAR 1.3.7 Es sei $-A$ Erzeuger einer beschränkten stark stetigen Halbgruppe $T(\cdot)$, ω der Sektorialitätswinkel von A , $\theta \in (\omega, \pi)$ und $z \in \partial S_\theta \setminus \{0\}$. Ist $\text{Im}(z) > 0$ so setzen wir $\gamma_z(t) := z + te^{i\theta}$, für $\text{Im}(z) < 0$ setzen wir $\gamma_z(t) := z + te^{-i\theta}$, jeweils mit $t \in [0, \infty)$. Dann gilt

$$R(z, A) = \int_{\gamma_z} R(\lambda, A)^2 \, d\lambda.$$

Beweis. Wir verwenden das obige Lemma mit $\alpha = 1, \beta = 2$: es sei $z = c|z|$, also $c = e^{\pm i\theta}$.

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_z} R(\lambda, A)^2 \, d\lambda &= c \int_0^\infty R(z + ct, A)^2 \, dt \\
 &= c^{-1} \int_0^\infty R(|z| + t, c^{-1}A)^2 \, dt \\
 &= c^{-1} R(|z|, c^{-1}A) = R(z, A).
 \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

1.4 Interpolations- und Extrapolationsräume für Halbgruppen

DEFINITION 1.4.1 Es sei X ein Banachraum und A ein injektiver dicht definierter sektorieller Operator vom Typ $\omega < \pi$ auf X , der dichtes Bild besitze und $\alpha > 0$. Mit X_α bezeichnen wir den Definitionsbereich $\mathcal{D}(A^\alpha)$, der mit der Norm

1 Grundbegriffe

$\|\cdot\|_\alpha := \|(I+A)^\alpha \cdot\|$ versehen sei. Mit $X_{-\alpha}$ wollen wir die Vervollständigung $X_{-\alpha} := (X, \|(I+A)^{-\alpha} \cdot\|)^\sim$ bezeichnen.

Nach [7, Theorem 3.8] sind dicht definierte sektorielle Operatoren mit dichtem Bild stets injektiv, sodaß die Forderung der Injektivität in der obigen Definition auch weggelassen werden kann. Ist α eine natürlich Zahl, so können wir auf die Forderung der Injektivität und der des dichten Bildes verzichten. Für $\alpha \in [0, 1]$ ist die Norm $\|\cdot\|_\alpha$ zur Graphennorm $\|\cdot\|_{A^\alpha} := \|\cdot\| + \|A^\alpha \cdot\|$ äquivalent: nach [23, Prop. 2.7] gilt $A^\alpha - (I+A)^\alpha \in B(X)$, sodaß aus $-1 \in \rho(A)$ sofort $\|x\|_{A^\alpha} \leq \text{const} \cdot \|x\|_\alpha$ folgt. Die umgekehrte Abschätzung ergibt sich dann aus dem Satz über die offene Abbildung.

Besondere Bedeutung haben in dieser Skala die Räume mit ganzzahligem Index α , falls $-A$ Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe ist. Dies wird in [13, Abschnitt II.5] ausführlich behandelt, und wir fassen hier die wichtigsten Dinge zusammen: Die Resolventen $(I+A_n)^{-1}$ bilden offenbar X_n isometrisch isomorph auf X_{n-1} ab. Die Halbgruppe $T(\cdot)$ läßt die Räume X_n für $n \in \mathbb{N}_0$ invariant, wir können also $T_n(\cdot) := T(\cdot)|_{X_n}$ betrachten. Da die Halbgruppe $T(\cdot)$ mit dem Isomorphismus $X \rightarrow X_n, x \mapsto (I+A)^{-n}x$ kommutiert, ist $T_n(\cdot)$ auf X_n ebenfalls stark stetig. Ihr Erzeuger $-A_n$ ist der Teil von $-A$ in X_n ; es ist also $A_n = A$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A_n) = \{x \in \mathcal{D}(A) \cap X_n : Ax \in X_n\}$.

Genauso können wir die Räume X_α mit negativem ganzzahligem Index betrachten. Da X für $n \in \mathbb{N}$ dicht in X_{-n} liegt, erhalten wir Erweiterungen T_{-n} der Halbgruppe auf X_{-n} . Ihre mit A_{-n} bezeichneten Erzeuger haben wiederum die Eigenschaft, daß $\mathcal{D}(A_{-n}) = X_{-n+1}$ gilt; auch für negative n bildet die Resolvente $(I+A_n)^{-1}$ den Raum X_n isometrisch isomorph auf X_{n-1} ab.

Schließlich können wir neben diesen *inhomogenen* Räumen auch *homogene* Räume \dot{X}_α einführen. Sie seien durch $\dot{X}_\alpha := (\mathcal{D}(A^\alpha), \|A^\alpha \cdot\|)^\sim$ gegeben. Ist A nicht nur injektiv, sondern sogar stetig invertierbar, so gilt $\dot{X}_\alpha = X_\alpha$. Die Bezeichnung homogen und inhomogen rührt von der analogen Bezeichnung inhomogener bzw. homogener Besovräume oder Besselpotentialräume bzw. Rieszpotentialräume her. Dies mag darauf zurückzuführen sein, daß bei der Betrachtung von $A = -\Delta$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt: $I+A$ hat, als Fouriermultiplikator aufgefaßt, die inhomogene Funktion $f(\xi) = 1 + |\xi|^2$ als Symbol, A dagegen die homogene Funktion $g(\xi) = |\xi|^2$.

2 Kontrolltheorie in Banachräumen Teil 1

2.1 L^2 -Zulässigkeit und quadratische L^2 -Abschätzungen

Es seien Banachräume X, U, Y gegeben, und $-A$ sei Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf X . Es seien stetige Operatoren $B \in B(U, X_{-1})$ und $C \in B(X_1, Y)$ gegeben. Wir betrachten das folgende, als *Kontrollsystem* bezeichnete Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) = Bu(t) & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{KS})$$

Die Inhomogenität $Bu(t)$ erlaubt über den als *Kontrolloperator* bezeichneten Operator B Einflußnahme auf die Differentialgleichung; die Lösung $x(\cdot)$ wird mittels eines *Beobachtungsoperators* C beobachtet. Ist $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, so verläuft die Lösung $x(t) = T(t)x_0$ des homogenen Anfangswertproblems in $\mathcal{D}(A)$. Insofern stellt die Bedingung $C \in B(X_1, Y)$ eine plausible Forderung an C dar.

DEFINITION 2.1.1 Es sei $C \in B(X_1, Y)$ ein stetiger Beobachtungsoperator. Wegen der Invarianz von X_1 unter der Halbgruppe $T(\cdot)$ kann man für jedes $t \geq 0$ die stetige, lineare Abbildung $CT(t) : X_1 \rightarrow Y$ betrachten. Unter den Operatoren $C \in B(X_1, Y)$ bezeichnen wir diejenigen als L^2 -zulässig, oder auch kurz als *zulässig*, für welche die Abschätzung

$$\int_0^\infty \|CT(t)x\|_Y^2 dt \leq M^2 \|x\|_X^2, \quad x \in X_1 \quad (2.1.1)$$

für ein $M > 0$ gilt. In diesem Fall läßt sich diese Abbildung wegen der Dichtheit von X_1 auf ganz X fortsetzen; wir können $CT(\cdot)$ also als stetige Abbildung von X nach $L^2(\mathbb{R}_+, Y)$ auffassen.

Einen stetigen linearen Kontrolloperator $B \in B(U, X_{-1})$ bezeichnen wir als L^2 -zulässig für A , oder kurz als *zulässig*, falls für alle $u \in L^2(\mathbb{R}_+, U)$ das Integral $\int_0^\infty T_{-1}(t)Bu(t) dt$ in X_{-1} existiert, Werte in X annimmt und für ein $K > 0$ der folgenden Abschätzung genügt:

$$\left\| \int_0^\infty T_{-1}(t)Bu(t) dt \right\|_X \leq K \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+, U)}. \quad (2.1.2)$$

BEMERKUNG 2.1.2 Wir betrachten einmal den Spezialfall reflexiver Banachräume X, U, Y . Die Abbildung $\Psi_\infty : X \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+, Y)$, $\Psi_\infty(x) := CT(\cdot)x$ ist genau dann stetig, wenn ihre adjungierte Abbildung $\Psi'_\infty : L^2(\mathbb{R}_+, Y') \rightarrow X'$, $\Psi'_\infty(\tilde{y}) = \int_0^\infty T(t)'C'\tilde{y}(t) dt$ stetig ist (hierzu sei bemerkt, daß reflexive Banachräume stets die Radon-Nikodým Eigenschaft haben, siehe [11, Corollary II.3.4]). Daher ist der Beobachtungsoperator C genau dann zulässig für A , wenn der Kontrolloperator C' zulässig für A' ist.

Wir werden im Folgenden die Zulässigkeit von Kontroll- und Beobachtungsoperatoren für beschränkte analytische Halbgruppen charakterisieren. Im Mittelpunkt steht eine simple Beobachtung ([71]), die von der Analytizität erst einmal keinen Gebrauch macht:

LEMMA 2.1.3 Es sei $-A$ Erzeuger einer stark stetigen und beschränkten Halbgruppe $T(\cdot)$ auf dem Banachraum X und $\omega \leq \pi/2$ der Sektorialitätswinkel von A . Sind U und Y weitere Banachräume, und sind $B \in B(U, X_{-1})$ sowie $C \in B(X_1, Y)$ zulässig, so sind für jedes $\nu \in (0, \pi/2)$ die Operatorfamilien

$$\{\lambda^{1/2}(\lambda + A_{-1})^{-1}B : \lambda \in S_\nu\} \quad \text{bzw.} \quad \{\lambda^{1/2}C(\lambda + A)^{-1} : \lambda \in S_\nu\}$$

gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Es sei $C \in B(X_1, Y)$ zulässig. Die Resolventendarstellung zeigt für $x \in X_1$:

$$\|C(\lambda + A)^{-1}x\| = \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} CT(t)x dt \right\| \leq M \|\exp(-\lambda \cdot)\|_{L^2} \|x\|,$$

also $\|C(\lambda + A)^{-1}x\| \leq \text{const. } \text{Re}(\lambda)^{-1/2} \|x\|$ und damit die gewünschte gleichmäßige Beschränktheit (man beachte, daß wegen $\nu < \pi/2$ der Quotient $\lambda/\text{Re}(\lambda)$

2.1 L^2 -Zulässigkeit und quadratische L^2 -Abschätzungen

beschränkt bleibt). Analog dazu erhält man für zulässiges $B \in B(U, X_{-1})$ und die Wahl $u := \exp(-\lambda \cdot) \otimes u_0$ mit einem $u_0 \in U$:

$$\begin{aligned} \|(\lambda + A_{-1})^{-1} B u_0\|_X &= \left\| \int_0^\infty T_{-1}(t) B u(t) dt \right\|_X \\ &\leq K \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+, U)} = (2\operatorname{Re}(\lambda))^{-1/2} K \|u_0\|_U, \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

G. WEISS warf in [71] nun die Frage auf, ob die notwendigen Bedingungen aus 2.1.3 die Zulässigkeit von Kontroll- und Beobachtungsoperatoren zu charakterisieren vermögen. Er wies darauf hin, daß dies für allgemeine Banachräume falsch sei und gab erste partielle positive Beweise für Hilberträume X an: Etwa für eindimensionale Räume U (bzw. Y) falls $T(\cdot)$ eine stark stetige Halbgruppe normaler Operatoren ist, oder für exponentiell stabile und linksinvertierbare Halbgruppen $T(\cdot)$. In der Arbeit [53] wird die Richtigkeit der Vermutung für den Rechtsshift auf $L^2(\mathbb{R}_+)$ nachgewiesen, und in [27] wird sie schließlich für endlichdimensionale Räume U bzw. Y und Kontraktionshalbgruppen gezeigt. Gleichzeitig tauchten aber auch negative Ergebnisse auf, die die Richtigkeit im allgemeinen Hilbertraumfall widerlegen, etwa [29, 30]. Eine Übersicht über verschiedene Ansätze und Ergebnisse gibt der Artikel [28]. In eine etwas andere Richtung, die uns hier mehr interessieren soll, geht die Arbeit [42] von C. LE MERDY: er zeigt die Gültigkeit der Vermutung auf Banachräumen unter der Voraussetzung quadratischer L^2 -Abschätzungen.

DEFINITION 2.1.4 Es sei A ein sektorieller Operator auf X und $f \neq 0$ eine Funktion der Klasse $H_0^\infty(S_\mu)$. Wir sagen, A genüge einer *quadratischen L^2 -Abschätzung für f* , falls es eine Zahl $M > 0$ gibt, für die gilt:

$$\text{Für alle } x \in X: \int_0^\infty \|f(tA)x\|^2 \frac{dt}{t} \leq M^2 \|x\|^2.$$

Der folgende Satz wurde ursprünglich für Hilberträume formuliert [46, Theorem 5] und etwas allgemeiner in [1, Abschnitt E]. Der Beweis macht allerdings an keiner Stelle Gebrauch von der Hilbertraumstruktur, sodaß wir ihn für Banachräume formulieren:

SATZ 2.1.5 Es sei A ein dicht definierter sektorieller Operator vom Typ ω mit dichtem Bild auf dem Banachraum X . Sind für $\mu > \omega$ zwei Funktionen f und g aus $H_0^\infty(S_\mu) \setminus \{0\}$, so existiert eine Konstante M so, daß für alle $\varphi \in H^\infty(S_\mu)$ gilt:

$$\int_0^\infty \|(f_t \varphi)(A)\|^2 \frac{dt}{t} \leq M^2 \|\varphi\|_\infty^2 \int_0^\infty \|g_t(A)\|^2 \frac{dt}{t}.$$

Dabei seien f_t und g_t durch $f_t(z) := f(tz)$ bzw. durch $g_t(z) := g(tz)$ gegeben. Insbesondere zeigt die Wahl $\varphi \equiv 1$, daß die Existenz einer quadratischen L^2 -Abschätzung nicht von der gewählten Funktion und auch nicht vom Winkel $\mu > \omega$ abhängt. Wir können also einfach davon sprechen, daß A einer quadratischen L^2 -Abschätzung genügt.

Die spezielle Wahl $f(z) = z^{1/2} e^{-z}$ zeigt, daß quadratische L^2 -Abschätzungen äquivalent dazu sind, daß $A^{1/2}$ ein L^2 -zulässiger Beobachtungsoperator ist: Es ist nämlich

$$\int_0^\infty \|f(tA)x\|^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \|A^{1/2} T(t)x\|^2 dt.$$

Auf dieser Umformulierung basiert die folgende Version des Satzes [42, Theorem 4.1]. Der hier angegebene Beweis, der von Diskussionen mit Chr. Le Merdy im Zusammenhang der gemeinsamen Arbeit [22] inspiriert ist, orientiert sich an der Kernidee der Originalarbeit; er ist jedoch erheblich übersichtlicher und kürzer:

SATZ 2.1.6 Es sei A ein dicht definierter, sektorieller Operator vom Typ $\omega < \pi/2$ auf einem Banachraum X , der dichtes Bild habe. Weiterhin genüge A einer quadratischen L^2 -Abschätzung. Die von $-A$ erzeugte analytische Halbgruppe werde mit $T(\cdot)$ bezeichnet. Ist Y ein weiterer Banachraum, so ist ein stetiger linearer Operator $C : X_1 \rightarrow Y$ genau dann zulässig, wenn die Menge $W_C := \{\lambda^{1/2} C(\lambda + A)^{-1} : \lambda > 0\}$ in $B(X, Y)$ beschränkt ist.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir das folgende

LEMMA 2.1.7 Es gelten die Voraussetzungen des obigen Satzes und es sei $H := \{e^{i\theta} t : t > 0\}$ ein Halbstrahl mit Winkel θ , $\theta \in (\omega, \pi)$. Ist W_C beschränkt, so auch die Menge $\{\lambda^{1/2} C(\lambda + A)^{-1} : \lambda \in H\} \subseteq B(X, Y)$.

2.1 L^2 -Zulässigkeit und quadratische L^2 -Abschätzungen

Beweis. Für $\lambda \in H$ ist

$$\|\lambda^{1/2} CR(\lambda, A)x\| = \|\lambda^{1/2} C(|\lambda|+A)^{-1} [(1+e^{i\theta}) \lambda(\lambda-A)^{-1} - I]x\|,$$

und der Ausdruck in der eckigen Klammer ist wegen der Sektorialität von A offenbar gleichmäßig beschränkt. \square

Beweis von Satz 2.1.6. Daß die Zulässigkeit von C die Beschränktheit von W nach sich zieht, wurde in Lemma 2.1.3 bereits nachgeprüft. Nun zur umgekehrten Richtung. A hat dichtes Bild, und ist nach [7, Theorem 3.8] daher injektiv. Aus den Eigenschaften (1.3.3) des Funktionalkalküls folgern wir mit $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^{1/2})$ die Beziehung $A=A^{1/2}A^{1/2}$, und daraus die Injektivität von $A^{1/2}$. Da $\Gamma(\cdot)$ analytisch ist, also insbesondere das Bild von $\Gamma(t)$ für $t > 0$ in $\mathcal{D}(A)$ enthalten ist, können wir für ein gewähltes $x \in X$ für $t > 0$ die Gleichheit $CT(t)x = CA^{-1/2}A^{1/2}\Gamma(t)x$ benutzen. Dies formulieren wir zu $t^{-1/2}CA^{-1/2}\varphi_0(tA)x$ weiter um, wobei φ_0 durch $\varphi_0(z) = z^{1/2}e^{-z}$ gegeben sei. Wir zerlegen nun $\varphi_0 = \varphi\psi$ in zwei Funktionen der Klasse H_0^∞ , etwa

$$\varphi(z) := z^\alpha(1+z)^{-1} \quad \psi(z) := z^{1/2-\alpha}(1+z)e^{-z}.$$

Dabei kommt es auf die Wahl von $\alpha \in (0, 1/2)$ nicht an, wie wir im Fortgang des Beweises sehen werden; genauer: es kommt nicht einmal auf die gewählten Funktionen φ und ψ an. Dem genauen Hintergrund dieses Phänomens werden wir in Abschnitt 2.5 nachgehen. Wir schreiben also

$$CT(t)x = CA^{-1/2}\varphi(tA) t^{-1/2}\psi(tA)x.$$

Der Beweis vollzieht sich in zwei Schritten. Als erstes betrachten wir die Operatorfamilie $\{CA^{-1/2}\varphi(tA) : t > 0\}$. Es sei $\theta \in (\omega, \pi/2)$. Γ bezeichne denjenigen Weg in der komplexen Zahlenebene, der durch die Parametrisierung

$$\gamma(t) := \begin{cases} te^{-i\theta}, & t \geq 0 \\ -te^{i\theta}, & t < 0 \end{cases} \quad (2.1.3)$$

gegeben ist. Er umläuft den kleineren Sektor S_ω in positiver Orientierung. Dann ist für $x \in \mathcal{R}(A^{1/2}(I+A)^{-1})$

$$\begin{aligned} CA^{-1/2}\varphi(tA)x &= CA^{-1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(tz)R(z, A)x dz \\ &\stackrel{\text{Lem. 1.3.5}}{=} CA^{-1/2} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(tz)z^{-1/2}A^{1/2}R(z, A)x dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(tz)z^{1/2}CR(z, A)x \frac{dz}{z} =: K(t)x. \end{aligned}$$

Um die letzte Gleichheit einzusehen, schreibe man $x = A^{1/2}(I+A)^{-1}x_0$ für ein $x_0 \in X$. Dann gilt die Gleichheit $CA^{-1/2}\varphi(tA)x = C(I+A)^{-1}\varphi(tA)x_0$. Der von X nach Y stetige Operator $C(I+A)^{-1}$ kann nun in das Integral gezogen werden; dann aber kann im Integral wie folgt vertauscht werden:

$$C(I+A)^{-1}A^{1/2}R(\lambda, A)x_0 = CR(\lambda, A)A^{1/2}(I+A)^{-1}x_0 = CR(\lambda, A)x.$$

Es gilt nun

$$\|K(t)x\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\varphi(tz)| \|z^{1/2}CR(z, A)x\| \frac{|dz|}{|z|}.$$

Nach Lemma 2.1.7 ist $z^{1/2}CR(z, A)$ auch auf dem Integrationsweg Γ gleichmäßig beschränkt. Da der Integrationsweg Γ wie auch das Maß $\frac{dz}{z}$ invariant unter Streckungen sind, hängt die obige Abschätzung also nicht von $t > 0$ ab. Damit ist $\|K(t)\|_{X \rightarrow Y}$ gleichmäßig beschränkt. Da $\mathcal{R}(A^{1/2}(I+A)^{-1})$ ein dichter Teilraum von X ist, besitzt $CA^{-1/2}\varphi(tA)$ also eine stetige Fortsetzung $K(t)$. Es folgt für geeignete $c_1, c_2 > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|CT(t)x\|^2 dt &= \int_0^\infty \|K(t)t^{-1/2}\psi(tA)x\|^2 dt \\ &\leq c_1 \int_0^\infty \|t^{-1/2}\psi(tA)x\|^2 dt = c_1 \int_0^\infty \|\psi(tA)x\|^2 \frac{dt}{t} \\ &\leq c_2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

da A voraussetzungsgemäß quadratischen L^2 -Abschätzung genügt. Dies war zu zeigen. \square

BEMERKUNG 2.1.8 Wir halten fest, daß die Voraussetzung der quadratischen L^2 -Abschätzung im vorangehenden Satz notwendig ist: gilt die Aussage des Satzes, so ist wegen der aus Lemma 1.3.4 folgenden gleichmäßigen Beschränktheit der Menge $\{\lambda^{1/2}A^{1/2}(\lambda+A)^{-1} : \lambda > 0\}$ stets $A^{1/2}$ zulässig für A , mit anderen Worten: A genügt quadratischen L^2 -Abschätzungen.

Es sei $f \in H_\infty \setminus \{0\}$. Ist X ein Hilbertraum, so hat nach Satz 2.1.5 jeder injektive dicht definierte sektorielle Operator A auf X bezüglich der Norm $\|x\|_{\text{quadr}} := \|f(tA)x\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)}$ einen beschränkten H^∞ -Kalkül. Das heißt, daß A einen beschränkten H^∞ -Kalkül auf X hat, wenn seine Norm zu diesen Quadraternormen äquivalent ist. In der Tat charakterisiert diese Eigenschaft den H^∞ -Kalkül (siehe [45, Sect. 7,8]):

SATZ 2.1.9 Es sei A ein dicht definierter sektorieller Operator vom Typ $\omega \in (0, \pi)$ mit dichtem Bild auf einem Hilbertraum X . Dann hat A genau dann einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$ -Kalkül für alle $\theta \in (\omega, \pi)$, wenn A und A' quadratischen Abschätzungen auf X genügen.

Dahingegen gelang es LE MERDY in [42, Theorem 5.2] nachzuweisen, daß eine einseitige Abschätzung, also eine Abschätzung für A ohne diejenige für A' nicht hinreichend für den H^∞ -Kalkül ist. Aus dem obigen Satz folgt unmittelbar das folgende

KOROLLAR 2.1.10 Es sei A ein dicht definierter sektorieller Operator vom Typ $\omega < \pi/2$ auf einem Hilbertraum X , der dichtes Bild und einen beschränkten H^∞ -Kalkül habe. Ist Y ein weiterer Hilbertraum, so ist ein stetiger linearer Operator $C : X_1 \rightarrow Y$ genau dann zulässig, wenn die Menge $W_C := \{\lambda^{1/2}C(\lambda+A)^{-1} : \lambda > 0\}$ in $B(X, Y)$ beschränkt ist.

L^2 -Zulässigkeit von Kontrolloperatoren

Wenn X ein reflexiver Banachraum ist, so ist B genau dann ein zulässiger Kontrolloperator für $T(\cdot)$, wenn sein adjungierter Operator B' ein zulässiger Beobachtungsoperator für die adjungierte Halbgruppe $T(\cdot)'$ ist. Ist X nicht als reflexiv vorausgesetzt, so muß die adjungierte Halbgruppe nicht mehr stark stetig sein. Man kann die Zulässigkeit jedoch auch in diesem allgemeinen Rahmen charakterisieren, muß dies jedoch ohne die bequeme Dualisierung beweisen.

LEMMA 2.1.11 Es sei A ein dicht definierter sektorieller Operator vom Typ $\omega < \pi/2$ auf einem Banachraum X , der dichtes Bild habe. Es sei $B \in B(U, X_{-1})$ ein Kontrolloperator, für den die Menge $W_B := \{\lambda^{1/2}(\lambda+A_{-1})^{-1}B : \lambda > 0\}$ in $B(U, X)$ beschränkt sei. Für beliebige $\alpha \in (0, 1/2)$ und $u \in U$ gilt dann die Darstellung

$$T_{-1}(t)Bu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda t} (A_{-1})^\alpha R(\lambda, A_{-1})Bu \, d\lambda. \quad (2.1.4)$$

Hier bezeichnet Γ den durch die Parametrisierung (2.1.3) gegebenen Integrationsweg.

Beweis. Es sei

$$\varphi_n(z) := n(n+z)^{-1} - \frac{1}{n}(\frac{1}{n}+z)^{-1} = z(n+z)^{-1}(\frac{1}{n}+z)^{-1}(n-\frac{1}{n}).$$

Zunächst ist offenbar $\varphi_n \in H_0^\infty(S_\theta)$ für jedes $\theta \in (0, \pi)$. Es ist für alle $x \in X_{-1}$ stets $\varphi_n(A_{-1})x \in D(A_{-1}) \cap \mathcal{R}(A_{-1})$ und $\varphi_n(A_{-1})$ ist eine approximative Identität, es gilt also $\varphi_n(A_{-1})x \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ für alle $x \in X_{-1}$. Wir schreiben $T_{-1}(t)Bu = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{-1}(t)\varphi_n(A_{-1})Bu$ und betrachten zunächst den Ausdruck ohne den Limes:

$$\begin{aligned} T_{-1}(t)\varphi_n(A_{-1})Bu &= A_{-1}^\alpha T_{-1}(t)A_{-1}^{-\alpha}\varphi_n(A_{-1})Bu \\ &= A_{-1}^\alpha \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z^{-\alpha} e^{-tz} \varphi_n(z) R(z, A_{-1})Bu \, dz. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Tatsache ausgenutzt, daß $z^{-\alpha}\varphi_n(z) \in H_0^\infty$ für alle $\alpha \in (0, 1)$ gilt. Wir wollen als nächstes zeigen, daß wir A_{-1}^α in das Integral hineinziehen können. Dazu ist nachzuweisen, daß das Bochnerintegral

$$\int_\Gamma z^{-\alpha} e^{-tz} \varphi_n(z) A_{-1}^\alpha R(z, A_{-1})Bu \, dz \quad (2.1.5)$$

in X_{-1} existiert, und einer von n unabhängigen Normabschätzung genügt (denn wir wollen schließlich den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ betrachten). Da dies ist wegen $\|A_{-1}^\alpha R(z, A_{-1})\| \leq M|z|^{\alpha-1}$ ohne die Beschränktheitsvoraussetzung an W_B nicht zu erwarten ist, müssen wir die Resolvente "verdoppeln". Wir verwenden dazu Korollar 1.3.7 und erhalten

$$R(z, A_{-1})Bu = \int_{\gamma_z} R(\lambda, A_{-1})^2 Bu \, d\lambda$$

mit einem absolut konvergenten Integral. Nun existiert wegen der Abschätzung $\|A_{-1}^\alpha R(\lambda, A_{-1})^2 Bu\| \leq M|\lambda|^{\alpha-1}|\lambda|^{-1/2}$ und der Voraussetzung $\alpha < 1/2$ aber auch das Bochnerintegral

$$\int_{\gamma_z} A_{-1}^\alpha R(\lambda, A_{-1})^2 Bu \, d\lambda,$$

in X_{-1} und genügt zudem einer Abschätzung gegen $|z|^{\alpha-1/2}$. Damit können wir nun die Existenz des Bochnerintegrals (2.1.5) nachweisen: wegen $\|\varphi_n\|_{H^\infty(S_\theta)} \leq M < \infty$ genügt der Integrand in der Norm nämlich einer Abschätzung gegen $|z|^{-1/2} \exp(-t\operatorname{Re}(z))$.

Damit ist nach 1.2.1 auch das Hereinziehen von A_{-1}^α in das Integral gerechtfertigt und somit die Darstellung

$$T_{-1}(t)\varphi_n(A_{-1})Bu = \int_{\Gamma} z^{-\alpha} e^{-tz} \varphi_n(z) A_{-1}^\alpha R(z, A_{-1}) Bu \, dz$$

gezeigt. Hieraus folgt die Behauptung mittels des Satzes über majorisierte Konvergenz. \square

SATZ 2.1.12 Es sei A ein sektorieller, dicht definierter Operator vom Typ $\omega < \pi/2$ auf einem Banachraum X , der dichtes Bild habe. Weiterhin genüge A' einer quadratischen L^2 -Abschätzung auf X' . Ist U ein weiterer Banachraum, so ist ein linearer stetiger Operator $B : U \rightarrow X_{-1}$ genau dann zulässig, wenn die Menge $W_B := \{\lambda^{1/2}(\lambda + A_{-1})^{-1}B : \lambda > 0\}$ in $B(U, X)$ beschränkt ist.

Beweis. Daß die Zulässigkeit von B die Beschränktheit von W_B nach sich zieht, wurde bereits in Lemma 2.1.3 nachgewiesen. Für die umgekehrte Richtung sei wieder ein $\theta \in (\omega, \pi/2)$ gewählt. Zu diesem θ sei dann wieder Γ wie in (2.1.3) gewählt. Wir wollen zunächst nachweisen, daß das Integral

$$\int_0^\infty T_{-1}(t)Bu(t) \, dt \tag{2.1.6}$$

in X_{-1} existiert. Dazu betrachten wir für $x_{-1} \in X_{-1}$ und $x' \in \mathcal{D}(A')$ den durch

$$\langle x_{-1}, \kappa(x') \rangle = \langle (I_{-1} + A_{-1})^{-1}x_{-1}, (I' + A')x' \rangle.$$

gegebenen kanonischen Isomorphismus $\kappa : [\mathcal{D}(A')] \rightarrow (X_{-1})'$ (siehe [48, Theorem 3.1.15]). Es sei also x' aus $\mathcal{D}(A')$ gewählt. Wir verwenden wir Lemma 2.1.11 und erhalten

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \int_0^\infty T_{-1}(t)Bu(t) \, dt, x' \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \left\langle \int_0^\infty T_{-1}(t/2) \int_{\Gamma} \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda/2 t} (A_{-1})^\alpha R(\lambda, A_{-1}) Bu(t) \, d\lambda \, dt, x' \right\rangle \right| \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit h_t die durch $h_t(\lambda) := t^{1/2-\alpha} \lambda^{-\alpha-1/2} e^{-\lambda/2 t}$ gegebene Funktion und mit $R(\cdot)$ die operatorwertige Funktion $R(\lambda) := \lambda^{1/2} R(\lambda, A_{-1})B$, so können wir dies wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\infty \left\langle \int_\Gamma h_t(\lambda) R(\lambda) d\lambda u(t), t^{\alpha-1/2} ((A_{-1})^\alpha T_{-1}(t/2))' x' \right\rangle dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \left\langle \int_\Gamma h_t(\lambda) R(\lambda) d\lambda u(t), t^{\alpha-1/2} ((A_{-1})^\alpha T_{-1}(t/2))' x' \right\rangle \right| dt,
 \end{aligned}$$

und mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{2\pi} \|t \mapsto \int_\Gamma h_t(\lambda) R(\lambda) d\lambda u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+, X)} \\
 &\quad \|t \mapsto t^{\alpha-1/2} ((A_{-1})^\alpha T_{-1}(t/2))' x'\|_{L^2(\mathbb{R}_+, X')} \\
 &= \|t \mapsto \int_\Gamma h_t(\lambda) R(\lambda) d\lambda u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}_+, X)} \|\psi(tA)' x'\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X')},
 \end{aligned}$$

wobei $\psi(z) := z^\alpha \exp(-z/2)$ ist. Es ist also $\psi(tA)' = \psi(tA')$, wobei zu beachten ist, daß A' zwar sektoriell, im allgemeinen aber weder dicht definiert ist noch dichtes Bild hat. Da aber $\psi \in H_0^\infty(S_\theta)$ gilt, ist $\psi(tA')$ wohldefiniert. Voraussetzungsgemäß können wir den hinteren Ausdruck gegen die Norm von x' abschätzen, sodaß die Behauptung gezeigt ist, wenn es gelingt, eine Abschätzung für den ersten Ausdruck gegen die L^2 -Norm von u nachzuweisen. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}
 \int_\Gamma |h_t(\lambda)| |d\lambda| &= 2t^{1/2-\alpha} \int_0^\infty e^{-1/2 \cos(\sigma)st} s^{-\alpha-1/2} ds \\
 &= 2(1/2 \cos \sigma)^{\alpha-1/2} \int_0^\infty e^{-r} r^{(1/2-\alpha)-1} dr \\
 &= 2(1/2 \cos \sigma)^{\alpha-1/2} \Gamma(1/2-\alpha),
 \end{aligned}$$

und sehen, daß die Funktionen $h_t(\cdot)$ für $t > 0$ in $L^1(\Gamma)$ gleichmäßig beschränkt sind. Die gleichmäßige Beschränktheit der Menge W_B impliziert wie in Lemma 2.1.7 die gleichmäßige Beschränktheit von $R(\lambda)$ auf Γ . Damit sind dann auch die Normen der Operatoren

$$\int_\Gamma h_t(\lambda) R(\lambda) d\lambda$$

in t gleichmäßig beschränkt. Das Integral (2.1.6) läßt sich demnach als ein stetiger linearer Operator $\Phi : L^2(\mathbb{R}_+, U) \rightarrow X''$ auffassen. Ist u eine Treppenfunktion mit kompaktem Träger, der zudem die Null meidet, so existiert das Integral (2.1.6) im Bochnerschen Sinne und liegt in X . Derartige Treppenfunktionen liegen dicht in $L^2(\mathbb{R}_+, U)$, sodaß das Bild von Φ in X enthalten ist. Nach dem Graphensatz ist Φ damit stetig von $L^2(\mathbb{R}_+, U)$ nach X . \square

Wie im Falle von Beobachtungsoperatoren (siehe Bemerkung 2.1.8) ist die Voraussetzung quadratischer L^2 -Abschätzungen an A' notwendig. Hierzu beachte man, daß A' , wenngleich nicht notwendigerweise dicht definiert, so doch sektoriell ist, und daher Lemma 1.3.4 anwendbar ist.

2.2 L^2 -Zulässigkeit auf endlichen Zeitintervallen

DEFINITION 2.2.1 Es sei $-A$ Erzeuger der stark stetigen beschränkten Halbgruppe $T(\cdot)$. Ein Beobachtungsoperator $C \in B(X_1, Y)$ heiße L^2 -zulässig auf $[0, b]$, falls für alle $x \in X_1$ die Abschätzung

$$\|CT(\cdot)x\|_{L^2([0,b],Y)} \leq \text{const.} \|x\|$$

gilt. Ein Kontrolloperator $B \in B(U, X_{-1})$ heiße L^2 -zulässig auf $[0, b]$, falls für alle $u \in L^2([0, b], U)$ das Integral $\int_0^b T_{-1}(t)Bu(t) dt$ in X_{-1} existiert, Werte in X annimmt und der Abschätzung

$$\left\| \int_0^b T_{-1}(t)Bu(t) dt \right\| \leq \text{const.} \|u\|_{L^2([0,b],U)}$$

genügt.

LEMMA 2.2.2 Es sei $T(\cdot)$ eine stark stetige beschränkte Halbgruppe, $-A$ ihr Erzeuger; die Operatoren $B : U \rightarrow X_{-1}$ und $C : X_1 \rightarrow Y$ seien stetig und es sei $t_0 > 0$.

- (a) Der Kontrolloperator B ist genau dann auf $[0, t_0]$ zulässig bezüglich $T(\cdot)$, wenn für alle $\alpha > 0$ der Kontrolloperator B auf \mathbb{R}_+ zulässig für die skalierte Halbgruppe $e^{-\alpha \cdot}T(\cdot)$ ist.
- (b) Der Beobachtungsoperator C ist genau dann auf $[0, t_0]$ zulässig bezüglich $T(\cdot)$, wenn für alle $\alpha > 0$ der Beobachtungsoperator C auf \mathbb{R}_+ zulässig für die skalierte Halbgruppe $e^{-\alpha \cdot}T(\cdot)$ ist.

Insbesondere hängt die Eigenschaft, auf $[0, t_0]$ zulässig zu sein, nicht von $t_0 > 0$ ab.

Beweis. (a) Ist B bezüglich der skalierten Halbgruppe (auf \mathbb{R}_+) zulässig, so ist B auch auf $[0, t_0]$ bezüglich der skalierten Halbgruppe zulässig. Dies ist genau dann der Fall, wenn B bezüglich der unskalierten Halbgruppe zulässig ist. Es gilt nämlich

$$\int_0^{t_0} e^{-\alpha t} T_{-1}(t) B u(t) dt = \int_0^{t_0} T_{-1}(t) B (u(t) e^{-\alpha t}) dt,$$

und $u \mapsto u \exp(-\alpha \cdot)$ ist ein Isomorphismus auf $L^2([0, t_0], U)$. Nun sei B auf $[0, t_0]$ zulässig bezüglich $T(\cdot)$. Die Halbgruppeneigenschaft zeigt, daß dann B auch auf $[0, nt_0]$ zulässig ist:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{nt_0} T_{-1}(t) B u(t) dt \right\| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|T(t_0)\|^k \left\| \int_0^{t_0} T_{-1}(t) B u(t + kt_0) dt \right\| \\ &\leq M n \sum_{k=0}^{n-1} \|T(t_0)\|^k \cdot \|u\|_{L^2([0, nt_0], U)}. \end{aligned}$$

Wir können also ohne Einschränkung annehmen, daß $\|T(t_0) e^{-\alpha t_0}\| < 1$ gilt, da die skalierte Halbgruppe exponentiell stabil ist. Dann gilt für $u \in L^2(\mathbb{R}_+, U)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_{-1}(t) B u(t) dt &= \sum_{n=0}^\infty \int_{nt_0}^{(n+1)t_0} e^{-\alpha t} T_{-1}(t) B u(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty (e^{-\alpha t_0} T(t_0))^n \int_0^{t_0} T_{-1}(t) B u(nt_0 + t) e^{-\alpha t} dt. \end{aligned}$$

Das Integral läßt sich wegen der vorausgesetzten Zulässigkeit auf $[0, t_0]$ gleichmäßig in $n \in \mathbb{N}_0$ gegen die L^2 -Norm von u auf \mathbb{R}_+ abschätzen, sodaß die Reihe in X absolut konvergiert und einer Abschätzung gegen $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$ genügt.

(b) Ist C bezüglich der skalierten Halbgruppe (auf \mathbb{R}_+) zulässig, dann folgt die Zulässigkeit bezüglich $T(\cdot)$ auf $[0, t_0]$ wie oben. Es sei also C auf $[0, t_0]$ zulässig bezüglich $T(\cdot)$ und $\alpha > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir wieder voraussetzen, daß $\|T(t_0) e^{-\alpha t_0}\| < 1$ gilt. Wir schreiben $I_n := [nt_0, (n+1)t_0]$ und erhalten unter Verwendung der Halbgruppeneigen-

schaft

$$\begin{aligned}
 \|e^{-\alpha \cdot} CT(\cdot)x\|_{L^2(\mathbb{R}_+, X)} &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{I_n}(\cdot) e^{-\alpha \cdot} CT(\cdot)x \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+, X)} \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|e^{-\alpha \cdot} CT(\cdot)x\|_{L^2(I_n, X)} \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \max\{e^{-\alpha t} : t \in I_n\} \|CT(\cdot)x\|_{L^2(I_n, X)} \\
 &\stackrel{\text{Vor.}}{\leq} \text{const.} \sum_{n=0}^{\infty} \|(e^{-\alpha t_0} T(t_0))^n x\|_X \leq \text{const.} \|x\|_X.
 \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

2.3 L^p -Zulässigkeit

Analog zu L^2 -Zulässigkeit können wir für $p \in (1, \infty)$ auch den Begriff der L^p -Zulässigkeit von Beobachtungsoperatoren über die Existenz einer Abschätzung

$$\int_0^{\infty} \|CT(t)x\|_Y^p dt \leq M^p \|x\|_X^p$$

für alle $x \in X_1$ erklären. Schreiben wir $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so erhalten wir analog zu Lemma 2.1.3 als notwendige Bedingung, daß die Operatoren

$$\|\exp(-\lambda \cdot)\|_{L^q}^{-1} C(\lambda+A)^{-1} = (q\lambda)^{1/q} C(\lambda+A)^{-1}$$

für $\lambda > 0$ gleichmäßig beschränkt sein müssen. Auch von Satz 2.1.6 können wir ein Analogon bilden; wir zerlegen

$$\begin{aligned}
 CT(t)x &= CA^{-1/p} (tA)^{1/p} T(t)t^{-1/p} \\
 &= CA^{-1/p} \varphi(tA) \psi(tA)t^{-1/p},
 \end{aligned}$$

etwa mit $\varphi(z) = z^\alpha(1+z)^{-1}$ und $\psi(z) = z^{1/p-\alpha}(1+z)e^{-z}$ für eine Zahl $\alpha \in (0, \min(1/p, 1/q))$. Wie im Beweis von Satz 2.1.6 finden wir eine gleichmäßig beschränkte Erweiterung von $CA^{-1/p} \varphi(tA)$ auf $B(X, Y)$. Anstelle der quadratischen L^2 -Abschätzung muß dann eine L^p -Abschätzung der Form

$$\forall \psi \in H_0^\infty, x \in X: \quad \|\psi(tA)x\|_{L^p(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} \leq M \|x\| \tag{2.3.1}$$

mit einer von x unabhängigen Zahl $M > 0$ gefordert werden. Wie im Falle $p = 2$ ist diese Forderung notwendig: gilt die Aussage, so zeigt die gleichmäßige Beschränktheit von $\{\lambda^{1-1/p} A^{1/p} (\lambda + A)^{-1} : \lambda > 0\}$, daß A einer L^p -Abschätzung im obigen Sinne für $f(z) = z^{1/p} \exp(-z)$ genügt.

Entsprechend können wir auch L^p -Zulässigkeit von Kontrolloperatoren definieren, indem wir die Existenz des folgenden Integrals in X_{-1} mit Werten in X und die Abschätzung

$$\left\| \int_0^\infty T_{-1}(t) B u(t) dt \right\|_X \leq K \|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+, U)}$$

für alle $u \in L^p(\mathbb{R}_+, U)$ fordern. Analog zu Lemma 2.1.3 ist die folgende Voraussetzung an B notwendig: die Operatoren

$$\|\exp(-\lambda \cdot)\|_{L^p}^{-1} (\lambda + A_{-1})^{-1} B = (p\lambda)^{1/p} (\lambda + A_{-1})^{-1} B$$

seien für $\lambda > 0$ gleichmäßig beschränkt. Unter der Voraussetzung einer L^q -Abschätzung an A' können wir nun auch zeigen, daß diese Bedingung äquivalent zur L^p -Zulässigkeit von B ist – zum Beweis gehen wir wie in Satz 2.1.12 vor, schätzen aber mit der Hölder-Ungleichung gegen die L^p/L^q -Normen ab.

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung von Satz 2.1.5 auf die komplette L^p -Skala; er wird in [24, Theorem 3.36] mitbewiesen. Wir verwenden im folgenden wieder die Notation $u_t(z) := u(tz)$.

SATZ 2.3.1 Es sei A ein sektorieller Operator von Typ ω auf dem Banachraum X der dichtes Bild habe und $p \in [1, \infty]$. Sind für $\mu > \omega$ zwei Funktionen f und g aus $H_0^\infty(S_\mu) \setminus \{0\}$, so existiert eine Konstante $M_p > 0$ so, daß für alle $\varphi \in H^\infty(S_\mu)$ gilt:

$$\left(\int_0^\infty \|(f_t \varphi)(A)\|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \leq M_p \|\varphi\|_\infty \left(\int_0^\infty \|g_t(A)\|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p},$$

falls $p < \infty$ (falls $p = \infty$ ist wie üblich zu modifizieren).

Beweis. Zunächst zeigen wir den Fall $p = \infty$: Ist g eine von Null verschiedene Funktion aus $H_0^\infty(S_\theta)$, so existiert eine weitere Funktion h aus $H_0^\infty(S_\theta)$ derart, daß

$$\int_0^\infty h(s) g(s) \frac{ds}{s} = 1.$$

Man kann beispielsweise $\tilde{h}(z) := \bar{g}(\bar{z})$ wählen. Damit ist

$$\int_0^\infty g(s)\tilde{h}(s) \frac{ds}{s} = \int_0^\infty |g(s)|^2 \frac{ds}{s} =: c.$$

Es ist notwendigerweise $c > 0$, da sonst $g = 0$ nach dem Identitätssatz; also leistet $h := c^{-1}\tilde{h}$ das Gewünschte. Es sei $x \in X$. Für $0 < \alpha < \beta < \infty$ setze nun

$$g_{\alpha,\beta}(A)x := \int_\alpha^\beta h(sA)g(sA)x \frac{ds}{s}.$$

Für $\alpha \rightarrow 0$ und $\beta \rightarrow \infty$ konvergiert $g_{\alpha,\beta}(A)x$ nach Satz 1.3.3 gegen x . Es folgt

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \|(f_t \varphi)(A)g_{\alpha,\beta}(A)x\| &= \sup_{t>0} \left\| \int_\alpha^\beta (f_t \varphi)(A)h(sA)g(sA)x \frac{ds}{s} \right\| \\ &\leq \sup_{s>0} \|g(sA)x\| \sup_{t>0} \int_0^\infty \|(f_t \varphi)(A)h(sA)\| \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Da $f, h \in H_0^\infty$, gilt für ein $r > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|(f_t \varphi)(A)h(sA)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |\varphi(z)f(tz)h(sz)| \|R(z, A)\| dz \\ &\leq \text{const.} \|\varphi\|_{H^\infty} \int_\Gamma \frac{|tsz^2|^r}{(1+|tz|^{2r})(1+|sz|^{2r})} \frac{|dz|}{|z|} \\ &\leq \text{const.} \|\varphi\|_{H^\infty} \begin{cases} \left(\frac{t}{s}\right)^r (1+\log \frac{t}{s}) & \text{falls } 0 < t < s < \infty \text{ und} \\ \left(\frac{s}{t}\right)^r (1+\log \frac{s}{t}) & \text{falls } 0 < s < t < \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Hieraus folgt für $p = \infty$ die Behauptung.

Nun sei also $p \in [1, \infty)$. Ähnlich wie oben verwenden wir $g_{\alpha,\beta}$, jedoch schreiben wir $h = uv$ für zwei H_0^∞ -Funktionen u, v . Eine solche Zerlegung ist leicht möglich. Gilt für ein $r > 0$ die Abschätzung $|h(z)| \leq M|z|^r(1+|z|)^{-2r}$, so wähle etwa $u(z) = z^{r/2}(1+z)^{-r}$ und $v(z) = h(z)z^{-r/2}(1+z)^r$. Diese Zerlegung werden wir gegen Ende des Beweises benutzen, nämlich in der Abschätzung

$$\sup_{s>0} \|(v_s \varphi)(A)\| \leq \text{const.} \sup_{s>0} \int_\Gamma |v(sz)| |\varphi(z)| \frac{|dz|}{|z|} \leq \text{const.} \|\varphi\|_{H_0^\infty}. \quad (2.3.3)$$

Nun aber zum Beweis für $p \in [1, \infty)$. Es sei q der duale Exponent zu p , also

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty \| (f_t \varphi)(\mathcal{A}) g_{\alpha, \beta}(\mathcal{A}) x \|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta \| (f_t \varphi)(\mathcal{A}) u(s\mathcal{A}) v(s\mathcal{A}) g(s\mathcal{A}) x \|^p \frac{ds}{s} \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta \| f(t\mathcal{A}) u(s\mathcal{A}) \|^q \cdot \| f(t\mathcal{A}) u(s\mathcal{A}) \|^p \cdot \| (v_s \varphi)(\mathcal{A}) g(s\mathcal{A}) x \|^p \frac{ds}{s} \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \end{aligned}$$

und mit der Hölderschen Abschätzung

$$\begin{aligned} & \leq \left(\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta \| f(t\mathcal{A}) u(s\mathcal{A}) \|^p \frac{ds}{s} \right)^{p/q} \cdot \right. \\ & \quad \left. \left(\int_\alpha^\beta \| f(t\mathcal{A}) u(s\mathcal{A}) \|^p \cdot \| (v_s \varphi)(\mathcal{A}) g(s\mathcal{A}) x \|^p \frac{ds}{s} \right) \frac{dt}{t} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Die Abschätzung (2.3.2) zeigt (für $\varphi = \mathbb{1}$), daß das erste Integral in $t > 0$ gleichmäßig beschränkt ist. Wir haben also

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty \| (f_t \varphi)(\mathcal{A}) g_{\alpha, \beta}(\mathcal{A}) x \|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ & \leq K \left(\int_0^\infty \int_\alpha^\beta \| f(t\mathcal{A}) u(s\mathcal{A}) \|^p \cdot \| (v_s \varphi)(\mathcal{A}) g(s\mathcal{A}) x \|^p \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ & \stackrel{\text{Fubini}}{=} K \left(\int_\alpha^\beta \int_0^\infty \| f(t\mathcal{A}) u(s\mathcal{A}) \|^p \frac{dt}{t} \cdot \| (v_s \varphi)(\mathcal{A}) g(s\mathcal{A}) x \|^p \frac{ds}{s} \right)^{1/p} \\ & \leq K \sup_{s>0} \left(\int_0^\infty \| f(t\mathcal{A}) u(s\mathcal{A}) \|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \left(\int_\alpha^\beta \| (v_s \varphi)(\mathcal{A}) g(s\mathcal{A}) x \|^p \frac{ds}{s} \right)^{1/p} \\ & \leq K' \|\varphi\|_{H^\infty} \left(\int_\alpha^\beta \| g(s\mathcal{A}) x \|^p \frac{ds}{s} \right)^{1/p} \end{aligned}$$

nach (2.3.3). Dies war zu zeigen. □

Wir wissen nun, daß Operatoren L^p -Abschätzungen für alle H_0^∞ -Funktionen besitzen, wenn sie einer einzigen solchen Abschätzung für ein nichttriviales

f aus H_0^∞ genügen. Es ist dagegen unklar, unter welchen allgemeinen Bedingungen L^p -Abschätzungen existieren. Nach [24, Theorem 3.39] sind L^p -Abschätzungen äquivalent zu $X \hookrightarrow (\dot{X}_{-1}, \dot{X}_1)_{1/2, p}$. Dies ist in Einzelfällen nachprüfbar, etwa dem folgenden

BEISPIEL 2.3.2 Es sei $X = L^q(\mathbb{R}^n)$, $A = -\Delta$. Ist $q \leq 2$ und $p \geq 2$, so genügt A L^p -Abschätzungen der Form (2.3.1). Beweis: es ist $\dot{X}_1 = \dot{H}_q^2(\mathbb{R}^n)$ und $\dot{X}_{-1} = \dot{H}_q^{-2}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt die folgende Inklusionskette

$$\begin{aligned} X &= L^q(\mathbb{R}^n) \stackrel{(1)}{=} \dot{B}_{q,2}^0(\mathbb{R}^n) \\ &\stackrel{(2)}{\hookrightarrow} \dot{B}_{q,2}^0(\mathbb{R}^n) \stackrel{(3)}{\hookrightarrow} \dot{B}_{q,p}^0(\mathbb{R}^n) \stackrel{(4)}{=} (\dot{X}_1, \dot{X}_{-1})_{1/2, p} \end{aligned}$$

Die Gleichheit (1) gilt nach [66, Thm. 1, 5.2.3], (2) folgt nach [12, VI.11.14] aus $q \leq 2$. Inklusion (3) liegt schlicht an der Inklusion der l_p -Räume mit wachsendem p , hier also an $p \geq 2$ (siehe die Definition der homogenen Räume in [66, 5.1.3]), Gleichung (4) schließlich entstammt [66, 5.2.5] für $s = \pm 2$ unter Beachtung von $\dot{H}_q^s(\mathbb{R}^n) = \dot{F}_{q,2}^s(\mathbb{R}^n)$ (siehe [66, Thm. 1, 5.2.3]).

2.4 L^2 -Zulässigkeit vom Typ α

Dieser Abschnitt basiert im wesentlichen auf der Arbeit [22]. Bei der Untersuchung der L^2 -Zulässigkeit haben wir quadratische L^2 -Abschätzungen als wichtiges Hilfsmittel kennengelernt. Diese hängen, wie aus Satz 2.1.5 bekannt, nicht von der gewählten Funktion ab (so diese von Null verschieden ist). Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß für die Wahl $\psi(z) := z^{1/2} \exp(-z)$ wegen

$$\int_0^\infty \|\psi(tA)x\|_X^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \|A^{1/2}T(t)x\|^2 dt \leq \text{const.} \|x\|^2.$$

quadratische L^2 -Abschätzungen zur Zulässigkeit von $A^{1/2}$ für A äquivalent sind. Was passiert aber, wenn wir statt $\psi(z) = z^{1/2} \exp(-z)$ für ein $s > 0$ allgemeiner $\psi_s(z) := z^s \exp(-z)$ schreiben? Nun,

$$\int_0^\infty \|t^s A^s T(t)x\|_X^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty t^\alpha \|A^s T(t)x\|_X^2 dt.$$

Hier haben wir $\alpha := 2s - 1$ gesetzt. Von diesem Modellfall stammt die Idee zu folgender

DEFINITION 2.4.1 Es seien X, Y Banachräume, $-A$ sei Erzeuger einer stark stetigen und beschränkten Halbgruppe $T(t)$ auf X , $\alpha > -1$ und $k \in \mathbb{N}$. Ein Beobachtungsoperator $C \in B(X_k, Y)$ heie *zulässig vom Typ α* , falls eine Zahl $M > 0$ so existiert, daß für alle $x \in X_k$ gilt:

$$\int_0^\infty \|t^{\alpha/2} C T(t)x\|_Y^2 dt \leq M^2 \|x\|_X^2.$$

LEMMA 2.4.2 Es sei $\alpha > -1$ und $\beta > -1$ derart, daß $\alpha/2 + \beta/2 =: k \in \mathbb{N}$ gelte. Ist $C \in B(X_k, Y)$ ein zulässiger Beobachtungsoperator vom Typ α für $T(\cdot)$, so ist die Menge

$$W_C := \{\lambda^{\frac{1+\beta}{2}} C(\lambda+A)^{-k-1} : \lambda > 0\} \quad (2.4.1)$$

in $B(X, Y)$ gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Der Beweis ist eine geringe Variation des bekannten Themas von Lemma 2.1.3, wieder unter Verwendung der Hölder-Ungleichung: Bezeichnet $\Gamma(\cdot)$ die Gammafunktion, so ist für $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} & \|\lambda^{\frac{1+\beta}{2}} C(\lambda+A)^{-k-1}\| \\ &= \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} \left\| \int_0^\infty \frac{(-1)^k}{k!} t^k e^{-\lambda t} C T(t)x dt \right\| \\ &\leq \frac{1}{k!} \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} \int_0^\infty t^{\alpha/2} \|C T(t)x\| t^{\beta/2} e^{-\lambda t} dt \\ &\leq \frac{1}{k!} \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} \left(\int_0^\infty t^\alpha \|C T(t)x\|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty t^\beta e^{-2\lambda t} dt \right)^{1/2} \\ &\stackrel{s=2\lambda t}{=} \frac{1}{k!} \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} \left(\int_0^\infty t^\alpha \|C T(t)x\|^2 dt \right)^{1/2} \left((2\lambda)^{-1-\beta} \int_0^\infty t^\beta e^{-t} dt \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{k!} 2^{-\frac{1+\beta}{2}} \Gamma(1+\beta)^{1/2} \|x\|. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

Im folgenden werden wir nachweisen, daß obige Bedingung unter den Voraussetzungen des Satzes 2.1.6 geeignet ist, die Zulässigkeit vom Typ α zu charakterisieren. Ein wichtiges Beweismittel hierzu ist das folgende Lemma, das für $k = 1$ implizit in [37, Lemma 7.6] verwendet wird. Diese Allgemeine Version geht auf N. KALTON zurück.

LEMMA 2.4.3 Es sei $\omega \in (0, \pi)$ und φ eine Funktion der Klasse $H_0^\infty(S_\omega)$ sowie k eine natürliche Zahl. Dann existiert eine Funktion f aus der Klasse $H_0^\infty(S_\omega)$ und eine Zahl $\gamma \in \mathbb{C}$ so, daß

$$\varphi(z) = z^k f^{(k)}(z) + \gamma \frac{z^k}{(1+z)^{k+1}}, \quad z \in S_\omega. \quad (2.4.2)$$

Gelten für Zahlen $\delta, \varepsilon \in (0, 1)$ die Abschätzungen

$$\varphi(z) = O(|z|^{-\delta}) \quad \text{im Unendlichen und} \quad \varphi(z) = O(|z|^\varepsilon) \quad \text{in Null,}$$

so kann f dergestalt gewählt werden, daß es denselben Abschätzungen genügt.

Der Beweis basiert auf einem *allgemeinen Prinzip*: Ist g eine holomorphe Funktion auf S_ω , die gegen Unendlich in $O(|z|^{-r})$, $r > 1$, liegt, so existiert eine eindeutig definierte Funktion G , die $G' = g$ und $|G(z)| = O(|z|^{-r+1})$ im Unendlichen erfüllt. Gilt darüber hinaus die Abschätzung $|g(z)| = O(|z|^{-s})$ für ein $s > 1$ im Nullpunkt, so ist $|G(z)| = O(|z|^{-s+1})$ in Null. Ist schließlich g außerhalb des Nullpunktes (also auf allen Mengen der Form $\{z \in S_\omega : |z| > \eta\}$ für $\eta > 0$) beschränkt, so gilt dies ebenfalls für G .

Zum Beweis des allgemeinen Prinzips. Wir definieren G auf S_ω , indem für $z = |z|e^{i\theta}$ gesetzt wird:

$$G(z) := -e^{i\theta} \int_{|z|}^{\infty} g(te^{i\theta}) dt.$$

G ist also als Wegintegral auf einem Halbstrahl mit konstantem Argument von z nach Unendlich in S_ω gegeben. Es gilt $G' = g$ und $|G(z)| = O(|z|^{-r+1})$ im Unendlichen: denn aus $|g(z)| \leq K|z|^{-r}$ für hinreichend großes $|z|$, folgt $|G(z)| \leq \frac{K}{r-1}|z|^{-r+1}$. Damit folgt auch die Beschränktheit von G außerhalb des Nullpunktes, sofern g diese erfüllt.

Ist zusätzlich die Abschätzung im Nullpunkt gegeben, so gilt die Abschätzung

$$|g(\lambda)| \leq M \begin{cases} |\lambda|^{-r} & \text{falls } |\lambda| \geq 1 \\ |\lambda|^{-s} & \text{falls } |\lambda| \in (0, 1), \end{cases}$$

für ein $M > 0$, woraus zunächst $|G(z)| \leq c|z|^{1-s} + d$ für $|z| < 1$ folgt, sodaß die behauptete Abschätzung $|G(z)| = O(|z|^{-s+1})$ im Nullpunkt folgt.

Zum Beweis des Lemmas. Nach Voraussetzung gehört φ zur Klasse $H_0^\infty(S_\omega)$ und es gibt Zahlen $\delta, \varepsilon \in (0, 1)$ für die gilt:

$$|\varphi(z)| = O(|z|^{-\delta}) \quad \text{im Unendlichen und} \quad |\varphi(z)| = O(|z|^\varepsilon) \quad \text{in Null.}$$

Wenden wir das allgemeine Prinzip auf die Funktion $G_k(z) = \frac{\varphi(z)}{z^k}$ mit den Exponenten $r = k + \delta$ und $s = k - \varepsilon$ an, so erhalten wir eine Funktion $G_{k-1} = -\int_0^\infty \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^k} d\lambda$. Es gilt $G_{k-1}(z) = O(|z|^{-k+1-\delta})$ im Unendlichen und $G_{k-1}(z) = O(|z|^{-k+1-\varepsilon})$ im Nullpunkt.

Falls $k \geq 2$, wenden wir das allgemeine Prinzip wiederholt an und erhalten so Funktionen G_{k-2}, \dots, G_0 , für die $G_p = -\int_0^\infty G_{p+1}$ für $p = 0, \dots, k-2$ gilt. In jedem Falle erhalten wir eine holomorphe Funktion G_0 auf S_ω , die

$$G_0^{(k)}(z) = G_k(z) = \frac{\varphi(z)}{z^k} \tag{2.4.3}$$

erfüllt und für die gilt:

$$G_0(z) = O(|z|^{-\delta}) \quad \text{im Unendlichen.} \tag{2.4.4}$$

G_0 ist außerdem außerhalb des Nullpunktes beschränkt. Nun betrachten wir das Verhalten von G_0 in Null: es gilt $G_1(z) = O(|z|^{\varepsilon-1})$ und $G_1(z) = O(|z|^{-1-\delta})$ gegen Unendlich; G_1 ist also integrierbar. Setzen wir

$$c = -\int_0^\infty G_1(t) dt \quad \text{und} \quad f(z) := G_0(z) - \frac{c}{1+z}, \quad z \in S_\omega,$$

so ist f offenbar holomorph und aus (2.4.3) folgt die behauptete Darstellung (2.4.2) mit $\gamma = c(-1)^k k!$. Schließlich zeigen wir, daß f wirklich in $H_0^\infty(S_\omega)$ liegt. Zunächst zeigt (2.4.4), daß $f(z) = O(|z|^{-\delta})$ im Unendlichen (hier geht $\delta < 1$ ein). In Null dagegen ist

$$c - G_0(z) = -\int_0^z G_1(\lambda) d\lambda$$

Daher ist $|G_0(z) - c| = O(|z|^\varepsilon)$ im Nullpunkt. Wegen der Gleichheit $f(z) = (G_0(z) - c) + c \frac{z}{z+1}$ ist schließlich $f(z) = O(|z|^\varepsilon)$ in Null. \square

SATZ 2.4.4 Es sei A ein sektorieller Operator vom Typ $\omega < \frac{\pi}{2}$ auf dem Banachraum X , der dichtes Bild habe und einer quadratischen L^2 -Abschätzung genüge. Es seien Zahlen $\alpha > -1$ und $\beta \in (-1, 3)$ derart gegeben, daß $k := \frac{\alpha + \beta}{2}$ eine nichtnegative ganze Zahl sei. Dann ist ein stetiger Beobachtungsoperator $C : X_k \rightarrow Y$ genau dann zulässig vom Typ α , wenn die Menge W_C aus (2.4.1) beschränkt ist.

Beweis. Die Notwendigkeit ist bereits in Lemma 2.4.2 gezeigt. Wir zeigen nun, daß die Bedingung auch hinreichend ist. Ist $k = 0$, so setzen wir $\beta' := \beta + 2$ und $k' := 1$. Wegen der Sektorialität von A gilt dann die Voraussetzung des Satzes auch für (α, β', k') anstelle von (α, β, k) . Wir können also ohne Einschränkung $k \in \mathbb{N}$ voraussetzen.

Nach [7, Theorem 3.8] ist A injektiv. Wegen $\mathcal{R}(T(t)) \subseteq \mathcal{D}(A^k)$ für $t > 0$ gilt die Darstellung $t^{\alpha/2} CT(t)x = t^{\alpha/2-k} CA^{-k} \varphi_0(tA)x$, wobei die Funktion φ_0 durch $\varphi_0(z) := z^k e^{-z}$ gegeben ist. Wir zerlegen φ_0 als $\varphi_0(z) = \varphi(z)\psi(z)$ mit den Funktionen

$$\varphi(z) = z^\varepsilon (1+z)^{-1} \quad \text{und} \quad \psi(z) = z^{k-\varepsilon} (1+z)e^{-z}.$$

Dabei lassen wir die genaue Wahl von $\varepsilon \in (0, 1)$ noch offen; es sei bereits angemerkt, daß sie nur von β abhängt. Wir erhalten

$$\int_0^\infty t^\alpha \|CT(t)x\|_Y^2 dt \leq \int_0^\infty \|t^{\frac{\alpha+1}{2}-k} CA^{-k} \varphi(tA) \psi(tA)x\|_X^2 \frac{dt}{t}.$$

Das Ziel ist wiederum, die quadratische L^2 -Abschätzung für ψ auszunutzen. Es gilt eine gleichmäßig beschränkte Erweiterung des ersten Ausdrucks im Integral auf der rechten Seite zu finden: dazu seien $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2})$ und Γ der bekannte Integrationsweg längs des Sektorrandes S_ν für $\nu \in (\omega, \theta)$. Nach Lemma 2.4.3 existiert eine Funktion f aus der Klasse $H_0^\infty(S_\theta)$, bezüglich der $\varphi(z) = z^k f^{(k)}(z) + \gamma z^k (1+z)^{-k-1}$ gilt. Zunächst zeigen wir die Darstellung

$$CA^{-k}[z^k f^{(k)}(z)](tA)x = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) t^k CR(z, tA)^{k+1} x dz. \quad (2.4.5)$$

für $x \in Z := \mathcal{R}(A^k(I+A)^{-k-1})$. Dazu sei Γ' der in gleicher Weise wie Γ orientierte Rand eines Sektors S_σ , wobei $\sigma \in (\nu, \theta)$ gewählt wird. Wegen (2.4.2) ist die Funktion $z^k f^{(k)}(z)$ aus der Klasse $H_0^\infty(S_\theta)$; nach dem Cauchyschen Integralsatz

gilt daher

$$\begin{aligned}
 [z^k f^{(k)}(z)](tA) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [z^k f^{(k)}(z)] R(z, tA) dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} f(\zeta) d\zeta \right] z^k R(z, tA) dz \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} f(\zeta) \left[\frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^k}{(\zeta - z)^{k+1}} R(z, tA) dz \right] d\zeta \\
 &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma'} f(\zeta) (tA)^k R(\zeta, tA)^{k+1} dz \\
 &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) (tA)^k R(z, tA)^{k+1} dz.
 \end{aligned}$$

Die Vertauschung der beiden Integrale in (*) ist wegen der aus $\|R(z, tA)\| = \|z^{-1} t^{-1} z R(t^{-1}z, A)\| \leq M|z|^{-1}$ folgenden Abschätzung

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} \frac{|z^k f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{k+1}} \|R(z, tA)\| d|z| d|\zeta| \\
 &\leq M \int_{\Gamma'} |f(\zeta)| \int_{\Gamma} \frac{|z^{k-1}|}{|\zeta - z|^{k+1}} d|z| d|\zeta| \\
 &\stackrel{z:=\lambda\zeta}{\leq} K_0 \int_{\Gamma} \frac{|\lambda|^{k-1}}{|1 - \lambda|^{k+1}} d|\lambda| \int_{\Gamma'} |f(\zeta)| \left| \frac{d\zeta}{\zeta} \right| < \infty.
 \end{aligned}$$

nach dem Satz von Fubini gerechtfertigt. Nun kommt der Teilraum Z ins Spiel: er dient dazu, das a priori nicht erlaubte Hereinziehen von C in das Integral (denn C muß als linearer Operator von X nach Y nicht einmal abgeschlossen sein!), auf Z als zulässig zu erkennen: es ist für $x \in X$ und $z = A^k(I+A)^{-k-1}x$ nämlich

$$\begin{aligned}
 CA^{-k}[z^k f^{(k)}(z)](tA)z &= C(I+A)^{-k-1}[z^k f^{(k)}(z)](tA)x \\
 &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) t^k C(I+A)^{-k-1} R(z, tA)^{k+1} x dz \\
 &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) t^k CA^{-k} R(z, tA)^{k+1} z dz.
 \end{aligned}$$

Dieses „Hereinholen“ des Beobachtungsoperators C in das Integral durch geeignete Resolventenpotenzen werden wir auch in späteren Beweisen noch verwenden. Also gilt (2.4.5) auf dem dichten Teilraum Z .

Wir zeigen nun mittels der Beschränktheit von W_C , daß das Integral der rechten Seite von Gleichung (2.4.5) auf ganz X in der Norm konvergiert, und demnach

eine stetige Erweiterung von $CA^{-k}[z^k f^{(k)}(z)](tA)$ darstellt. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} K(t) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{\frac{\alpha+1}{2}} f(z) CR(z, tA)^{k+1} dz + \gamma t^{\frac{\alpha+1}{2}} C(I+tA)^{-k-1} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{\frac{1-\beta}{2}} f(z) \left[\left(\frac{z}{t} \right)^{\frac{1+\beta}{2}} CR\left(\frac{z}{t}, A\right)^{k+1} \right] \frac{dz}{z} + \gamma \left[t^{-\frac{1+\beta}{2}} C\left(\frac{1}{t}+A\right)^{-k-1} \right] \end{aligned}$$

Wie in Lemma 2.1.7 können wir die Beschränktheit der Operatoren aus W_C auf den Integrationsweg Γ ausdehnen. Es ist also für ein $M > 0$

$$\|K(t)\| \leq M \int_{\Gamma} |z|^{-\frac{1+\beta}{2}} |f(z)| |dz| + \gamma M. \quad (2.4.6)$$

Zunächst erkennt man, daß die letzte Größe nicht mehr von $t > 0$ abhängt. Nun müssen wir das in Lemma 2.4.3 gezeigte Wachstumsverhalten von f heranziehen, um zu zeigen, daß das Integral wirklich endlich ist: es ist $|f(z)| = O(|z|^\varepsilon)$ in Null und $|f(z)| = O(|z|^{\varepsilon-1})$ im Unendlichen.

Daher konvergiert das Integral (2.4.6) genau dann, wenn $\frac{1+\beta}{2} - \varepsilon < 1$ und $\frac{1+\beta}{2} + (1-\varepsilon) > 1$ gelten, oder, äquivalent, wenn gilt

$$\varepsilon < \frac{1+\beta}{2} < 1 + \varepsilon.$$

Diese Grenzen erlauben wegen $\beta \in (-1, 3)$, also $\frac{1+\beta}{2} \in (0, 2)$ stets die Wahl einer geeigneten Zahl $\varepsilon \in (0, 1)$ in Abhängigkeit von β . Damit haben wir insgesamt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^\alpha \|CT(t)x\|_Y^2 dt &= \int_0^\infty t^\alpha \|K(t)t^{-1/2}\psi(tA)x\|_Y^2 dt \\ &\leq K_\beta^2 \int_0^\infty \|\psi(tA)x\|_Y^2 \frac{dt}{t} \leq M^2 K_\beta^2 \|x\|^2, \end{aligned}$$

in der, wie angekündigt, die quadratische L^2 -Abschätzung von A bezüglich ψ benutzt wird. \square

Wiederum ist die quadratische L^2 -Abschätzung von A notwendig: gilt der Satz, so erfüllt $C := A^{\frac{\alpha+1}{2}}$ wegen der Sektorialität von A die Voraussetzung an W_C . Folglich ist $A^{\frac{\alpha+1}{2}}$ L^2 -zulässig vom Typ α . Wegen

$$\int_0^\infty \|(tA)^{\frac{\alpha+1}{2}} T(t)x\|_Y^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \|t^{\alpha/2} A^{\frac{\alpha+1}{2}} T(t)x\|_Y^2 dt \leq M^2 \|x\|^2$$

genügt A also quadratischen L^2 -Abschätzungen. Wir kommen nun zu der dualen Aussage über die Zulässigkeit vom Typ α für Kontrolloperatoren.

DEFINITION 2.4.5 Es seien U, X Banachräume, $-A$ sei Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $T(t)$ auf X und $\alpha > -1$. Ein Kontrolloperator $B \in B(U, X_{-k})$ heie *zulässig vom Typ α* , falls eine Zahl $K > 0$ so existiert, daß fur alle $u \in L^2(\mathbb{R}_+, U)$ das Integral $\int_0^\infty t^{\alpha/2} T_{-k}(t) B u(t) dt$ in X_{-k} existiert, Werte in X annimmt und die folgende Abschätzung gilt:

$$\left\| \int_0^\infty t^{\alpha/2} T_{-k}(t) B u(t) dt \right\|_X \leq K \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+, U)}.$$

Analog zu Lemma 2.4.2 erhalten wir eine notwendige Bedingung fur die Zulässigkeit vom Typ α an B : fur $u \in U$ gilt

$$\begin{aligned} \left\| \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} (\lambda + A_{-k})^{-k-1} B u \right\|_X &= \frac{1}{k!} \left\| \int_0^\infty \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} t^k e^{-\lambda t} T_{-k}(t) B u dt \right\|_X \\ &= \frac{1}{k!} \left\| \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}} T_{-k}(t) B \left[\lambda^{\frac{1+\beta}{2}} t^{\frac{\beta}{2}} e^{-\lambda t} \otimes u \right] dt \right\|_X \\ &\leq \frac{1}{k!} \|u\|_U \left\| t \mapsto \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} t^{\beta/2} e^{-\lambda t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &\leq \frac{1}{k!} 2^{-1-\alpha} \Gamma(\alpha+1) \|u\|_U, \end{aligned}$$

dabei bezeichne $\Gamma(\cdot)$ die Gammafunktion. Als notwendig erkennen wir also die gleichmäßige Beschränktheit der Menge

$$W_B := \left\{ \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} (\lambda + A_{-k})^{-k-1} B : \lambda > 0 \right\} \subseteq B(U, X). \quad (2.4.7)$$

Ist X reflexiv, so ist eine Charakterisierung der Zulässigkeit vom Typ α recht einfach zu gewinnen: $-A'$ ist dann nämlich Erzeuger der adjungierten Halbgruppe $T(\cdot)'$ auf X' , sodaß wir in voller Analogie zur Notation X_k mit $(X')_k$ den zu $\mathcal{D}((A')^k)$ gehörenden Banachraum (mit Graphennorm) bezeichnen konnen. Nun konnen wir wegen des durch

$$\langle x, \kappa_k(y) \rangle = \langle (I_{-k} + A_{-k})^{-k} x, (I_k + A')^k y \rangle, \quad x \in X_{-k}, y \in (X')_k,$$

gegebenen Isomorphismus $\kappa_k : (X')_k \rightarrow (X_{-k})'$ den Operator $C := B' : (X_{-k})' \rightarrow U'$ als Beobachtungsoperator fur A' ansehen, und das schon bekannte Resultat 2.1.6 anwenden. Wir erhalten also als Bedingung eine quadratische L^2 -Abschätzung fur A' und die Beschränktheit der Operatorenmenge W_B .

Wollen wir die Voraussetzung der Reflexivität von X fallen lassen, so mussen wir auch einen neuen Beweis anstreben:

SATZ 2.4.6 Es sei A ein sektorieller, dicht definierter Operator vom Typ $\omega < \frac{\pi}{2}$ auf einem Banachraum X , der dichtes Bild habe. Weiterhin genüge A' einer quadratischen L^2 -Abschätzung auf X' . Sind U ein weiterer Banachraum, $\alpha > -1$ und $\beta \in (-1, 3)$ so, daß $k := \frac{\alpha + \beta}{2}$ eine nichtnegative ganze Zahl ist, so ist ein linearer stetiger Operator $B : U \rightarrow X_{-k}$ genau dann zulässig vom Typ (α) , wenn die Menge W_B aus (2.4.7) in $B(U, X)$ beschränkt ist.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 2.4.4 können wir zunächst $k \in \mathbb{N}$ annehmen. Die Notwendigkeit der gleichmäßigen Beschränktheit wurde bereits nachgewiesen. Für die andere Richtung wählen wir ein $\theta \in (\omega, \frac{\pi}{2})$ und betrachten den bekannten Integrationsweg Γ . Zunächst wollen wir nachweisen, daß das Integral

$$\int_0^\infty t^{\alpha/2} T_{-k}(t) B u(t) dt \quad (2.4.8)$$

als Pettis-Integral in X_{-k} existiert, sodann, daß es eine stetige lineare Abbildung Φ von $L^2(\mathbb{R}_+, U)$ nach X definiert. Bezüglich des oben angegebenen Isomorphismus $\kappa_k : (X')_k \rightarrow (X_{-k})'$, betrachten wir für ein $x' \in (X')_k$ den Ausdruck

$$\int_0^\infty |\langle t^{\frac{\alpha}{2}} T_{-k}(t) B u(t), x' \rangle| dt = \int_0^\infty |\langle t^{\frac{\alpha}{2}-k} A^{-k} (tA)^k T_{-k}(t) B u(t), x' \rangle| dt.$$

Wieder zerlegen wir die Funktion $\varphi_0(z) = z^k e^{-z}$ in ihre bekannte Darstellung $\varphi_0(z) = \varphi(z)\psi(z)$,

$$\varphi(z) = z^\varepsilon (1+z)^{-1} \quad \text{und} \quad \psi(z) = z^{k-\varepsilon} (1+z)e^{-z},$$

wobei die Wahl von $\varepsilon \in (0, 1)$ auf später verschoben wird. Es entsteht

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |\langle t^{\frac{\alpha}{2}} T_{-k}(t) B u(t), x' \rangle| dt \\ &= \int_0^\infty |\langle A_{-k}^{-k} \varphi(tA_{-k}) t^{\frac{\alpha}{2}-k} \psi(tA_{-k}) B u(t), x' \rangle| dt. \end{aligned}$$

An dieser Stelle möchten wir die Vertauschung $A_{-k}^{-k} \varphi(tA_{-k}) = \varphi(tA_{-k}) A_{-k}^{-k}$ durchführen. Sie ist natürlich wegen der Funktionalkalküleigenschaften auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche beider Ausdrücke erlaubt. Hier benutzen wir die Voraussetzung der Analytizität von $T(\cdot)$: es gilt nämlich für das Bild $\mathcal{R}(T_{-k}(\cdot)B) \subseteq \mathcal{D}^\infty(A_{-k}) = \mathcal{D}^\infty(A)$. Damit ist die folgende Umformung gerechtfertigt:

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty |\langle \varphi(tA_{-k})t^{\frac{\alpha}{2}-k}A_{-k}^{-k}\psi(tA_{-k})Bu(t), x' \rangle| dt \\
 &= \int_0^\infty |\langle t^{\frac{\alpha+1}{2}-k}A_{-k}^{-k}\psi(tA_{-k})Bu(t), t^{-\frac{1}{2}}\varphi(tA_{-k})'x' \rangle| dt \\
 &\leq \left\| \left[t^{\frac{\alpha+1}{2}-k}A_{-k}^{-k}\psi(tA_{-k})B \right] u(t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+, X)} \left\| \varphi(tA)'x' \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X')}.
 \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung ist wegen der Hölder-Ungleichung gerechtfertigt. Die gleichmäßige Beschränktheit der operatorwertigen Funktion

$$t \mapsto t^{\frac{\alpha+1}{2}-k}A_{-k}^{-k}\psi(tA_{-k})B$$

zeigt man völlig analog zum Beweis von Satz 2.4.4. Hierbei können wir wieder eine geeignete Wahl von ε treffen.

Die quadratische L^2 -Abschätzung für φ auf X' zeigt nun, daß das Integral (2.4.8) schwach existiert, also eine stetige lineare Abbildung $\Phi : L^2(\mathbb{R}_+, U) \rightarrow X''$ definiert. Ist u eine Treppenfunktion, deren Träger kompakt ist und die Null meidet, so existiert das Integral (2.4.8) sogar als Bochner-Integral. Wegen der Analytizität der Halbgruppe liegt sein Wert in X . Da derartige Treppenfunktionen in $L^2(\mathbb{R}_+, U)$ dicht liegen, ist das Bild von Φ in X enthalten. Nach dem Graphensatz ist damit Φ auch als Abbildung von $L^2(\mathbb{R}_+, U)$ nach X stetig. \square

Auch in diesem Fall ist die quadratische L^2 -Abschätzung an A' notwendig.

2.5 L^2 -Zulässigkeit und Interpolation

Hat $CA^{-1/2}$ eine stetige Fortsetzung K von X nach Y und genügt A quadratischen L^2 -Abschätzungen, so ist $CT(t) = K(tA)^{1/2}T(t)t^{-1/2}$, sodaß

$$\int_0^\infty \|CT(t)x\|^2 dt \leq \int_0^\infty \|K\|^2 \|\varphi(tA)x\|^2 \frac{dt}{t} \leq M\|K\|^2\|x\|^2,$$

wobei $\varphi(z) := z^{1/2}e^{-z}$ gesetzt ist. Es folgt also die L^2 -Zulässigkeit von C , wenn immer A einer quadratischen L^2 -Abschätzung genügt. Es stellt sich die Frage, ob die L^2 -Zulässigkeit von C nicht einfach dadurch beschrieben wird, daß $CA^{-1/2}$ eine stetige Fortsetzung habe. Zunächst einmal eine Annäherung „bis auf ein Epsilon“:

LEMMA 2.5.1 Es sei A ein dicht definierter sektorieller Operator, der dichtes Bild habe und einer quadratischen L^2 -Abschätzung genüge. Gelten für einen Beobachtungsoperator C die Abschätzungen $\|Cx\| \leq \text{const.} \|Ax\|$ und $\|\lambda^{1/2}C(\lambda+A)^{-1}\| \leq M$ für $\lambda > 0$, so hat der Operator $K_\varepsilon := CA^{-1/2-\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon \in (0, 1/2)$ eine stetige Fortsetzung von X nach Y .

Die relative A -Beschränktheit von C ist natürlich eine stärkere Forderung als $C \in B(X_1, Y)$. Setzt man nur $C \in B(X_1, Y)$ voraus, so ist der Fall $C = \text{Id}_X$ und $0 \notin \rho(A)$ möglich, sodaß man das gewünschte Ergebnis nicht erwarten kann.

Beweis. Da A dichtes Bild hat, ist A injektiv. Der Operator CA^{-1} besitzt also eine stetige Fortsetzung L von X nach Y . Es sei $\varepsilon \in (0, 1/2)$ gewählt. Für $s := 1/2 + \varepsilon$ und $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt die Darstellung

$$CA^{-s}x = C(0+A)^{-s}x = \frac{1}{1+s} \int_0^\infty CR(\lambda, -A)^{s+1}x \, d\lambda.$$

Um den Operator C in das Integral hineinziehen zu dürfen, schreiben wir $x = (I+A)^{-1}x_0$, $x_0 \in X$ und holen so C ins Integral; wir zeigen nun, daß aus Lemma 1.3.4 die Konvergenz des Integrals auf der rechten Seite als Bochnerintegral in X folgt und damit die Darstellung auf dem gesamten Definitionsbereich von CA^{-s} richtig ist: für $\lambda \rightarrow 0$ betrachten wir dazu die Abschätzung

$$\|CR(\lambda, -A)^{s+1}\| = \|CA^{-1}AR(\lambda, -A)R(\lambda, -A)^s\| \leq M\|CA^{-1}\| \cdot |\lambda|^{-s},$$

sodaß wegen $s < 1$ die Konvergenz in Null gesichert ist. Für $\lambda \rightarrow \infty$ gilt dahingegen nach Voraussetzung

$$\|CR(\lambda, -A)^{1+s}\| = \|\lambda^{1/2}CR(\lambda, -A)\lambda^{-1/2}R(\lambda, -A)^s\| \leq \text{const.} \lambda^{-1-\varepsilon}.$$

Damit konvergiert das Integral also auf ganz X als Bochnerintegral und definiert einen beschränkten Operator, der CA^{-s} fortsetzt. \square

Es stellt sich nun die Frage, ob sich die obige Aussage auch auf $\varepsilon = 0$ verschärfen läßt. Es zeigt sich, daß dieser fehlende Grenzfall keine Ungeschicklichkeit in der Beweisführung darstellt; in der Tat hat G. WEISS bereits in [71, Remark 3.3] mit einem abstrakten Argument darauf hingewiesen, daß dies nicht allgemein gelten könne, da gewisse reelle und komplexe Interpolationsräume nicht zusammenpassen; das folgende Beispiel benutzt genau diese Idee:

BEISPIEL 2.5.2 Es sei $X = L^2(\mathbb{R})$ und $A = A' = \varepsilon - \Delta$, $\varepsilon > 0$. Wir wollen das Beispiel so anlegen, daß $K = \overline{CA^{-1}}$ stetig ist. Zunächst betrachten wir die in der Resolventenabschätzung auftretende Menge

$$\begin{aligned} \{\lambda^{1/2}CR(\lambda, A) : \lambda > 0\} &= \{\lambda^{1/2}CA^{-1}AR(\lambda, A) : \lambda > 0\} \\ &= \{\lambda^{1/2}KAR(\lambda, A) : \lambda > 0\}. \end{aligned}$$

Sie ist offenbar genau dann beschränkt, wenn die (adjungierte) Menge

$$\{\lambda^{1/2}A'R(\lambda, A')K' : \lambda > 0\}$$

dies ist, oder, mit anderen Worten, falls

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(K') &\subseteq \left\{ x \in X : \{\lambda^{1/2}A'R(\lambda, A')x : \lambda > 0\} \text{ beschränkt} \right\} \\ &\stackrel{(*)}{=} (X, \mathcal{D}(A'))_{1/2, \infty} \stackrel{(**)}{=} B_{2, \infty}^1. \end{aligned}$$

Die Gleichheit (*) entstammt [67, 1.14.2] und (**) entstammt [2, 5.9].

Andererseits ist $\mathcal{D}(CA^{-1/2}) \subseteq \mathcal{D}(A^{1/2}) \cap \mathcal{R}(A^{1/2})$, woraus $CA^{-1/2} \subseteq KA^{1/2}$ folgt. Ist $CA^{-1/2}$ also beschränkt, so auch $KA^{1/2}$. Die Beschränktheit von $(A')^{1/2}K'$ können wir wie folgt beschreiben:

$$\mathcal{R}(K') \subseteq \mathcal{D}((A')^{1/2}) = \mathcal{D}(A^{1/2}) \stackrel{(1)}{=} [X, \mathcal{D}(A)]_{1/2} \stackrel{(2)}{=} B_{2,2}^1 \stackrel{(3)}{=} H_2^1.$$

(1)–(3) gelten nach [67, 1.15.3, 2.3.1 und 2.4.2]. Wir suchen nun einen Operator K , dessen Bild zwar in $B_{2, \infty}^1$, nicht aber in seinem Teilraum $B_{2,2}^1$ enthalten ist. Dann nämlich ist K stetig, $CA^{-1/2}$ aber nicht.

Zur Konstruktion von K befassen wir uns mit den Normen der beteiligten Besovräume: es sei ψ eine beliebig oft differenzierbare nicht-negative Funktion mit Träger im Intervall $[1/2, 2]$ dergestalt, daß gilt $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(2^k s) = 1$ für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir setzen $\varphi_k(t) := \psi(2^{-k}|t|)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\varphi_0(t) := 1 - \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k(t)$. Dann lassen sich nach [19] die Normen in $B_{2, \infty}^1$ bzw. $B_{2,2}^1$ wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{2, \infty}^1} &= \sup_{k \in \mathbb{N}_0} 2^k \|f * \check{\varphi}_k\|_{L^2}, & (2.5.1) \\ \|f\|_{B_{2,2}^1} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{2k} \|f * \check{\varphi}_k\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Wir definieren einen Operator $T : l_\infty \rightarrow B_{2,\infty}^1$ über

$$T : (\alpha_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n \check{\varphi}_{3n}. \quad (2.5.2)$$

Mit $\check{\varphi}_k$ sei hier die inverse Fouriertransformation von φ_k bezeichnet. Wir beabsichtigen, die β_n so zu wählen, daß T ein Isomorphismus wird. Dazu bestimmen wir

$$\|T(\alpha_n) * \check{\varphi}_k\|_{L^2} = c \begin{cases} |\alpha_m \beta_m| \|\varphi_{3m}^2\|_{L^2} & \text{falls } k = 3m \\ |\alpha_m \beta_m| \|\varphi_{3m} \varphi_{3m+1}\|_{L^2} & \text{falls } k = 3m + 1 \\ |\alpha_m \beta_m| \|\varphi_{3m} \varphi_{3m-1}\|_{L^2} & \text{falls } k = 3m - 1 \end{cases}$$

Schließlich ist

$$\|\varphi_k^2\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_k(t)|^4 dt = 2^k \int_{1/2}^2 |\psi(t)|^4 dt = 2^k m_0^2$$

und

$$\|\varphi_k \varphi_{k+1}\|_{L^2}^2 = 2^k \int_{1/2}^1 |\psi(t)\psi(2t)|^2 dt = 2^k m_1^2.$$

Die Zahlen m_0, m_1 hängen, wie man sieht, nur von der gewählten Funktion ψ ab. Setzen wir $\beta_m := 2^{-3/2 m}$, so ist insgesamt

$$\min(m_0, 2^{-3/2} m_1) \|(\alpha_n)\|_\infty \leq \|T(\alpha_n)\|_{2,\infty}^1 \leq \max(m_0, 2m_1) \|(\alpha_n)\|_\infty,$$

sodaß T , wie gewünscht, l_∞ isomorph nach $B_{2,\infty}^1$ einbettet. Die Normdefinition (2.5.1) zeigt, daß durch (2.5.2) auch ein Isomorphismus \tilde{T} von l_2 nach $B_{2,2}^1$ definiert wird. Wir sind also noch nicht ganz am Ziel. Wir bemühen dazu einen weiteren Operator S , den wir wie folgt definieren: Es sei $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge der Einheitskugel von l_2 . Wir setzen

$$S : \begin{cases} l_2 & \rightarrow l_\infty \\ x & \mapsto (x'_n(x))_{n \in \mathbb{N}}. \end{cases}$$

Offenbar gilt $\|S\| \leq 1$. Da jedoch für alle $k \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\|x\|_{l_2} = \sup_{n \geq k} |x'_n(x)|$ gilt, ist $S(x)$ keine Nullfolge und erst recht kein Element aus l_2 . Nun können wir beide Ideen zusammenführen: wir betrachten

$$\begin{array}{ccccc} L^2(\mathbb{R}) & \xleftrightarrow{\sim} & l_2 & \xrightarrow{S} & l_\infty \xrightarrow{T} B_{2,\infty}^1 \\ & & & \searrow S & \cup \\ & & & & l_2 \xrightarrow{\tilde{T}} B_{2,2}^1 = H_2^1. \end{array}$$

Die Hintereinanderausführung der Operatoren in der ersten Zeile heiße K . Konstruktionsgemäß leistet er das Gewünschte. \square

BEMERKUNG 2.5.3 In Satz 2.4.4 wird für die Wahl $\alpha = 0$ die Zulässigkeit von Beobachtungsoperatoren charakterisiert. Im Gegensatz zum Beweis von Satz 2.1.6 ist hier der Fall $k = 1$ möglich. Damit ergeben sich unter der Voraussetzung an A , quadratische L^2 -Abschätzungen zu besitzen, die folgenden zur Zulässigkeit von $C \in B(X_1, Y)$ äquivalenten Bedingungen: eine der Mengen

$$W_k := \{\lambda^{1/2} C(\lambda + A)^{-1} [\lambda(\lambda + A)^{-1}]^k : \lambda > 0\}, \quad k \in \{0, 1\}$$

ist beschränkt in $B(X, Y)$. Da die Operatoren $\lambda(\lambda + A)^{-1}$ wegen der Sektorialität von A gleichmäßig beschränkt sind, ist die Beschränktheit von W_1 offenbar notwendig. Die Tatsache, daß sie auch hinreichend ist, verschärft die Aussage von Satz 2.1.6 noch einmal. Wir können die auftretenden Operatoren jedoch auch anders auffassen:

$$\begin{aligned} \lambda^{1/2} C(\lambda + A)^{-1} &= CA^{-1/2} (\lambda^{-1} A)^{1/2} (1 + \lambda^{-1} A)^{-1} = CA^{-1/2} \varphi_1(\lambda^{-1} A) \\ \lambda^{3/2} C(\lambda + A)^{-2} &= CA^{-1/2} (\lambda^{-1} A)^{1/2} (1 + \lambda^{-1} A)^{-2} = CA^{-1/2} \varphi_2(\lambda^{-1} A). \end{aligned}$$

Dabei ist $\varphi_1(z) = z^{1/2}(1+z)^{-1}$ und $\varphi_2(z) = z^{1/2}(1+z)^{-2}$.

In der Tat steht hinter dieser Beobachtung ein allgemeineres Prinzip, das entfernt an Satz 2.1.5 erinnert: ist A ein dicht definierter sektorieller Operator mit dichtem Bild auf einem Hilbertraum H , so kann man auf $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{D}(A)$ die Quadratfunktionennorm $\|f(tA) \cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)}$ einführen, und bezüglich dieser zu einem Raum H_A vervollständigen, wobei $f \in H_\theta^\infty(S_\theta) \setminus \{0\}$ für $\theta \in (\omega, \pi)$ gewählt sei. Dann besitzt A genau dann einen beschränkten H^∞ -Kalkül, wenn $H = H_A$ gilt (siehe [46, Bemerkung nach Thm. 5]). Hier ist, wie wir im Beweis von Satz 2.1.6 gesehen haben, die Resolventenabschätzung an C äquivalent zur Existenz einer gleichmäßig beschränkten Fortsetzung von $CA^{-1/2}f(tA)$ von X nach Y für derartige Funktionen f . Diese Aussage läßt sich mit reellen Interpolationsräumen in Verbindung bringen. Dazu benötigen wir den folgenden Begriff aus der Arbeit [24] von M. HAASE:

DEFINITION 2.5.4 Es sei A ein injektiver, sektorieller Operator und Zahlen $\theta \in \mathbb{R}$ und $p \in [1, \infty]$ gegeben. Ist $\psi \in H_\omega^\infty(S_\omega) \setminus \{0\}$ für ein $\omega > 0$, so sei

$$X_{\theta, \psi, p} := \{x \in X : t^{-\theta} \psi(tA)x \in L^p(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)\}$$

der zu θ, ψ und p gehörige Marcinkush-Zygmund-Raum.

Mit der natürlichen Norm

$$\|x\|_{\theta, \psi, p} := \left\| t^{-\theta} \psi(tA)x \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)}$$

wird $X_{\theta, \psi, p}$ zu einem normierten Raum. Nach Satz 2.3.1 sind die Normen $\|\cdot\|_{\theta, \psi, p}$ und $\|\cdot\|_{\theta, \varphi, p}$ für zwei von Null verschiedene Funktionen $\varphi, \psi \in H_0^\infty$ äquivalent. Wir schreiben deshalb kurz $X_{\theta, p}$ anstelle von $X_{\theta, \psi, p}$. Zu reellen Interpolationsräumen stehen die M^c Intosh-Yagi Räume dabei in folgender Beziehung (siehe [24, Theorem 3.39]):

SATZ 2.5.5 Es sei A ein dicht definierter sektorieller Operator mit dichtem Bild auf dem Banachraum X . Bezeichnen wir mit \mathcal{D}_A den Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ von A mit der homogenen Norm $\|A \cdot\|$ und versehen wir analog den Bildraum \mathcal{R}_A mit der Norm $\|A^{-1} \cdot\|$, so gilt für alle $\theta \in (0, 1)$ und $p \in [1, \infty]$ die Beziehung

$$(\mathcal{R}_A, \mathcal{D}_A)_{\theta, p} = X_{2\theta-1, p}.$$

Nun können wir die Verbindung zu Interpolationsräumen aufzeigen. Als Motivation dient die folgende, formale Betrachtung:

Es sei X als reflexiv vorausgesetzt. Dies dient dazu, problemlos dualisieren zu können. Zum Schluß hin werden wir diese Voraussetzung wieder fallen lassen können und einen allgemeingültigen Satz erhalten. Um die Beschränktheit von $\{\lambda^{1/2}C(\lambda+A)^{-1} : \lambda > 0\}$ zu beschreiben, setzen wir $K := CA^{-1/2}$. Die Operatoren $\lambda^{1/2}C(\lambda+A)^{-1} = K\varphi(tA)$ mit $\varphi(z) = z^{1/2}(1+z)^{-1}$ sind genau dann gleichmäßig beschränkt, wenn dies für ihre adjungierten Operatoren $(K\varphi(tA))'$ gilt. Wir schreiben dies mit Hilfe der oben eingeführten M^c Intosh-Yagi Räume formal wie folgend um:

$$\mathcal{R}(K') \subseteq (X')_{0, \infty} = (\mathcal{R}_{A'}, \mathcal{D}_{A'})_{1/2, \infty} \subseteq ((X')'_{-1, A'}, (X')'_{1, A'})_{1/2, \infty}.$$

Nun schreiben wir formal weiter $K' = (A^{-1/2})'C'$, und erhalten

$$\mathcal{R}(C') \subseteq ((X')'_{-3/2, A'}, (X')'_{1/2, A'})_{1/2, \infty}.$$

Durch Reiteration ([67, 1.10.2]) erhalten wir hieraus

$$\mathcal{R}(C') \subseteq ((X')'_{-1, A'}, X')_{1/2, \infty}.$$

Schließlich kommen wir mittels (formalem!) Zurückdualisieren auf die Bedingung $C : (X, X_1)_{1/2, 1} \rightarrow Y$. Diese letzte Bedingung ist eine Modifikation des

Ergebnisses [24, Prop. 3.45]. Wir zeigen nun, daß sie in der Tat die Resolventenbedingung an C zu charakterisieren vermag; ein von der obigen Motivation unabhängiger Beweis sichert dabei die allgemeine Gültigkeit der Aussage:

SATZ 2.5.6 Es sei A ein sektorieller Operator auf dem Banachraum X , Y ein weiterer Banachraum, $C \in B(X_1, Y)$ und $\alpha \in (0, 1)$. Dann sind äquivalent:

- (a) Die Menge $\{\lambda^\alpha C(\lambda + A)^{-1} : \lambda > 0\}$ ist in $B(X, Y)$ beschränkt.
- (b) Es gilt $C \in B((X, \dot{X}_1)_{1-\alpha, 1}, Y)$.

Um zwischen X und \dot{X}_1 interpolieren zu können, stellen wir zunächst fest, daß beide in den Raum $\mathbb{X} := (X, \|A(I+A)^{-2} \cdot\|)^\sim$ stetig einbetten. Wir können also Schnitt und Summe von X und \dot{X}_1 in \mathbb{X} betrachten. Zunächst sieht man, daß $X \cap \dot{X}_1 = X_1$ gilt. Als nächstes betrachten wir den Summenraum $X + \dot{X}_1$. Er ist mit der natürlichen Norm

$$\|x\|_{X+\dot{X}_1} := \inf\{\|y\|_X + \|z\|_{\dot{X}_1} : x = y + z\}$$

versehen. Wir erinnern, daß $\dot{X}_1 = (\mathcal{D}(A), \|A \cdot\|_X)^\sim$ ist, es existiert also ein kanonischer isometrischer Isomorphismus $\tilde{A} : \dot{X}_1 \rightarrow X$. Wir können also $\|z\|_{\dot{X}_1} = \|\tilde{A}z\|_X$ schreiben. Wir wollen die Darstellung

$$X + \dot{X}_1 = Y \quad \text{mit} \quad Y := (X, \|A(1+A)^{-1} \cdot\|)^\sim$$

zeigen. Zunächst gilt wegen der Beschränktheit von $A(1+A)^{-1}$ und $(1+A)^{-1}$ sowohl $X \hookrightarrow Y$ als auch $\dot{X}_1 \hookrightarrow Y$. Hieraus folgt $X + \dot{X}_1 \hookrightarrow Y$. Zur umgekehrten Inklusion sei $x \in X$ gewählt. Mit der Zerlegung $x = w + z$ für $w = A(1+A)^{-1}x$ und $z = (1+A)^{-1}x$ mit $w \in X$ und $z \in \dot{X}_1$ gilt offenbar $\|w\|_X = \|A(1+A)^{-1}x\|_X$ und $\|z\|_{\dot{X}_1} = \|A(1+A)^{-1}x\|_X$. Damit ist dann auch $\|x\|_{X+\dot{X}_1} \leq \|x\|_Y$ und die gewünschte Darstellung bewiesen.

Als nächstes wollen wir (X, \dot{X}_1) als quasilinearisierbares Paar im Sinne von [67, 1.8.4] nachweisen. Dazu setzen wir $V_0(t)x := tA(1+tA)^{-1}x$ und $V_1(t) = (1+tA)^{-1}$. Wegen der Sektorialität von A existiert ein $c > 0$ dergestalt, daß für alle $t > 0$ die Abschätzungen $\|t(t+A)^{-1}\| \leq c$ und $\|A(t+A)^{-1}\| \leq c$ gelten. Dann folgt

$$\begin{aligned} \forall x \in X : \quad & \|V_0(t)x\|_X = \|tA(1+tA)^{-1}x\|_X \leq c\|x\|_X \\ \forall x \in X : \quad & \|V_1(t)x\|_{\dot{X}_1} = \|At^{-1}(t^{-1}+A)^{-1}x\|_X \leq ct^{-1}\|x\|_X \\ \forall x \in \dot{X}_1 : \quad & \|V_0(t)x\|_X = t\|t^{-1}(t^{-1}+A)^{-1}x\|_{\dot{X}_1} \leq ct\|x\|_{\dot{X}_1} \\ \forall x \in \dot{X}_1 : \quad & \|V_1(t)x\|_{\dot{X}_1} = \|t^{-1}(t^{-1}+A)^{-1}x\|_{\dot{X}_1} \leq c\|x\|_{\dot{X}_1}. \end{aligned}$$

Damit ist (X, \dot{X}_1) quasilinearisierbar. Wegen $t^{1-\theta} \|V_1(t)x\|_X = t^{-\theta} \|V_0(t)x\|_X$ ist auf $(X, \dot{X}_1)_{\theta,p}$ eine äquivalente Norm durch

$$\|x\|_{\theta,p} \sim \left\| t \mapsto t^{-\theta} \|V_0(t)x\|_X \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})} = \left\| t^{1-\theta} A(1+tA)^{-1}x \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)}$$

gegeben. Wir werden dies für $p = 1$ verwenden.

Beweis von Satz 2.5.6. Es gelte (b), und M sei die Norm von C in (b). Dann ist für $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|\lambda^\alpha C(\lambda+A)^{-1}x\| &\leq M \|\lambda^\alpha(\lambda+A)^{-1}x\|_{(X, \dot{X}_1)_{1-\alpha,1}} \\ &= M \int_0^\infty t^{\alpha-1} \|tA(1+tA)^{-1}\lambda^\alpha(\lambda+A)^{-1}x\|_X \frac{dt}{t} \\ &= M \int_0^\infty \|t^\alpha A^\alpha(1+tA)^{-1}\lambda^{\alpha-1}A^{1-\alpha}(1+\lambda^{-1}A)^{-1}x\|_X \frac{dt}{t} \\ &= M \int_0^\infty \left\| \varphi_{\frac{1}{\lambda}}(A)\psi_{\frac{1}{t}}(A)x \right\|_X \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

mit $\varphi(z) = z^{1-\alpha}(1+z)^{-1}$ und $\psi(z) = z^\alpha(1+z)^{-1}$. Dieses Integral ist wegen der Abschätzung (2.3.2) (für $\varphi = \mathbb{1}$) in $\lambda > 0$ gleichmäßig beschränkt.

Es gelte (a). Wir setzen $r(z) := z(1+z)^{-2}$ und $c := \int_0^\infty r(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$. Dann ist $c > 0$ und die Funktion $f(z) := c^{-1} \int_0^\infty r(\lambda^{-1}z) \frac{d\lambda}{\lambda}$ offenbar die Einsfunktion, also gilt $f(A) = \text{Id}$. Wir zeigen nun, daß für $x = A(I+A)^{-2}x_0$ gilt:

$$f(A)x = c^{-1} \left(z \mapsto \int_0^\infty r(\lambda^{-1}z) \frac{d\lambda}{\lambda} \right) (A)x = c^{-1} \int_0^\infty r(\lambda^{-1}A)x \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Zunächst existiert das zweite Integral, da der Integrand wegen $r(\lambda^{-1}A)x = \lambda^{-1}A^2(I+\lambda^{-1}A)^{-2}(I+A)^{-2}x_0$ für große λ wie $|\lambda|^{-1}$ und im Nullpunkt wegen $r(\lambda^{-1}A)x = (I+\lambda^{-1}A)^{-2}A^2(I+A)^{-2}x_0$ wie $|\lambda|^2$ abfällt. Damit bleiben die Integrale $\int_{\frac{1}{n}}^n r(\lambda^{-1}A)x \frac{d\lambda}{\lambda}$ für $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkt. Integriert man auf kompakten Trägern, so ist die Gültigkeit des Einsetzens

$$(z \mapsto \int_K r(\lambda^{-1}z) \frac{d\lambda}{\lambda})(A) = \int_K r(\lambda^{-1}A) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

in [17, Satz 4.1.5] gezeigt worden. Nun können wir mittels des Konvergenz-
satzes 1.3.3 dies auch auf unseren Fall erweitern. Für $x \in \mathcal{R}(A(I+A)^{-2})$ folgt

$$\begin{aligned}
 \|Cx\|_Y &\leq c^{-1} \int_0^\infty \|Cr(\lambda^{-1}A)x\|_Y \frac{d\lambda}{\lambda} \\
 &= c^{-1} \int_0^\infty \|\lambda^\alpha C(\lambda+A)^{-1} \lambda^{-\alpha} A(1+\lambda^{-1}A)^{-1}x\|_Y \frac{d\lambda}{\lambda} \\
 &\leq c^{-1} M \int_0^\infty \|\lambda^{-\alpha} A(1+\lambda^{-1}A)^{-1}x\|_X \frac{d\lambda}{\lambda} \\
 &\sim c^{-1} M \|x\|_{1-\alpha,1}.
 \end{aligned}$$

Damit ist die zweite Implikation gezeigt, wenn die Dichtheit des Bildbereichs $\mathcal{R}(A(I+A)^{-2})$ in $(X, \dot{X}_1)_{1-\alpha,1}$ nachgewiesen wird.

Zunächst ist $\mathcal{R}(A(I+A)^{-2}) = \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{D}(A)$. Während die Inklusion „ \subseteq “ klar ist, sieht man die umgekehrte Inklusion ein, wenn man ein $z = Ax = (I+A)^{-1}y$ betrachtet. Es ist $z \in \mathcal{D}(A)$, also $x \in \mathcal{D}(A^2)$, also $x = (I+A)^{-2}\tilde{x}$. Hieraus folgt „ \supseteq “. Da $\mathcal{R}(A(I+A)^{-2})$ in $X \cap \dot{X}_1 = X_1$ dicht liegt, gilt dies auch für $(X, \dot{X}_1)_{1-\alpha,1}$. □

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

3.1 Etwas Banachraumtheorie

Im folgenden verwende ich den Begriff einer Zufallsvariablen, obgleich dieses Wort nicht wesentlich kürzer ist, als seine Definition: meßbare Funktion auf einem Wahrscheinlichkeitsraum. Aber oft kommt es auf diesen zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum nicht an, und die Notation wird etwas kürzer. Es sei $(\chi_k)_{k \leq n}$ eine unabhängige Folge symmetrischer, reellwertiger Zufallsvariablen. Unter einer *Summe von Zufallselementen* wollen wir eine Summe der Form $\sum_{k \leq n} \chi_k x_k$ verstehen, wobei die Elemente x_k aus einem Banachraum X gewählt sind. Als *Bernoullische Zufallsvariablen* möchte ich $\{1, -1\}$ -gleichverteilte Zufallsvariablen bezeichnen. Wenn die χ_k nun Bernoullische Zufallsvariablen sind, sprechen wir auch von einer *Bernoullischen Summe*; sind die χ_k normalverteilt, so sprechen wir von einer *Gaußschen Summe*. Doch zunächst einmal der skalare Fall.

SATZ 3.1.1 (Chinčĭn-Ungleichung)

Es sei $p \in [1, \infty)$ und (r_k) sei eine unabhängige Folge von Bernoullischen Zufallsvariablen. Dann existieren Zahlen $A_p, B_p > 0$ so, daß für beliebige komplexe Zahlen a_1, \dots, a_n die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$A_p \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k \right|^p \right)^{1/p} \leq B_p \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Ein Beweis des Satzes findet sich etwa in [10, Satz 1.10], genauso wie die interessante Bemerkung, daß im Falle von Gaußschen Zufallsvariablen sogar die Wahl $A_p = B_p$ möglich ist, die Chinčĭn-Ungleichung also eine Chinčĭn-Gleichung ist ([10, Abschnitt „Gaussian Variables“ im Kapitel 12]). Wenn wir diese Abschätzungen nicht für Skalaren sondern für Elemente allgemeiner

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

Banachräume betrachten, gilt nicht mehr eine beliebige Äquivalenz; vielmehr kommen wir zu dem folgenden Begriff:

DEFINITION 3.1.2 Wir sagen, ein Banachraum X habe *Typ* p , falls eine Zahl M_p existiert, bezüglich der die Abschätzung

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|^2\right)^{1/2} \leq M_p \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{1/p}$$

für beliebige Folgen x_1, \dots, x_n in X und eine Folge von unabhängigen Bernoullischen Zufallsvariablen (r_k) gilt. Umgekehrt sagen wir, X habe *Kotyp* q , falls wir unter gleicher Voraussetzung die Abschätzung

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^q \right)^{1/q} \leq K_q \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|^2\right)^{1/2}$$

für eine Zahl K_p haben. Der Fall $q = \infty$ sei hierbei zugelassen, dann ist die linke Seite durch $\max_{k \leq n} \|x_k\|$ zu ersetzen. Das Infimum aller Zahlen M_p bzw. K_q , bezüglich derer obige Abschätzungen richtig sind, heißt die *Typkonstante* von X zu p bzw. die *Kotypkonstante* von X zu q .

BEMERKUNG 3.1.3 Aus [10, Remarks 11.5] entnehmen wir zusammenfassend die folgenden Ergebnisse: Der Typ eines Banachraums liegt stets im Intervall $[1, 2]$, der Kotyp stets in $[2, \infty]$. Jeder Banachraum hat Typ 1 und Kotyp unendlich. Diese beiden Grenzfälle nennen wir *trivial*. Hat ein Banachraum Typ p , so hat er auch Typ \tilde{p} für $1 \leq \tilde{p} \leq p$. Umgekehrt hat ein Banachraum mit Kotyp q auch Kotyp \tilde{q} für $q \leq \tilde{q} \leq \infty$. Schließlich haben Banachräume mit nichttrivialem Typ auch nichttrivialen Kotyp (siehe etwa [56, Theorem 4.6.20]).

Anstelle die $l^2(X)$ -Normen mit den L^p -Normen zu vergleichen, wie dies beim Typ- und Kotypbegriff geschieht, können wir auch L^p -Normen untereinander vergleichen. Es gilt hierfür die bekannte

SATZ 3.1.4 (Kahane–Ungleichung)

Es seien $p, q \in (0, \infty)$ gewählt. Dann existiert ein $K_{p,q} > 0$ so, daß für beliebige Elemente $x_1, \dots, x_n \in X$ und unabhängige Bernoullische Zufallsvariablen r_1, \dots, r_n gilt:

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|^q\right)^{1/q} \leq K_{p,q} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|^p\right)^{1/p}. \quad (3.1.1)$$

Ein Beweis findet sich beispielsweise in [10, Satz 11.1]. Die Aussage bleibt übrigens richtig, wenn wir die r_j durch unabhängige Gaußsche Zufallsvariablen g_j ersetzen. Dies wurde in [16] und [41] gezeigt. Die Konstante $K_{p,q}$ kann dabei wie im Falle Bernoullischer Zufallsvariablen gewählt werden.

Der folgende Satz wird in englischsprachiger Literatur auch als *Contraction principle* bezeichnet. Er findet sich ebenfalls in [10] (Satz 12.2).

SATZ 3.1.5 Es sei $1 \leq p < \infty$. Wenn wir zu einer Summe von Zufallselementen $\sum_{k \leq n} \chi_k x_k$ auf einem Banachraum X komplexe Zahlen a_k mit $|a_k| \leq 1$ betrachten, so gilt stets

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k \leq n} a_k \chi_k x_k \right\|^p \right)^{1/p} \leq 2 \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k \leq n} \chi_k x_k \right\|^p \right)^{1/p} \quad (3.1.2)$$

Eine wichtige Folgerung ist das folgende Lemma ([37, Lemma 5.9])

LEMMA 3.1.6 Es sei (I, ν) ein σ -endlicher Maßraum und $N(\cdot)$ sei stark integrierbar. Wenn eine Zahl C existiert, für die für $x \in X$ gilt:

$$\int_I \|N(t)x\| dt \leq C\|x\|,$$

dann ist (mit den Bezeichnungen des obigen Lemmas 3.5.6) die Menge $\{N_h \mid h \in L^\infty(I), \|h\| \leq 1\}$ l -beschränkt mit einer Schranke von höchstens $2C$.

Wenn wir nun nicht eine, sondern zwei unabhängige Folgen von unabhängigen symmetrischen, reellwertigen Zufallsvariablen, $(\chi_i), (\chi'_j)$ betrachten, so sind ihre Produkte $\chi_i(\cdot)\chi'_j(\cdot)$ zwar noch symmetrisch, aber im allgemeinen nicht mehr unabhängig. Als Beispiel hierfür betrachten wir zuerst unabhängige Bernoullische Zufallsvariablen r_1, r_2, r'_1, r'_2 . Dann ist das Ereignis

$$\{ r_1 r'_1 = 1, \quad r_1 r'_2 = 1, \quad r_2 r'_1 = 1, \quad r_2 r'_2 = -1 \}$$

unmöglich, aber es gilt $P(r_i r'_j = \pm 1) = 1/2$. Sind die Zufallsvariablen (χ_i) und (χ'_j) nicht degeneriert, so läßt sich obiger Gedanke auf die Ereignisse $\chi_i \chi'_j$ größer Null bzw. kleiner Null erweitern.

Wenn auf einem Banachraum X dennoch eine Abschätzung der Form (3.1.2) für Produkte unabhängiger Zufallsvariablen existiert, so verdient diese Eigenschaft einen Namen:

DEFINITION 3.1.7 (Pisier [57]) Wir sagen, daß ein Banachraum X die (α) -Eigenschaft hat, wenn eine Zahl C derart existiert, daß für zwei unabhängige Folgen $(r_n), (r'_n)$ von unabhängigen Bernoullischen Zufallsvariablen und eine Folge (x_{ij}) in X und Zahlen $|a_{ij}| \leq 1$ stets gilt:

$$\left(\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{i,j=1}^n r_i r'_j a_{ij} x_{ij} \right\|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{i,j=1}^n r_i r'_j x_{ij} \right\|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.1.3)$$

BEMERKUNG 3.1.8 Ist (x_k) eine unabhängige Folge reellwertiger, symmetrischer Zufallsvariablen, so haben nach [10, Lemma 11.2] die Summen

$$\left\| \sum_{k \leq n} x_k x_k \right\| \quad \text{und} \quad \left\| \sum_{k \leq n} r_k |x_k| x_k \right\|$$

die gleiche Verteilung. Folglich impliziert die (α) -Eigenschaft die Abschätzung (3.1.3) etwa für Gaußsche Zufallsvariablen anstelle der Bernoullischen. Die Gauß- (α) Eigenschaft impliziert ebenfalls endliche Kotyp (siehe [49, Prop. 2.2]), sodaß wegen der Äquivalenz von Gaußschen und Bernoullischen randomisierten Summen (siehe Satz 3.5.3 weiter unten) die Gauß- (α) Eigenschaft und die (Bernoulli-) (α) -Eigenschaft äquivalent sind.

BEMERKUNG 3.1.9 Wenn ein Banachraum X die (α) -Eigenschaft hat, so hat er auch endlichen Kotyp: in [57, Remark 2.2] finden wir, daß Banachräume X mit der (α) -Eigenschaft die Räume $l_\infty^n := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ nicht gleichmäßig enthalten können. Hieraus wiederum folgt nach [10, Theorem 14.1], daß X endlichen Kotyp haben muß.

3.2 Quadratische Abschätzungen auf $X = L^p$

Bei ihren Untersuchungen über den beschränkten H^∞ -Kalkül eines sektoriellen Operators A haben COWLING, DOUST, M^CINTOSH und YAGI [7] erkannt, daß eine zu Satz 2.1.9 analoge Beschreibung auf L^p -Räumen quadratische Abschätzungen der Form

$$\left\| \left(\int_0^\infty |(\psi(tA)f)(\cdot)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{const.} \|f\|_{L^p(\Omega)} \quad (3.2.1)$$

benötigt. Hierbei sei Ω ein σ -endlicher Maßraum. In der Tat stimmt dieser Begriff im Falle eines Hilbertraumes, also im Falle $p = 2$ mit dem der quadratischen L^2 -Abschätzung überein, wie man mit dem Satz von Fubini leicht sieht.

Es sei also A ein dicht definierter, sektorieller Operator mit dichtem Bild. Während im Hilbertraum Satz 2.1.9 gilt, klaffen die Eigenschaften eines H^∞ -Kalküls auf der einen Seite und quadratischer L^2 -Abschätzungen für A und A' auf der anderen im Banachraumfall auseinander. Zwar sind quadratische L^2 -Abschätzungen auf einer gewissen Klasse von Funktionen noch hinreichend, es kann aber durchaus sein, daß trotz eines beschränkten H^∞ -Kalküls die in der Abschätzung vorkommenden Integrale divergieren! Präzise formuliert:

BEISPIEL 3.2.1 Es sei A sektoriell vom Typ $\omega_1 < \pi/2$ und genüge einer quadratischen L^2 -Abschätzung für $z^\alpha e^{-z}$, $\alpha > 0$. Für eine natürliche Zahl m mit $\alpha < m$ und $x \in \mathcal{D}(A^{m-\alpha})$ folgt:

$$\int_0^\infty \|t^\alpha A^m T(t)x\|_X^2 \frac{dt}{t} \leq \text{const.} \|A^{m-\alpha}x\|_X^2 < \infty.$$

Es ist also stets $\mathcal{D}(A^{m-\alpha}) \subseteq (X, \mathcal{D}(A^m))_{1-\alpha/m, 2}$, dem reellen Interpolationsraum zwischen X und dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A^m)$ von A^m . Betrachten wir den Fall $A = -\Delta$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$F_{p,2}^{2m-2\alpha} \stackrel{(1)}{=} H_{p,2}^{2(m-\alpha)} \stackrel{(2)}{=} \mathcal{D}(A^{m-\alpha}) \subseteq (X, \mathcal{D}(A^m))_{1-\alpha/m, 2} \stackrel{(3)}{=} B_{p,2}^{2m-2\alpha}. \quad (3.2.2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) findet man in [67, 2.3.1/6 und 2.3.3/1], Gleichung (3) beispielsweise in [2, (5.9)]. Nun kann die Inklusion (3.2.2) aber nur für $p \leq 2$ erfüllt sein. Mit anderen Worten: quadratische L^2 -Abschätzungen für A und A' können nur im Hilbertraumfall $p = 2$ gelten.

Ein ähnliches Beispiel finden wir in [7]: hier ist ebenfalls $A = -\Delta$ der negative Laplaceoperator in $L^p(\mathbb{R}^n)$ und $p > 2$. Wählt man $\psi(z) := z(1+z)^{-2}$ und $u \in L^p$, so folgt

$$\int_0^\infty \|\psi(tA)u(\cdot)\|_p^2 \frac{dt}{t} = \infty.$$

Betrachten wir dagegen quadratische Abschätzungen von der Bauart (3.2.1), so ergibt sich ein anderes Bild: Für eine Funktion der Klasse H_0^∞ sei die Integraltransformation M durch

$$(Mf)(\lambda) := \mathcal{F}(f \circ \exp)(\lambda) = \int_0^\infty t^{-i\lambda} f(t) \frac{dt}{t}$$

gegeben. Sie kann als Variante der Mellintransformation betrachtet werden (nämlich bezüglich des Maßes dt/t). Nun sei für $0 < \nu < \pi$ die Funktionenklasse $\Psi_\nu(S_\mu)$ durch

$$\Psi_\nu(S_\mu) := \{\psi \in H_0^\infty(S_\mu) : e^{-\nu|\cdot|} |Mf|^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R})\}$$

gegeben. Es gilt dann der Satz [7, Theorem 6.8]

SATZ 3.2.2 Es sei $0 \leq \omega < \nu < \mu < \pi$ und A ein dicht definierter, sektorieller Operator von Typ ω auf $L^p(\Omega)$, der dichtes Bild habe. Dann gelten

- (a) Hat A einen beschränkten $H^\infty(S_\nu)$ -Kalkül, so gilt für alle $\psi \in H_0^\infty(S_\mu)$ die Abschätzung (3.2.1).
- (b) Gilt die Abschätzung (3.2.1) sowohl für A als auch A' bezüglich einer Funktion $\psi \in H_0^\infty(S_\nu) \setminus \{0\}$ für die $\psi^2 \in \Psi_\nu(S_\nu)$ gilt, so hat A einen beschränkten $H_0^\infty(S_\mu)$ -Kalkül.

BEISPIEL 3.2.3 In ihrer Arbeit zeigen die Autoren einige Funktionen auf, die in dieser Klasse liegen. So zum Beispiel die Funktionen $g(z) := z(1+z)^{-2}$ und $f(z) := ze^{-z}$ (jeweils mit $\nu = \pi/2$). Dies gilt übrigens für alle Funktionen $f_\alpha(z) := z^\alpha e^{-z}$ mit $\alpha > 0$:

Es sei $\alpha > 0$ und $f_\alpha(z) := z^\alpha e^{-z}$. Dann ist $Mf(t) = \Gamma(\alpha - ir)$. Wir wollen ein $\nu \in (0, \pi)$ so finden, daß für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt: $|\Gamma(\alpha - ir)|^{-1} e^{-\nu|r|} \leq M$. Da der Konvergenzexponent der Nullstellen von $1/\Gamma(z)$ offenbar eins ist (die Nullstellen sind ja gerade die negativen ganzen Zahlen), ist es klar, daß es irgendein $\nu > 0$ geben muß, welches das Gewünschte leistet. Nun ist die Gammafunktion gut untersucht, und beispielsweise in KNESERS Buch [39] findet sich eine Wachstumsabschätzung, die die Wahl $\nu = \pi/2$ erlaubt, falls $\alpha \in [1/2, 1]$ gilt (siehe [39, 3.09, Formel 41]). Nach der Ergänzungsformel $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \pi(\sin(\pi z))^{-1}$, läßt sich damit auch der Fall $\alpha \in (0, 1/2]$ behandeln.

Es sei angemerkt daß im Falle eines R -sektoriellen Operators A (siehe unten) die Bedingung $\psi^2 \in \Psi_\nu(S_\nu)$ hinfällig ist: in [43, Theorem 1.1] zeigt LE MERDY daß quadratische Abschätzungen vom Typ (3.2.1) nicht von der zugrundeliegenden Funktion $\psi \in H_0^\infty \setminus \{0\}$ abhängen.

Sind Ω_1, Ω_2 zwei positive Maßräume und $1 < p, q < \infty$, so gilt die folgende Inklusion:

$$\text{Ist } q \leq p, \text{ so ist } L^p(\Omega_1, L^q(\Omega_2)) \supseteq L^q(\Omega_2, L^p(\Omega_1)).$$

Als Faustregel gilt: Hat die innere Norm den höheren Exponenten, so ist sie größer als diejenige, bei der außen der höhere Exponent steht. Dies folgt direkt aus der kontinuierlichen Minkowski-Ungleichung, also der Abschätzung (für $r \geq 1$)

$$\left(\int_T \left(\int_S |f(s, t)| \, d\mu(s) \right)^r \, d\nu(t) \right)^{1/r} \leq \int_T \left(\int_S |f(s, t)|^r \, d\mu(s) \right)^{1/r} \, d\nu(t)$$

für $\mu \otimes \nu$ integrierbare Funktionen auf $S \times T$ durch die Wahl $r = p/q$ bzw. $r = q/p$ (siehe etwa [12, VI.11.14]).

3.3 Verallgemeinerung für beliebige Banachräume

Wir wollen zur Norm $\|\cdot\|_{L^p(\Omega, L^2(I))}$ nun eine äquivalente Norm finden, die eine Verallgemeinerung auf allgemeine Banachräume erlaubt. Grundlage hierzu sind die Arbeiten [37] und [38] von KALTON und WEIS. Um den Normbegriff von der L^p -Struktur unabhängig zu machen, werden zwei grundlegende Ideen verwendet:

BEMERKUNG 3.3.1 Sind g_1, \dots, g_n unabhängige standardisierte normalverteilte (kurz: $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte) Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, μ) , so gilt für komplexe Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ stets:

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n g_k \alpha_k \right|^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2.$$

BEMERKUNG 3.3.2 Es seien X und Y zwei unabhängige Zufallselemente auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, μ) , X sei symmetrisch. Dann gilt für alle $p \geq 1$ die Ungleichung $\|Y\|_{L^p(\Omega)} \leq \|X + Y\|_{L^p(\Omega)}$. Zum Beweis schreiben wir Y als $Y = \frac{1}{2}(Y+X) + \frac{1}{2}(Y-X)$, und erhalten wegen der Symmetrie von X und der Unabhängigkeit von X und Y

$$\begin{aligned} \|Y\|_{L^p(\Omega)} &\leq \frac{1}{2} (\|Y+X\|_{L^p(\Omega)} + \|Y-X\|_{L^p(\Omega)}) \\ &= \frac{1}{2} (\|Y+X\|_{L^p(\Omega)} + \|Y+X\|_{L^p(\Omega)}) = \|X + Y\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

Wir betrachten nun allgemeine σ -endlichen Maßräume Ω und I . Es seien f eine Funktion aus $L^p(\Omega)$, (e_n) ein Orthonormalsystem von $L^2(I)$ und die Bilinearform $\langle g, h \rangle = \int_I g(t)h(t) dt$ auf $L^2(I)$ gegeben. Dann ist für $f \in L^p(\Omega, L^2(I))$ für fast alle $\omega \in \Omega$

$$\int_I |f(\omega, t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f(\omega), \bar{e}_n \rangle|^2.$$

Mit Bemerkung 3.3.1 folgt also:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(L^2)} &= \left(\int_{\Omega} \left(\int_I |f(t)(\omega)|^2 dt \right)^{p/2} d\omega \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\Omega} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \sum_{n=1}^N g_n \underbrace{\langle f(\cdot)(\omega), \bar{e}_n \rangle}_{=: u_f(\bar{e}_n)(\omega)} \right|^2 \right)^{p/2} d\omega \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Die Chinčin-Gleichung (siehe hierzu die Bemerkung nach Satz 3.1.1) zeigt nun

$$= C_p \left(\int_{\Omega} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| \sum_{n=1}^N g_n u_f(\bar{e}_n)(\omega) \right|^p d\omega \right)^{1/p}.$$

Mit dem Satz über monotone Konvergenz, den wir wegen Bemerkung 3.3.2 anwenden können, erhalten wir

$$= C_p \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n u_f(\bar{e}_n) \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

Schließlich gibt uns die Ungleichung von Kahane (3.1.1)

$$\sim \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n u_f(\bar{e}_n) \right\|_{L^p(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Der Trick an der obigen Rechnung besteht in der Tatsache, daß in der letzten Äquivalenz die spezielle Struktur von $L^p(\Omega)$ nicht mehr benutzt, und so wie folgt verallgemeinert werden kann ([37, Definition 4.1]):

DEFINITION 3.3.3 Es sei H ein Hilbertraum und X ein Banachraum. Die Abkürzung ONS stehe für Orthonormalsystem. Dann bezeichne $\mathfrak{L}_+(H, X)$ den Vektorraum der linearen Operatoren $u : H \rightarrow X$, für die gilt:

$$\|u\|_{\mathfrak{L}} = \sup \left\{ \left(\mathbb{E} \left\| \sum g_n u(e_n) \right\|_X^2 \right)^{1/2} : (e_n) \text{ ist ein endliches ONS in } H \right\} < \infty.$$

$\mathfrak{l}(H, X)$ bezeichne den Abschluß der Operatoren mit endlichdimensionalem Bild in $\mathfrak{l}_+(H, X)$.

Die Elemente von $\mathfrak{l}_+(H, X)$ sind stetige Operatoren von H nach X , da für beliebiges $e \in H$ mit $\|e\| = 1$ die Betrachtung des Orthonormalsystems $\{e\}$ auf H zeigt:

$$\|u(e)\| = (\mathbb{E}\|g_1 u(e)\|^2)^{1/2} \leq \|u\|_1.$$

Weiterhin ist $(\mathfrak{l}_+(H, X), \|\cdot\|_1)$ und damit auch sein abgeschlossener Teilraum $\mathfrak{l}(H, X)$ ein Banachraum ([18, Satz 5.3.4]). Weiterhin gilt (siehe [37, Remark 4.2]): ist c_0 nicht in X enthalten, so gilt $\mathfrak{l}_+(H, X) = \mathfrak{l}(H, X)$. Die folgenden beiden Ergebnisse entstammen [37, Proposition 4.3 und 4.4]:

SATZ 3.3.4 Sind X_1 und X_2 Banachräume, H_1 und H_2 Hilberträume so gilt für $T \in B(X_1, X_2)$, $u \in \mathfrak{l}(H_1, X_1)$ und $S \in B(H_2, H_1)$: $TuS \in \mathfrak{l}(H_2, X_2)$ und

$$\|TuS\|_1 \leq \|T\| \|S\| \|u\|_1.$$

SATZ UND DEFINITION 3.3.5 Es sei $S \in B(H_1, H_2)$ und X ein Banachraum. Sind $\iota_1 : H_1 \rightarrow H'_1$ und $\iota_2 : H_2 \rightarrow H'_2$ die kanonischen Isomorphismen, so kann man einen stetigen Operator $S^\otimes : \mathfrak{l}(H_1, X) \rightarrow \mathfrak{l}(H_2, X)$ über $S^\otimes(u) := u \circ \iota_1^{-1} \circ S' \circ \iota_2$ erklären. Es gilt $\|S^\otimes\| \leq \|S\|$.

3.4 \mathfrak{l} -Funktionen

Wir wollen nun den wichtigen Spezialfall $H = L^2(I)$ betrachten, wobei (I, Σ, μ) ein σ -endlicher Maßraum ist. Dann nämlich lassen sich gewisse Operatoren aus $\mathfrak{l}(H, X)$ durch Funktionen $f : I \rightarrow X$ darstellen.

SATZ UND DEFINITION 3.4.1 Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}_2(I, X)$ den Vektorraum aller Äquivalenzklassen stark meßbarer Funktionen $f : I \rightarrow X$, die schwach in $L^2(I, X)$ liegen, für die also stets gilt: Ist x' eine stetige Linearform auf X , so ist $x'(f) \in L^2(I)$. Er wird mit der Norm

$$\|f\|_{\mathcal{P}_2} := \sup\{\|x'(f)\|_{L^2} : \|x'\| \leq 1\}$$

versehen.

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

Beweis. Die oben aufgestellte Behauptung, bei $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_2}$ handle es sich um eine Norm verdient eine Begründung: während Positivität und die Dreiecksungleichung klar sind, gilt es die Endlichkeit von $\|f\|_{\mathcal{P}_2}$ für alle $f \in \mathcal{P}_2(I, X)$ und die Definitheit nachzuweisen.

Wir betrachten für festes f die Abbildung $\Phi_f : X' \rightarrow L^2$, $x' \mapsto x'(f)$. Nach dem Graphensatz reicht es nachzuweisen, daß Φ_f abgeschlossen ist. Da Φ_f überall definiert ist, genügt es, seine Abschließbarkeit zu zeigen. Dazu sei (x'_n) eine Folge in X' mit $x'_n \rightarrow 0$ und $x'_n(f) \rightarrow g \in L^2$. Wir wollen zeigen, daß $g = 0$ fast überall gilt. Wir können ohne Einschränkung I als endlich annehmen, da im allgemeinen Fall für eine Folge I_n endlicher meßbarer Mengen mit $I = \bigcup I_n$ es hinreicht, $g|_{I_n} = 0$ fast überall zu zeigen, um $g = 0$ fast überall auf I zu erhalten. Es sei h_k eine Folge von Treppenfunktionen, die fast überall punktweise gegen f konvergiere. Zu $m \in \mathbb{N}$ wählen wir nach dem Satz von Egorow eine meßbare Menge J_m mit $\mu(I - J_m) < 1/m$ derart, daß $\|h_k - f\|_{L^\infty(J_m)} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt. Da J_m endlich ist, folgt $\|h_k - f\|_{L^2(J_m)} \rightarrow 0$. Wir schreiben

$$\|x'_n(f)\|_{L^2(J_m)} \leq \|x'_n(h_k) - x'_n(f)\|_{L^2(J_m)} + \|x'_n(h_k)\|_{L^2(J_m)}.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert nun ein $k \in \mathbb{N}$, für das der erste Summand kleiner als $\varepsilon/2$ wird. Für dieses k existiert dann ein N_0 derart, daß für alle $n \geq N_0$ der zweite Summand ebenfalls kleiner als $\varepsilon/2$ wird. Insgesamt sehen wir hieraus: $\|x'_n(f)\|_{L^2(J_m)} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dies zeigt zunächst $g|_{J_m} = 0$ fast überall für jedes m , also folgt $g = 0$ durch Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ fast überall. Dies war für die Endlichkeit von $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_2}$ zu zeigen.

Wir zeigen nun: Ist X ein separable Raum, so existiert eine abzählbare Menge $\{x'_k : k \in \mathbb{N}\}$ mit der Eigenschaft: $ix'_k(x) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt $x = 0$. Beweis: Es gelte $x'_k(x) = 0$ für ein $x \in X$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Zu einer abzählbaren dichten Teilmenge $E := \{x_1, x_2, \dots\}$ von X können wir nach dem Satz von Hahn-Banach eine Folge $(x'_k) \subseteq X'$ derart bilden, daß $x'_k(x_k) = \|x_k\|$ und $\|x'_k\| = 1$ gelten. Ist (x_{k_n}) eine Teilfolge aus E , die gegen x konvergiert, so konvergieren auch die Normen von x_{k_n} gegen die Norm von x , es folgt

$$\sup\{x'_k(x_{k_n}) - x'_k(x) : k \in \mathbb{N}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Da für alle $k \in \mathbb{N}$ $x'_k(x) = 0$ gilt, gibt es also für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index N derart, daß für $n \geq N$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt: $|x'_k(x_{k_n})| < \varepsilon$. Da aber $x'_{k_n}(x_{k_n}) = \|x_{k_n}\| \rightarrow \|x\|$, folgt hieraus $\|x\| = 0$. Also ist die Menge $\{x'_1, x'_2, \dots\}$ normierend für X .

Ist nun $f \in \mathcal{P}_2$ mit $\|f\|_{\mathcal{P}_2} = 0$ gegeben, so ist also $x'(f) = 0$ für alle $x' \in X'$. Da f wesentlich separabelwertig ist, können wir ohne Einschränkung zu einem festen Vertreter übergehen und X als separabel annehmen. Dann existiert eine Menge $\{x'_k : k \in \mathbb{N}\}$ in X' mit der oben genannten Eigenschaft. Wegen $x'_k(f) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist jede der Mengen $M_k := \{t \in I : [x'_k(f)](t) \neq 0\}$, $k \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge; folglich gilt dies auch für ihre Vereinigung. Dies bedeutet aber $f = 0$ fast überall. \square

Mit dem Raum $\mathcal{P}_2(I, X)$ lassen sich erzeugende Funktionen von gewissen Operatoren aus $l(L^2, X)$ wie folgt gewinnen (siehe [37, Remark 4.7][18, Satz 5.5.4]):

SATZ 3.4.2 Ist $f \in \mathcal{P}_2(I, X)$, so wird durch

$$\langle u_f(h), x' \rangle_{X, X'} := \int_I \langle f(t), x' \rangle_{X, X'} h(t) dt$$

für $x' \in X'$ und $h \in L^2(I)$ ein stetiger Operator $u_f : L^2(I) \rightarrow X$ definiert.

Der obige Satz besagt insbesondere, daß die Abbildung $f \mapsto u_f$ isometrisch von $\mathcal{P}_2(I, X)$ nach $B(L^2(I), X)$ abbildet: zunächst ist nämlich für $h \in L^2(I)$

$$\sup_{\|x'\|_{X'} \leq 1} |\langle u_f(h), x' \rangle| = \sup_{\|x'\|_{X'} \leq 1} \left| \int_I \langle f(t), x' \rangle h(t) dt \right| \leq \|h\|_{L^2} \|f\|_{\mathcal{P}_2},$$

andererseits zeigt die Wahl $h(t) := \overline{\langle f, x' \rangle}$ für ein $x' \neq 0$, daß $\|u_f(h)\| \geq \|h\|_{L^2}^2$ und damit durch Supremumbildung über alle x' mit Norm höchstens eins auch $\|u_f\| \geq \|f\|_{\mathcal{P}_2}$. Da wir $\mathcal{P}_2(I, X)$ also als Teilraum von $B(L^2(I), X)$ auffassen können, ist $\mathcal{P}_2(I, X)$ genau dann vollständig, wenn er, als Teilraum aufgefaßt, abgeschlossen ist. Zur Vollständigkeit von $\mathcal{P}_2(I, X)$ zwei Beispiele:

BEISPIEL 3.4.3 Es sei $I = [0, 1]$ und (e_n) das Haar-System $L^2([0, 1])$. Wir wählen $X = c_0$ und setzen $x_n := (\delta_{kn})_k \in X$. Die Abbildung $u : L^2(I) \rightarrow X$, die durch $u(e_n) = x_n$ gegeben ist, ist stetig und linear. Gäbe es eine Funktion $f = (f_k)$ von I nach X , für die $u_f = u$ gälte, so hätten wir $u_f(e_n) = (x_n)$, also $\int_0^1 f_k(t) e_n(t) dt = \delta_{kn}$, und damit $f_k = e_k$ für alle k . Aber $f : I \rightarrow l_\infty$, $t \mapsto (e_k(t))_k$ ist gar keine Abbildung nach $X = c_0$, denn für fast alle $t \in I$ sind unendliche viele Koordinaten von $f(t)$ betragsmäßig größer als eins. Nun können wir u aber leicht durch Operatoren u_{f_n} approximieren, etwa indem wir $f_n(t) := (e_1(t), \dots, e_n(t), 0, \dots)$ setzen, was zu $u_{f_n}(e_k) := x_k$ für $k \leq n$ und $u_{f_n}(e_k) = 0$ für $k > n$ führt.

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

BEISPIEL 3.4.4 Ist $I = \mathbb{N}$ mit Zählmaß, so ist

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{N}, X) = \{(x_n) \subseteq X : \forall x' \in X' : x'(x_n) \in \mathfrak{l}_2\}, = \text{schwach-}\mathfrak{l}_2(X)$$

sodaß $\mathcal{P}_2(\mathbb{N}, X)$ nach [10, Kap. 2] ein Banachraum ist.

Wir sehen also, daß $\mathcal{P}_2(I, X)$ vollständig sein kann, dies im allgemeinen jedoch nicht ist. Nun verknüpfen wir den obigen Satz mit den \mathfrak{l} -Räumen (siehe [37, Definition 4.5]):

DEFINITION 3.4.5 Mit der Norm $\|f\|_{\mathfrak{l}} := \|u_f\|_{\mathfrak{l}}$ können wir den Vektorraum $\mathfrak{l}_+(I, X)$ bzw. $\mathfrak{l}(I, X)$ all derjenigen $f \in \mathcal{P}_2(I, X)$ bilden, für die $u_f \in \mathfrak{l}_+(\mathfrak{L}^2(I), X)$ bzw. für die $u_f \in \mathfrak{l}(\mathfrak{L}^2(I), X)$ gilt. Wir nennen solche Funktionen f auch \mathfrak{l} -Funktionen und sagen, daß der Operator u_f von f repräsentiert wird.

LEMMA 3.4.6 Ist $f \in \mathfrak{L}^2(I)$ und $x \in X$, so definiert $f \otimes x$ ein Element aus $\mathfrak{l}(I, X)$ und es ist $\|f \otimes x\| = \|f\|_{\mathfrak{L}^2} \|x\|$.

Beweis. Es sei (e_n) ein festes Orthonormalsystem in $\mathfrak{L}^2(I)$. Nach Definition der Norm von $u_{f \otimes x}$ ist

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n g_k(f \otimes x)(e_k) \right\|_X^2 \right)^{1/2} &= \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n g_k(e_k|f)x \right\|_X^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n g_k(e_k|f) \right|^2 \right)^{1/2} \|x\|_X \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |(e_k|f)|^2 \right)^{1/2} \|x\|_X \leq \|f\|_{\mathfrak{L}^2} \|x\|_X. \end{aligned}$$

Durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhalten wir schließlich $\|f \otimes x\|_{\mathfrak{l}} = \|f\|_{\mathfrak{L}^2} \|x\|_X$. \square

BEMERKUNG 3.4.7 Die von Funktionen des Typs $f \otimes x$ repräsentierten Operatoren aus $\mathfrak{l}(\mathfrak{L}^2(I), X)$ liegen nach [18, Satz 5.5.7] dicht in $\mathfrak{l}(\mathfrak{L}^2(I), X)$. Damit liegt offenbar die Menge der Operatoren u_f für $f \in \mathfrak{l}(I, X)$ ebenfalls dicht in $\mathfrak{l}(\mathfrak{L}^2(I), X)$. Ist $I = \mathbb{R}^n$, so bleibt dies für Funktionen f aus der Schwartzklasse $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ richtig. Es stellt sich die Frage, ob jeder Operator in $\mathfrak{l}(\mathfrak{L}^2(I), X)$ von einer \mathfrak{l} -Funktion repräsentiert wird. Das folgende Beispiel für $I = [0, 1]$ zeigt, daß die Voraussetzung an X , Kotyp 2 zu haben, notwendig ist:

BEISPIEL 3.4.8 Es sei $I = \Omega = [0, 1]$ und $g(x, t) := |x - t|^{-\alpha}$ auf $\Omega \times I$. Dann ist für $\alpha < 1/2$

$$\begin{aligned} \|t \mapsto g(x, t)\|_{L^2(I)} &= \left(\int_0^1 |t - x|^{-2\alpha} dt \right)^{1/2} \\ &\stackrel{\eta=t-x}{=} \left(\int_{-x}^{1-x} |\eta|^{-2\alpha} d\eta \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{-1}^1 |\eta|^{-2\alpha} d\eta \right)^{1/2} =: c_\alpha < \infty. \end{aligned}$$

Betrachten wir dagegen die L^p -Norm von $x \mapsto g(x, t)$, so ist diese Unendlich falls $p\alpha > 1$ gilt, oder anders gesagt, falls $\alpha > 1/p$ gilt. Sind $p > 2$ und $\alpha \in (1/p, 1/2)$ gewählt, so ist $g \in L^p(\Omega, L^2(I)) = l(L^2(I), L^p(\Omega))$ aber $g \notin l(I, L^p(\Omega))$ da $g(\cdot, t)$ nicht einmal Werte in $L^p(\Omega)$ annimmt.

In der Tat charakterisiert die Repräsentationseigenschaft für $I = [0, 1]$ Banachräume X vom Kotyp 2 [44, Remark 7.4.6]

Wir betrachten im Gegensatz zu $\Omega = [0, 1]$ den Fall $\Omega = \mathbb{N}$. Funktionen von \mathbb{N} nach X sind genau die Folgen in X . Wir können aufgrund der Separabilität von $l_2 := l_2(\mathbb{N})$ ein festes Orthonormalsystem verwenden, etwa das Standardsystem der $e_n = (\delta_{nk})_k$. Eine Folge (x_n) liegt nun genau dann in $l(\mathbb{N}, X)$, wenn gilt

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n x_n \right\|^2 < \infty.$$

Betrachten wir dahingegen Operatoren $u \in l(l_2, X)$, so werden diese natürlich durch ihre Bilder auf der Standardbasis eindeutig festgelegt. Schreiben wir $u(e_n) := x_n$, so ist definitionsgemäß $\|u\|_{l(l_2, X)} = \|(x_n)\|_{l(\mathbb{N}, X)}$; es wird also jeder l-Operator $u \in l(l_2, X)$ durch die l-Funktion $(u(e_n))_n \in l(\mathbb{N}, X)$ repräsentiert.

Um nun konkret Funktionen als Elemente von $l(I, X)$ zu erkennen, ist das folgende Ergebnis ist von KALTON und WEIS [37, Example 4.6] von Nutzen:

LEMMA 3.4.9 Es sei $f : [0, b] \rightarrow X$ absolutstetig. Dann ist $f \in l([0, b], X)$ und es gilt

$$\|f\|_{l([0, b], X)} \leq \int_0^b s^{1/2} \|f'(s)\|_X ds + b^{1/2} \|f(b)\|_X.$$

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

Beweis. Es ist $f(t) = f(b) - \int_t^b f'(s) ds$ fast überall. Wir wollen dies nun etwas anders schreiben:

$$\begin{aligned} f(\cdot) &= \mathbb{1}_{[0,b]}(\cdot) \otimes f(b) - \int_0^b \mathbb{1}_{[\cdot,b]}(s) f'(s) ds \\ &= \mathbb{1}_{[0,b]}(\cdot) \otimes f(b) - \int_0^b \mathbb{1}_{[0,s]}(\cdot) \otimes f'(s) ds. \end{aligned}$$

Damit ist nach Lemma 3.4.6

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathfrak{L}} &\leq \| \mathbb{1}_{[0,b]} \|_{L^2} \|f(b)\| + \int_0^b \| \mathbb{1}_{[0,s]} \|_{L^2} \|f'(s)\| ds \\ &= b^{1/2} \|f(b)\|_X + \int_0^b s^{1/2} \|f'(s)\|_X ds, \end{aligned}$$

was nachzuweisen war. □

Es gelten die folgenden Konvergenzaussagen (siehe [37, Lemma 4.10])

LEMMA 3.4.10

- (a) Sind die Operatoren T_n , $n \in \mathbb{N}$ in $B(H, X)$ gleichmäßig beschränkt und gilt $\lim T_n h = Th$ für alle $h \in H$, so ist $\|T\|_{\mathfrak{L}(H, X)} \leq \liminf \|T_n\|_{\mathfrak{L}(H, X)}$.
- (b) Es seien $(f_n), f \in \mathcal{P}_2(I, X)$ und es gelte $f_n \rightarrow f$ μ -fast überall. Dann ist $\|f\|_{\mathfrak{L}(I, X)} \leq \liminf \|f_n\|_{\mathfrak{L}(I, X)}$.

Ist f eine Funktion des Typs $f = h \otimes x$ und $T \in B(L^2(I_1), L^2(I_2))$, so gilt $T^\otimes u_h = u_{Th \otimes x}$ ([18, Bemerkung 5.5.11]). Damit wird in derselben Arbeit gezeigt (Satz 5.5.13):

SATZ 3.4.11 Es sei X ein Banachraum. Für jeden isometrischen Isomorphismus $T : L^2(I_1) \rightarrow L^2(I_2)$ ist die Fortsetzung $T^\otimes : \mathfrak{L}(L^2(I_1), X) \rightarrow \mathfrak{L}(L^2(I_2), X)$ ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus für den gilt: Ist $f = h \otimes x$, so wird $T^\otimes u_f$ durch die Funktion $Tf \otimes x$ repräsentiert.

BEMERKUNG 3.4.12 Nun zusammenfassend einige Folgerungen:

- (a) Sind zwei Intervalle $I \subseteq J$ gegeben, so haben der Fortsetzungsoperator von $L^2(I)$ nach $L^2(J)$ sowie der Einschränkungoperator von Funktionen aus $L^2(J)$ auf das Teilintervall I jeweils Norm eins. Damit sind auch die Einschränkungen $l(J, X) \rightarrow l(I, X)$ und Fortsetzungen $l(I, X) \rightarrow l(J, X)$ beschränkt mit einer Norm von (höchstens) eins.
- (b) Sind Funktionen $f \in L^2(I)$ und $h \in L^\infty(I)$ gegeben, so ist $S_h : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$, $S_h(f) = hf$ offenbar stetig mit Norm $\|h\|_\infty$. Es ist $u_f \circ S'_h = u_{S_h f}$, sodaß $\|hf\|_l \leq \|h\|_\infty \|f\|_l$ folgt. Ist umgekehrt $h \neq 0$ fast überall so gilt eine entsprechende Abschätzung nach unten: $\|hf\|_l \geq \|h^{-1}\|_\infty^{-1} \|f\|_l$.
- (c) Ist $f \in l(\mathbb{R}_+, X)$, so existiert die Laplacetransformierte von f

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt$$

auf der offenen rechten Halbebene \mathbb{C}_0 . In der Tat gilt für $e_{-\lambda} := \exp(-\lambda \cdot)$ nach Definition die Beziehung $\widehat{f}(\lambda) = u_f(e_{-\lambda})$ und daher $\|\widehat{f}(\lambda)\|_X \leq \|e_{-\lambda}\|_{L^2} \|f\|_l = (2\operatorname{Re}(\lambda))^{-1/2} \|f\|_l$.

- (d) Es sei f aus $l(\mathbb{R}^n, X) \cap L^1(\mathbb{R}^n, X)$. Dann gilt für die fortgesetzte Fouriertransformation: $\mathcal{F}^\otimes f \in l(\mathbb{R}^n, X)$ und $\|\mathcal{F}^\otimes f\|_{l(\mathbb{R}^n, X)} = \|f\|_{l(\mathbb{R}^n, X)}$ ([37, Examples 4.9]).
- (e) Es sei k eine meßbare Funktion auf $I_1 \times I_2$, für die $k(t_2, \cdot)f(\cdot)$ für $f \in L^2(I_1)$ für fast alle $t_2 \in I_2$ auf I_1 integrierbar ist. Definiert

$$(Kf)(t_2) := \int_{I_1} k(t_2, t_1) f(t_1) d\mu_1(t_1), \quad t_2 \in I_2$$

einen beschränkten Operator $K : L^2(I_1) \rightarrow L^2(I_2)$, so genügt seine Fortsetzung $K^\otimes : l(I_1, X) \rightarrow l(I_2, X)$ für alle $f \in l(I_2, X) \cap L^2(I, X)$ der Abschätzung $\|K^\otimes f\|_{l(I_2, X)} \leq \|K\| \|f\|_{l(I_1, X)}$ ([37, Examples 4.9]).

Wenden wir Bemerkung 3.4.12 (e) für ein $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ auf $k(t_2, t_1) := g(t_2 - t_1)$ an, so erhalten wir

KOROLLAR 3.4.13 Ist $f \in l(\mathbb{R}_+, X)$ und $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$, so ist

$$\|g * f\|_{l(\mathbb{R}_+, X)} \leq \|g\|_{L^1} \|f\|_{l(\mathbb{R}_+, X)}.$$

Die Betrachtung beschränkter Operatoren auf $l(H, X)$ wird in Satz 3.5.7 den folgenden Begriff motivieren:

3.5 ι -Beschränktheit

DEFINITION 3.5.1 Es seien X, Y Banachräume und $\mathcal{T} \subseteq B(X, Y)$.

- (a) Die Menge \mathcal{T} heie *R-beschränkt*, wenn eine Zahl C derart existiert, daß für alle $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}$ und $x_1, \dots, x_m \in X$ gilt:

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^m r_n T_n x_n \right\|_Y^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^m r_n x_n \right\|_X^2 \right)^{1/2}, \quad (3.5.1)$$

dabei sei (r_n) eine Folge unabhängiger Bernoullischer Zufallsvariablen.

- (b) Die Menge \mathcal{T} heie *ι -beschränkt*, falls eine Zahl C existiert, für die obige Ungleichung gilt, wenn man die Folge (r_n) durch eine Folge (g_n) unabhängiger Gaußscher Zufallsvariablen ersetzt.

Das Infimum der Zahlen C , für die obige Abschätzung gilt, heie die *R-Schranke* (bzw. *ι -Schranke*) der Menge \mathcal{T} .

BEMERKUNG 3.5.2 Eine *R-beschränkte* Menge von Operatoren ist stets *ι -beschränkt* (siehe auch [50, 2.2]). Dies folgt direkt aus der Tatsache, daß für beliebige Vorzeichen ε_n die randomisierten Summen $\left\| \sum g_n x_n \right\|$ und $\left\| \sum \varepsilon_n g_n x_n \right\|$ dieselbe Verteilung haben ([10, Lemma 11.2]): punktweise auf unabhängige Bernoullische Zufallsvariablen angewandt, ergibt sich mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n T_n x_n \right\|^2 &= \mathbb{E}' \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n g_n T_n x_n \right\|^2 = \mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{n=1}^N r_n g_n T_n x_n \right\|^2 \\ &\leq M^2 \mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{n=1}^N r_n g_n x_n \right\|^2 = M^2 \mathbb{E}' \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N r_n g_n x_n \right\|^2 \\ &= M^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n x_n \right\|^2 \end{aligned}$$

Dabei bezeichne M die *R-Schranke* der $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$. Um die umgekehrte Richtung zu erhalten benötigen wir die folgenden für uns wichtigen Zusammenhänge von Bernoullischen und Gaußschen Summen [10, Proposition 12.11 und Theorem 12.27]:

SATZ 3.5.3 Es sei X ein Banachraum. Dann existiert eine Zahl $c > 0$ so, daß für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in X$ gilt:

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|^2 \leq c^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n g_k x_k \right\|^2.$$

Hat X endlichen Kotyp, so gilt für ein $m > 0$ auch die umgekehrte Abschätzung

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n g_k x_k \right\|^2 \leq m^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|^2,$$

insbesondere fallen bei endlichem Kotyp die Begriffe von R-Beschränktheit und l-Beschränktheit zusammen.

BEMERKUNG 3.5.4 Es seien X, Y Banachräume und $\mathcal{T} \subseteq B(X, Y)$ sei beschränkt. Hat X Kotyp 2 und Y Typ 2, so ist \mathcal{T} sogar l-beschränkt. Zum Beweis seien $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{T}$ und $x_1, \dots, x_n \in X$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n r_k T_k x_k \right\|_Y^2 \right)^{1/2} &\stackrel{\text{Typ 2}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^n \|T_k x_k\|_Y^2 \right)^{1/2} \\ &\leq M \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_X^2 \right)^{1/2} \stackrel{\text{Kotyp 2}}{\leq} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_X^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

sodaß \mathcal{T} zunächst R-beschränkt ist. Nun hat X und Y endlichen Kotyp (für X ist dies vorausgesetzt, bei Y folgt es aus der Voraussetzung des nichttrivialen Typs). Nach der obigen Bemerkung ist \mathcal{T} damit schließlich l-beschränkt.

SATZ 3.5.5 ([4, Lemma 3.3]) Es seien X und Y Banachräume und eine Menge $\mathcal{T} \subset B(X, Y)$ gegeben. Wenn \mathcal{T} in $B(X, Y)$ mit Schranke M l-beschränkt bzw. R-beschränkt ist, so ist auch der Abschluß ihrer absolutkonvexen Hülle bezüglich der starken Operatortopologie l-beschränkt bzw. R-beschränkt mit einer Schranke von höchstens $2M$.

Beweis. Nach dem Lemma von Fatou genügt es, die Aussage für die absolutkonvexe Hülle von \mathcal{T} zu zeigen. Daher genügt es, die Aussage für die reelle absolutkonvexe Hülle mit Schranke M nachzuweisen. Da $\mathcal{T} \cup (-\mathcal{T})$ und \mathcal{T} dieselbe l-Schranke (R-Schranke) haben, ist es sogar ausreichend, die Aussage für die reelle konvexe Hülle von \mathcal{T} zu zeigen. Dazu benutzen wir die Identität

$$\text{conv}(\mathcal{T}) \times \cdots \times \text{conv}(\mathcal{T}) = \text{conv}(\mathcal{T} \times \cdots \times \mathcal{T}). \tag{3.5.2}$$

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

Wenn nun $\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n$ in $\text{conv}(\mathcal{T})$ gegeben sind, existieren demnach eine Menge $\{(T_1^j, \dots, T_n^j) : j = 1, \dots, m\}$ und nicht-negative Zahlen λ_j , für die $\sum_j \lambda_j = 1$ und $\tilde{T}_k = \sum_j \lambda_j T_k^j$ für alle $k = 1, \dots, n$ gelten. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n g_k \tilde{T}_k x_k \right\|_Y^2 &= \mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n g_k \sum_{j=1}^m \lambda_j T_k^j \right\|_Y^2 \leq \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \left\| \sum_{k=1}^n g_k T_k^j x_k \right\|_Y \right)^2 \\ &\leq M^2 \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \left\| \sum_{k=1}^n g_k x_k \right\|_X \right)^2 = M^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n g_k x_k \right\|_X^2. \end{aligned}$$

Wir zeigen noch die verwendete Gleichung (3.5.2). Sie gilt in beliebigen Vektorräumen. Wir zeigen $\text{conv}(A) \times \text{conv}(B) \subseteq \text{conv}(A \times B)$, da die andere Inklusion klar ist. Es sei ein Element $(x, y) \in \text{conv}(A) \times \text{conv}(B)$ gewählt, das sich aus $a_i \in A, b_j \in B$ als Konvexkombination darstellen lasse. Wegen

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \sum_{j=1}^m \mu_j b_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j a_i, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j b_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j (a_i, b_j) \end{aligned}$$

ist (x, y) dann auch ein Element von $\text{conv}(A \times B)$, was zu zeigen war. \square

Das folgende Lemma (das aus [37, Lemma 5.8] entnommen ist) ist eine nützliche Folgerung aus dem obigen Satz:

LEMMA 3.5.6 Es sei (I, ν) ein σ -endlicher Maßraum und $N(\cdot)$ eine stark meßbare Abbildung von I nach $B(X, Y)$. Wir nehmen an, $\{N(\omega) : \omega \in I\}$ sei l -beschränkt mit Schranke C . Für Funktionen $h \in L^1(I)$ und $x \in X$ setze

$$N_h(x) := \int_I h(t) N(t) x dt$$

Dann ist die Menge $\{N_h : \|h\|_{L^1(I)} \leq 1\}$ l -beschränkt in $B(X, Y)$ mit einer Schranke von höchstens $2C$.

Die Beziehung zwischen l -Räumen und l -Beschränktheit zeigt der folgende Satz [37, Proposition 4.11]:

SATZ 3.5.7 Es sei I ein lokalkompakter metrischer Raum ohne isolierte Punkte und ν ein positives Borelmaß auf I , für nichtleere offene Mengen U gelte also $\mu(U) > 0$. Ist die Abbildung $t \mapsto N(t) \in B(X, Y)$ stark stetig, so ist die Menge $\mathcal{T} = \{N(t) : t \in I\}$ genau dann mit Schranke C l -beschränkt, wenn für alle $f \in l(I, X)$ gilt:

$$\|N(\cdot)f(\cdot)\|_{l(I, Y)} \leq C\|f\|_{l(I, X)}.$$

3.6 Eine Darstellung des Dualraums

Dualitätsargumente sind bei Beweisführungen oft enorm hilfreich. Wir haben dies in Kapitel 2 bereits gesehen und wollen auch bei l -Räumen nicht auf dieses wichtige Hilfsmittel verzichten. In der Arbeit [37, Abschnitt 5] findet sich eine Darstellung des Dualraums mit Hilfe der Spurdualität. Dazu benötigen wir den folgenden Begriff:

DEFINITION 3.6.1 Es sei H ein Hilbertraum. Ein Operator $T \in B(H)$ heißt *nuklear*, falls er eine Darstellung der Form

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} (\cdot, h_n)y_n \quad \text{mit} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| \cdot \|y_n\| < \infty$$

mit $(y_n), (h_n) \subseteq H$ hat. Die *Spur* von T ist gegeben als

$$\text{tr}(T) := \sum_{n=1}^{\infty} (y_n, h_n).$$

BEMERKUNG 3.6.2 Die Spur hängt nicht von der Wahl der darstellenden Folgen $(y_n), (h_n)$ ab, ist also wohldefiniert. Die geforderte absolute Konvergenz der Reihe stellt sicher, daß ein nuklearer Operator stets stetig ist. Weitere Eigenschaften von nuklearen Operatoren finden sich etwa in [73, Kapitel VI.5].

DEFINITION 3.6.3 Es sei H ein Hilbertraum und X ein Banachraum. Es bezeichne $l'_+(H, X')$ den Vektorraum aller Operatoren $\nu \in B(H, X')$, für die gilt $\|\nu\|_{l'} < \infty$, dabei bezeichne

$$\|\nu\|_{l'} := \sup\{|\text{tr}(\nu'u)| : u \in l(H, X), \dim u(H) < \infty \text{ und } \|u\|_l \leq 1\}.$$

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

Der Vektorraum $l(H, X') \subseteq l'_+(H, X')$ sei durch den Abschluß der endlichdimensionalen Operatoren in $l'_+(H, X')$ gegeben. Mit v' wird hier der Operator $v' : X'' \rightarrow H$ bezeichnet, der durch die Dualität

$$\langle v'x'', h \rangle_{H,H} = \langle x'', vh \rangle_{X'',X'}$$

gegeben ist. Um $v'u$ bilden zu können, betten wir X auf kanonische Weise in X'' ein.

BEMERKUNG 3.6.4 Bei den Räumen $l'_+(H, X)$ und $l'(H, X')$ handelt es sich um Banachräume [18, Satz 5.4.6], es bestehen die Inklusionen $l_+(H, X') \subseteq l'_+(H, X')$ und $l(H, X') \subseteq l'(H, X')$ sowie die Abschätzung $\|v\|_{l'} \leq \|v\|_{l_+}$ für $v \in l_+(H, X')$ [18, Lemma 5.4.7]. Bezüglich der Spur-Dualität ist $l'_+(H, X')$ der Dualraum von $l(H, X)$ [37, Proposition 5.1].

LEMMA 3.6.5 Ist $h \in H := L^2(I)$ und $x' \in X'$, so ist $h \otimes x' \in l(I, X)'$ und es ist $\|h \otimes x'\| = \|h\|_{L^2} \|x'\|$.

Beweis. Zunächst gilt nach Bemerkung 3.6.4 und Lemma 3.4.6 die Abschätzung $\|h \otimes x'\|_{l(H, X)'} \leq \|h \otimes x'\|_{l(H, X')} \leq \|h\|_{L^2} \|x'\|$. Wir schreiben $v := h \otimes x'$ und $u := f \otimes x \in l(H, X)$ für $f \in L^2(I)$ und $x \in X$. Für $g \in L^2(I)$ gilt $(v'u)(g) = v'((f, g)x) = (f, g)\langle x, x' \rangle h$. Es sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(I)$. Dann ist

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, e_n) e_n \quad \text{und daher} \quad v'u = \sum_{n=1}^{\infty} (\cdot, f\langle x, x' \rangle (h, e_n)) e_n.$$

Hieraus folgt definitionsgemäß

$$\text{tr}(v'u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (h, e_n) (f, e_n) \langle x, x' \rangle = (h, f) \langle x, x' \rangle.$$

Es ist klar, daß für geeignete Wahl von f und x nun $\text{tr}(v'u) = \|h\|_{L^2} \|x'\|$ gilt, sodaß wie behauptet $\|h \otimes x'\|_{l'} = \|h\|_{L^2} \|x'\|$ folgt. \square

Das folgende Lemma entstammt [37, Corollary 5.5]. Wir erkennen in der ersten Aussage etwas allgemeiner die im obigen Beweis ausgeführte Idee zur konkreten Berechnung der Spurnorm:

LEMMA 3.6.6 Es sei $f \in l(I, X)$ und $g \in l'_+(I, X')$. Dann gelten

$$\text{tr}(u'_g \circ u_f) = \int_I \langle f(t), g(t) \rangle dt$$

und

$$\int_I |\langle f(t), g(t) \rangle| dt \leq \|f\|_{l(I, X)} \cdot \|g\|_{l'(I, X')} \leq \|f\|_{l(I, X)} \cdot \|g\|_{l(I, X')}.$$

BEMERKUNG 3.6.7 Während Mengen M in $B(X, Y)$ genau dann beschränkt sind, wenn dies für die Menge M' der adjungierten Operatoren gilt, ist ein Analogon für l -Beschränktheit nur auf Banachräumen X, Y nichttrivialen Typs (bzw. äquivalent auf B - bzw. K -konvexen Banachräumen) richtig: durch Rückgriff auf die Definition sehen wir, daß die l -Beschränktheit einer Menge $M = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ in $B(X, Y)$ nichts anderes heißt, als die gleichmäßige Beschränktheit beliebiger Diagonaloperatoren $(A_{\lambda_1}, \dots, A_{\lambda_n})$ von $l(l_2^n, X)$ nach $l(l_2^n, Y)$ für $n \in \mathbb{N}$. Es sei also die Menge M als l -beschränkt vorausgesetzt, etwa mit Konstante K . Es bezeichne $K(X)$ die K -Konvexitätskonstante von X (siehe etwa [10, Kap. 13] oder [58, Kap. 2] zum Begriff der K -Konvexität). Dann ist nach [58, Lemma 3.10]

$$\begin{aligned} & K(X)^{-1} \|(A'_{\lambda_j} y'_j)\|_{l(l_2^n, X')} \\ & \leq \sup \left\{ \sum_{j=1}^n \langle A'_{\lambda_j} y'_j, x_j \rangle : \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j x_j \right\|_X^2 \leq 1 \right\} \\ & = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n \langle y'_j, A_{\lambda_j} x_j \rangle : \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j x_j \right\|_X^2 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Mit dem obigen Lemma 3.6.6 schätzen wir weiter ab:

$$\begin{aligned} & \leq \|(y'_j)\|_{l(l_2^n, Y')} \sup \left\{ \|(A_{\lambda_j} x_j)\|_{l(l_2^n, Y)} : \|(x_j)\|_{l(l_2^n, X)} \leq 1 \right\} \\ & \leq K \|(y'_j)\|_{l(l_2^n, Y')}. \end{aligned}$$

Damit ist die eine Richtung nachgewiesen. Ist umgekehrt die Menge M' l -beschränkt, so auch M'' (hier verwenden wir, daß Y bzw. Y' K -konvex sind). Die l -Beschränktheit von M folgt nun aus der isometrischen Einbettung von X in seinen Bidualraum.

3.7 Ein Fortsetzungssatz

Wir betrachten einen Banachraum Y mit der (α) -Eigenschaft und zwei separable Hilberträume H_1, H_2 . Wir werden sehen, daß dann die aus einer Folge beschränkter Operatoren $(A_k)_k \subseteq B(H_1, H_2)$ gebildeten Erweiterungen $A_k^\otimes \in B(l(H_1, Y), l(H_2, Y))$ sogar eine l -beschränkte Menge $\{A_k^\otimes : k \in \mathbb{N}\}$ bilden. Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir zwei Hilfslemmata. Das erste ist [10, Corollary 12.17] entnommen.

LEMMA 3.7.1 Es sei $A \in B(l_2^m, l_2^n)$ durch die Matrix $A = (\alpha_{ij})$ dargestellt. Es sei (g_n) eine Folge unabhängiger Gaußscher Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω . Dann gilt für beliebige Elemente y_1, \dots, y_n eines Banachraums Y die Ungleichung

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i \right\|_Y^2 \right)^{1/2} \leq \|A\| \cdot \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^m g_i y_i \right\|_Y^2 \right)^{1/2}.$$

LEMMA 3.7.2 Es sei Y ein Banachraum mit der (α) -Eigenschaft. Dann existiert ein $c > 0$ so, daß für beliebige Zahlen $J, K, N \in \mathbb{N}$, unabhängige Folgen unabhängiger Gaußscher Zufallsvariablen (g_n) und (g'_k) und komplexe Zahlen (α_{njk}) die folgende Abschätzung gilt:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N g'_k g_n \sum_{j=1}^J \alpha_{njk} y_{nj} \right\|_Y^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \text{const.} \max_{n=1, \dots, N} \|(\alpha_{njk})_{jk}\|_{l_2^K \rightarrow l_2^J} \left(\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N g'_k g_n y_{nk} \right\|_Y^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis nutzt zwei Ideen: Nach Bemerkung 3.1.9 impliziert die (α) -Eigenschaft endlichen Kotyp, nach Satz 3.5.3 sind Gaußsche und Bernoulli-Summen also äquivalent. Es gilt also mit einer Zahl $C > 0$ (die von der Kotypkonstanten abhängt) für alle $K \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{C} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^K r_k y_k \right\|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^K g_k y_k \right\|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^K r_k y_k \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Zum anderen erlaubt die (α) -Eigenschaft nach [57, Remark 2.1] bei doppelten zufälligen Summen mit zwei unabhängigen Folgen von Bernoullischen Zufallsvariablen äquivalent zu *einer gemeinsamen* unabhängigen Folge Bernoullischer Zufallsvariablen überzugehen (siehe auch [21, II, Lemma 4.11]). Es existiert also ein C_Y derart, daß gilt:

$$\frac{1}{C_Y} \mathbb{E} \left\| \sum_{(k,j)} r_{(k,j)} y_{kj} \right\|^2 \leq \mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{k,j} r_k r'_j y_{kj} \right\|^2 \leq C_Y \mathbb{E} \left\| \sum_{(k,j)} r_{(k,j)} y_{kj} \right\|^2.$$

Dieses C_Y hängt nur von der (α) -Konstanten ab. Nun also zum Beweis: Wir blasen die Folge von Matrizen $M_n := (\alpha_{njk})_{j,k}$ künstlich zu einer Diagonalmatrix von $J \times K$ -Matrizen auf: $\beta_{(j,m),(n,k)} := \delta_{nm} \alpha_{njk}$, $m = 1, \dots, N$. Damit ist

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N g'_k g_n \sum_{j=1}^J \alpha_{njk} y_{nj} \right\|_{\mathbb{Y}}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C^2 \left(\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N r'_k r_n \sum_{j=1}^J \alpha_{njk} y_{nj} \right\|_{\mathbb{Y}}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C^2 C_Y \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{(k,n)} r_{(k,n)} \sum_{(j,m)} \beta_{(j,m),(n,k)} y_{(j,m)} \right\|_{\mathbb{Y}}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C^3 C_Y \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{(k,n)} g_{(k,n)} \sum_{(j,m)} \beta_{(j,m),(n,k)} y_{(j,m)} \right\|_{\mathbb{Y}}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Jetzt sind wir genau in der Situation, um Lemma 3.7.1 anzuwenden. Wir erhalten

$$\leq C^3 C_Y \left\| (\beta_{(j,m),(n,k)}) \right\|_{l_2^{J \times N} \rightarrow l_2^{N \times K}} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{(j,m)} g_{(j,m)} y_{(j,m)} \right\|_{\mathbb{Y}}^2 \right)^{1/2}.$$

Die Norm der Matrix $(\beta_{(j,m),(n,k)})$ läßt sich wegen ihrer Diagonalblockgestalt wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} & = C^3 C_Y \max_{n=1, \dots, N} \left\{ \left\| (\alpha_{njk}) \right\|_{l_2^K \rightarrow l_2^J} \right\} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{(j,m)} g_{(j,m)} y_{(j,m)} \right\|_{\mathbb{Y}}^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C^5 C_Y^2 \max_{n=1, \dots, N} \left\{ \left\| (\alpha_{njk}) \right\|_{l_2^K \rightarrow l_2^J} \right\} \left(\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{j,n=1}^{J,N} g_j g'_n y_{jn} \right\|_{\mathbb{Y}}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

Dies ist die behauptete Abschätzung. □

SATZ 3.7.3 (Fortsetzungssatz) Es seien zwei separable Hilberträume H_1 und H_2 und ein Banachraum Y mit der (α) -Eigenschaft. Wenn für $k \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkte lineare Operatoren $A_k : H_1 \rightarrow H_2$ gegeben sind, und \mathcal{A} die Menge $\mathcal{A} := \{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ bezeichnet, so ist die Menge

$$\mathcal{A}^\otimes := \{A_k^\otimes : l(H_1, Y) \rightarrow l(H_2, Y) : k \in \mathbb{N}\}$$

l -beschränkt.

Beweis. Die l -Beschränktheit von \mathcal{A}^\otimes ist äquivalent zur gleichmäßigen Beschränktheit (in $N \in \mathbb{N}$) der Diagonaloperatoren

$$(A_v^\otimes) : l(l_2^N(\mathbb{Z}), l(H_1, Y)) \rightarrow l(l_2^N(\mathbb{Z}), l(H_2, Y)).$$

Es sei also $N \in \mathbb{N}$ und ein Operator $v : l_2^N(\mathbb{Z}) \rightarrow l(H_1, Y)$ fixiert. Es bezeichne (e_n) die kanonische Basis in l_2^N und (f_k) ein abzählbares Orthonormalsystem in H_2 . Dann ist

$$\begin{aligned} \|(A_v^\otimes)v\|_{l(l_2^N(\mathbb{Z}), l(H_2, Y))} &= \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n(A_v^\otimes)v(e_n) \right\|_{l(H_2, Y)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n A_n^\otimes v(e_n) \right\|_{l(H_2, Y)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n v(e_n) A_n' \right\|_{l(H_2, Y)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\mathbb{E} \lim_{K \rightarrow \infty} \mathbb{E}' \left\| \sum_{k=1}^K g_k' \left(\sum_{n=1}^N g_n v(e_n) A_n' \right) (f_k) \right\|_Y^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

und wegen des Satzes über majorisierte Konvergenz

$$= \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{n,k}^{N,K} g_k' g_n v(e_n) (A_n' f_k) \right\|_Y^2 \right)^{1/2}$$

Für festes K ist $\text{span}\{A_n'(f_k) : n = 1, \dots, N, k = 1, \dots, K\}$ ein endlichdimensionaler Teilraum, seine Dimension sei J . Es bezeichne (h_j) eine Orthonormalbasis

dieses Teilraums; wir können also schreiben $A'_n(f_k) =: \sum_j \alpha_{nj} h_j$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{n,k}^{N,K} g'_k g_n v(e_n)(A'_n f_k) \right\|_Y^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{n,k}^{N,K} g'_k g_n \sum_j \alpha_{nj} v(e_n)(h_j) \right\|_Y^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.7.2 haben wir die Abschätzung

$$\leq C' \max_{n=1, \dots, N} \|(\alpha_{nj})_{jk}\|_{l_2^k \rightarrow l_2^j} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{(j,m)} r_{(j,m)} v(e_m)(h_j) \right\|_Y^2 \right)^{1/2}.$$

Die Normen $\|(\alpha_{nj})_{jk}\|_{l_2^k \rightarrow l_2^j}$ sind gleichmäßig beschränkt. Um dies einzusehen, betrachten wir

$$\begin{aligned} \|(\alpha_{nj})_{jk}\|_{l_2^k \rightarrow l_2^j} &= \sup_{\|(\lambda_k)\|_{l_2^k} \leq 1} \left\| \left(\sum_k \alpha_{nj} \lambda_k \right) \right\|_{l_2^j} = \sup_{(\lambda_k)} \left\| \sum_{j,k} \alpha_{nj} \lambda_k h_j \right\|_{H_1} \\ &= \sup_{(\lambda_k)} \left\| A'_n \left(\sum_{k=1}^K \lambda_k f_k \right) \right\|_{H_1} \leq \|A'_n\|_{H_2 \rightarrow H_1} \leq M. \end{aligned}$$

Nachdem diese Norm unabhängig von N, K, J beschränkt bleibt, können wir die obigen Überlegungen wieder zurück gehen und erhalten so das gewünschte Resultat. \square

BEMERKUNG 3.7.4 Die Voraussetzung an Y , der (α) -Eigenschaft zu genügen ist im obigen Satz im allgemeinen notwendig. Es sei etwa $H_1 = H_2 = l_2(\mathbb{N})$. Es seien N, K beliebige natürliche Zahlen und Zahlen β_{kn} , $1 \leq k \leq K$, $1 \leq n \leq N$ mit $|\beta_{kn}| \leq 1$ gegeben. Wir definieren die $K \times K$ Diagonalmatrix A_n als

$$A_n := (\alpha_{jk}^{(n)})_{j,k} := (\delta_{jk} \beta_{kn})_{j,k}.$$

Die Diagonalmatrizen A_n mit den Diagonaleinträgen $\beta_{1n}, \dots, \beta_{Kn}$ sind als Endomorphismen von l_2 offenbar gleichmäßig mit Norm eins beschränkt. Gilt der Fortsetzungssatz 3.7.3, so müssen die Fortsetzungen A_n^\otimes eine l -beschränkte Menge bilden. Die l -Schranke hängt dabei nicht von N, K bzw. der genauen Wahl der β_{nk} ab. Es gibt also ein $M > 0$, für das die Abschätzung

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n A_n^\otimes u_n \right\|_{l(l_2, Y)} \leq M \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n u_n \right\|_{l(l_2, Y)}$$

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

für beliebige $N \in \mathbb{N}$, (β_{nk}) mit $|\beta_{nk}| \leq 1$ und $u_1, \dots, u_N \in l(l_2, Y)$ erfüllt ist. Schreiben wir die l -Normen aus, so ergibt sich für ein Orthonormalsystem (e_j) von l_2 die Abschätzung

$$\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K g_n g'_k \sum_{j=1}^K \alpha_{kj}^{(n)} u_n(e_j) \right\|_Y \leq M \mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K g_n g'_k u_n(e_k) \right\|_Y$$

Setzen wir hier die Definition der $\alpha_{jk}^{(n)}$ ein, so zeigt sich, daß Y die (α) -Eigenschaft hat (man beachte Bemerkung 3.1.8).

BEMERKUNG 3.7.5 Mit Hilfe des folgenden Lemmas von Kaiser und Weis [35] kann man für den Fall $H_1 = \mathbb{C}$ oder $H_2 = \mathbb{C}$ in Satz 3.7.3 die Voraussetzung der (α) -Eigenschaft an Y zu endlichem Kotyp abschwächen, indem man im Beweis anstelle von Lemma 3.7.2 nun Lemma 3.7.6 verwendet.

LEMMA 3.7.6 Es sei Y ein Banachraum endlichen Kotyps. Dann existiert eine Zahl $C > 0$ so, daß für alle $N, K \in \mathbb{N}$, Elemente $y_1, \dots, y_N \in Y$ und komplexe Zahlen α_{nk} ($n = 1, \dots, N; k = 1, \dots, K$) gilt:

$$\left(\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N g_n g'_k \alpha_{nk} y_n \right\|_Y^2 \right)^{1/2} \leq C \max_n \|(\alpha_{nk})_k\|_{l_2^K} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n y_n \right\|_Y^2 \right)^{1/2}.$$

In der Tat gilt hier auch eine umgekehrte Abschätzung auf beliebigen Banachräumen, wie eine Diskussion mit C. Kaiser ergab:

LEMMA 3.7.7 Es sei Y ein Banachraum. Dann existiert eine Konstante $c > 0$ so, daß für alle $N, K \in \mathbb{N}$, Elemente $y_1, \dots, y_N \in Y$ und von Null verschiedene Elemente $(\alpha_{1.}), \dots, (\alpha_{N.})$ des \mathbb{C}^K gilt:

$$\min_n \|(\alpha_{nk})_k\|_{l_2^K} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n y_n \right\|_Y^2 \right)^{1/2} \leq c \left(\mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N g_n g'_k \alpha_{nk} y_n \right\|_Y^2 \right)^{1/2}.$$

Beweis. Es sei (g'_k) eine von (g_n) unabhängige Folge unabhängiger Gaußscher Zufallsvariablen. Es bezeichne $\bar{g}_n := \sum_{k=1}^K \alpha_{kn} g'_k$. Zunächst betrachten wir

reelle α_{nk} . Dann sind die Zufallsvariablen \bar{g}_n im allgemeinen nicht mehr unabhängig, aber weiterhin normalverteilt mit Varianz $\sigma_n^2 := \|(\alpha_{nk})_k\|_{l_2^k}^2$. Für das erste Moment von \bar{g}_n gilt nach [10, Abschnitt *Gaussian variables*, Kap. 12]

$$\mathbb{E}' \left| \sum_{k=1}^K \alpha_{kn} g'_k \right| = \sigma_n m_1,$$

wobei m_1 das erste Moment der Standardnormalverteilung sei. Für komplexe α_{nk} müssen wir die α_{nk} in Real- und Imaginärteil zerlegen. Wir setzen $\sigma_{n,R} := \|(Re(\alpha_{nk}))_k\|_{l_2^k}^2$ und $\sigma_{n,I} := \|(Im(\alpha_{nk}))_k\|_{l_2^k}^2$. Dann ist $\sigma_{n,R}^2 + \sigma_{n,I}^2 = \sigma_n^2$. Wir erhalten für das erste Moment von \bar{g}_n hieraus die Abschätzung

$$\mathbb{E} |\bar{g}_n| \geq m_1 \max(\sigma_{n,R}, \sigma_{n,I}) \geq \sqrt{1/2} m_1 \sigma_n.$$

Die zweite Abschätzung ist hier die Normäquivalenz der euklidischen Norm zur Supremumsnorm. Folglich ist nach dem Kontraktionsprinzip (Ungleichung (3.1.2))

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n y_n \right\|_Y^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \max_n [m_1 \sigma_n]^{-1} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n \mathbb{E}' \left| \sum_{k=1}^K \alpha_{kn} g'_k \right| y_n \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Mit der kontinuierlichen Minkowski-Ungleichung erhalten wir

$$\leq \sqrt{2} \max_n [m_1 \sigma_n]^{-1} \mathbb{E}' \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n \left| \sum_{k=1}^K \alpha_{kn} g'_k \right| y_n \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Wir schätzen den äußeren Erwartungswert mit der Hölder-Ungleichung ab:

$$\leq \sqrt{2} \max_n [m_1 \sigma_n]^{-1} \left(\mathbb{E}' \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n \left| \sum_{k=1}^K \alpha_{kn} g'_k \right| y_n \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Die Betragsbildung im Innern können wir (für festes Argument des äußeren Integrals) nun zunächst als Multiplikation mit geeigneten $\mu_n \in S^1$ auffassen, und daher wiederum mit dem Kontraktionsprinzip abschätzen:

$$= \sqrt{8} \max_n [m_1 \sigma_n]^{-1} \left(\mathbb{E}' \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K g_n g'_k \alpha_{kn} y_n \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Mit $\max_n \sigma_n^{-1} = [\min_n \sigma_n]^{-1}$ folgt hieraus die Behauptung. \square

3.7.1 Folgerungen

Wir haben bereits gesehen, daß für L^2 -Funktionen h und Elemente y eines Banachraums stets $\|h \otimes y\| = \|h\|_2 \|y\|_Y$ gilt. Die Lemmata 3.7.6 und 3.7.7 erlauben nun, diese Idee in Form einer Äquivalenz für randomisierte Summen wie folgt fortzusetzen:

LEMMA 3.7.8 Es sei Y ein Banachraum und (g_n) eine Folge unabhängiger Gaußscher Zufallsvariablen. Dann existiert ein $c > 0$ dergestalt, daß für alle $N \in \mathbb{N}$ und Elemente $y_1, \dots, y_N \in Y$ sowie $h_1, \dots, h_N \in L^2(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$ gilt:

(a) Es gilt stets

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n y_n \right\|_Y^2 \leq c (\min_n \|h_n\|_2) \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n h_n \otimes y_n \right\|_{L(\mathbb{R}_+, Y)}^2.$$

(b) Hat Y endlichen Kotyp, so gilt

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n h_n \otimes y_n \right\|_{L(\mathbb{R}_+, Y)}^2 \leq c (\max_n \|h_n\|_2) \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n y_n \right\|_Y^2.$$

Beweis. Es seien $N \in \mathbb{N}$, $y_1, \dots, y_N \in Y$ und $h_1, \dots, h_N \in L^2(\mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$ fixiert. Zunächst finden wir ein Orthonormalsystem $(e_k)_k$ von $L^2(\mathbb{R}_+)$ für das nur endlich viele der Skalarprodukte $\alpha_{kn} := (h_n | e_k)$, $n = 1, \dots, N$ von Null verschieden sind. Es existiert also ein $K \in \mathbb{N}$ so, daß $h_n = \sum_{k=1}^K \alpha_{kn} e_k$ gilt. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N g_n h_n \otimes y_n \right\|_{L(\mathbb{R}_+, Y)}^2 &= \mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K g_n g'_k \int_0^\infty h_n(t) e_k(t) dt y_n \right\|_Y^2 \\ &= \mathbb{E}' \mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K g_n g'_k \alpha_{kn} y_n \right\|_Y^2. \end{aligned}$$

Beachten wir $\|(\alpha_{kn})_k\|_{l_2} = \|h_n\|_{L^2}$, so folgen unmittelbar die Behauptungen (a) aus Lemma 3.7.7 und (b) aus Lemma 3.7.6. \square

Wir kommen nun zu einer allgemeineren Folgerung aus dem Fortsetzungssatz, die einen Satz von LeMerdy [43, Proposition 3.3] verallgemeinert. Sie ist mit einem anderen Beweis in [49] enthalten.

KOROLLAR 3.7.9 Es seien X und Y Banachräume und Y habe endlichen Kotyp. Ist $\varphi : I \rightarrow B(X, Y)$ stark meßbare Abbildung und gilt $\varphi(\cdot)x \in l(I, Y)$ mit einer Abschätzung der Form $\|\varphi(\cdot)x\|_{l(I, Y)} \leq M\|x\|_X$ für alle $x \in X$, so ist die Menge

$$\left\{ \int_I \alpha(t)\varphi(t)dt : \alpha \in L^2(I), \|\alpha\|_2 \leq 1 \right\}$$

l -beschränkt in $B(X, Y)$.

Beweis. Es sei (α_k) eine dichte abzählbare Folge in der Einheitskugel \mathcal{U} von $L^2(I)$. Wenn wir Satz 3.7.3 und Bemerkung 3.7.5 auf $H_1 = L^2(I)$ und $H_2 = \mathbb{C}$ anwenden, erhalten wir mit

$$\alpha^\otimes : \begin{cases} l(I, Y) & \rightarrow Y \\ f & \mapsto \int_I \alpha(t)f(t)dt \end{cases}$$

die l -Beschränktheit der Menge $\{\alpha^\otimes : \alpha \in \mathcal{U}\}$ in $B(l(I, Y), Y)$. Also ist $\{\alpha^\otimes \circ \varphi : \alpha \in \mathcal{U}\}$ in $B(X, Y)$ l -beschränkt. \square

Wenden wir dieses Ergebnis auf eine spezielle Teilklasse in $L^2(\mathbb{R}_+)$, nämlich Funktionen der Form $\alpha_\lambda(t) := \lambda^{1/2} \exp(-\lambda t)$ an, so erhalten wir den folgenden Satz, der sogar ohne die Voraussetzung endlichen Kotyps an Y gültig ist, wie WEIS [69] zeigen konnte:

SATZ 3.7.10 Es seien X, Y Banachräume. Ist $N : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(X, Y)$ stark meßbar, und gilt $N(\cdot)x \in l(\mathbb{R}_+, Y)$ mit einer Abschätzung der Form $\|N(\cdot)x\|_l \leq M\|x\|$ für alle $x \in X$, so ist für jedes $\omega < \pi/2$ die Menge $\{\lambda^{1/2}\widehat{N}(\lambda) : \lambda \in S_\omega\}$ in $B(X, Y)$ l -beschränkt. Dabei bezeichne \widehat{N} die Laplacetransformation von N .

Beweis. Wir schreiben für ein beliebiges, aber festes $x \in X$ kurz $f(t) := N(t)x$. Es sei ein beliebiges $\omega \in (0, \pi/2)$ vorgelegt. Wir wählen hierzu ein $\sigma \in (\omega, \pi/2)$ und betrachten Zahlen $|\theta| \leq \sigma$. Dann ist für $\lambda > 0$

$$\lambda^{-1}\widehat{f}(e^{i\theta}\lambda^{-1}) = \int_0^\infty \lambda^{-1} e^{-e^{i\theta}\lambda^{-1}t} f(t) dt,$$

wir integrieren also f gegen den Integralkern $K_\theta(\lambda, t) := \lambda^{-1} \exp(-e^{i\theta}\lambda^{-1}t)$. Dieser ist homogen vom Grad -1 und es gilt

$$\int_0^\infty t^{-1/2} |K(1, t)| dt = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-\cos(\theta)t} dt \leq M_\sigma \quad \text{für alle } |\theta| \leq \sigma.$$

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

Nach Lemma 4.1.3 ist daher durch die Abbildung $K_\theta : f \mapsto \lambda^{-1} \widehat{f}(e^{i\theta} \lambda^{-1})$, $|\theta| \leq \sigma$ eine gleichmäßig beschränkte Familie von Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}_+)$ gegeben. Wir haben also die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{S_\sigma} |z^{-1/2} \widehat{f}(z)|^2 dz &\stackrel{z=r^{-1}e^{i\theta}}{=} \int_{-\sigma}^{\sigma} \int_0^\infty |r^{-1} \widehat{f}(e^{i\theta} r^{-1})|^2 dr d\theta \\ &\leq 2\sigma M_\sigma \int_0^\infty |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung zeigt, daß durch $\Phi : f \mapsto \lambda^{-1/2} \widehat{f}(\lambda)$ eine stetige Abbildung von $L^2(\mathbb{R}_+)$ nach $L^2(S_\sigma)$ gegeben ist. Diese setzen wir als Φ^\otimes von $l(\mathbb{R}_+, Y)$ nach $l(S_\sigma, Y)$ fort. Hiermit können wir nun die Behauptung zeigen: es bezeichne $K(x, r)$ die Kugel um x mit Radius r in der komplexen Zahlenebene. Wir wählen ein beliebiges, aber festes $a \in [1, 2]$. Dann sind für beliebiges $|\theta| < \omega$ die Kugeln $K(ae^{i\theta} 2^n, \delta 2^n)$, für $n \in \mathbb{Z}$ sowohl in S_σ enthalten als auch disjunkt, wenn $\delta > 0$ nur hinreichend klein gewählt wird. Setzen wir $\lambda_n := ae^{i\theta} 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$, so gilt für die Funktionen

$$e_n := \frac{1}{\sqrt{\pi\delta} 2^n} \mathbb{1}_{K(\lambda_n, \delta 2^n)}$$

außerdem $\|e_n\|_{L^2(S_\sigma)} = 1$, es handelt sich also um ein Orthonormalsystem in $L^2(S_\sigma)$. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt für Funktionen g , die auf einer Umgebung der Kreisscheibe $K(a, r)$ holomorph sind, die Beziehung

$$g(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + se^{i\theta}) d\theta$$

für alle $s \in (0, r)$. Integrieren wir nun über s , so erhalten wir

$$g(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r s \int_0^{2\pi} g(a + se^{i\theta}) d\theta ds = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(a, r)} g(z) dz.$$

Dies wenden wir für $a = \lambda_n$ und $r = \delta 2^n$ auf $g(z) = z^{-1/2} \widehat{f}(z)$ an:

$$\begin{aligned} \lambda_n^{1/2} \widehat{N}(\lambda_n) \chi &= \lambda_n \lambda_n^{-1/2} \widehat{f}(\lambda_n) = \frac{\lambda_n}{\pi \delta^2 2^{2n}} \int_{B(\lambda_n, \delta 2^n)} z^{-1/2} \widehat{f}(z) dz \\ &= \frac{ae^{i\theta}}{\sqrt{\pi\delta}} \int_{S_\sigma} e_n(z) z^{-1/2} \widehat{f}(z) dz. \end{aligned}$$

Aus der Definition der l -Norm erhalten wir hieraus unmittelbar die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \lambda_n^{1/2} \widehat{N}(\lambda_n) x \right\| &\leq \frac{\alpha}{\sqrt{\pi \delta}} \left\| \lambda \mapsto \lambda^{-1/2} \widehat{N}(\lambda) x \right\|_{l(S_\sigma, Y)} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi \delta}} \left\| \Phi^{\otimes} N(\cdot) x \right\|_{l(S_\sigma, Y)} \\ &\leq \frac{\alpha}{\sqrt{\pi \delta}} \|\Phi\| \left\| N(\cdot) x \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} \frac{\alpha M}{\sqrt{\pi \delta}} \|\Phi\| \|x\|_X \end{aligned}$$

Nach [50, Prop. 2.3] impliziert dies bereits die l -Beschränktheit der Mengen $\{\lambda_n^{1/2} \widehat{N}(\lambda_n) : n \in \mathbb{Z}\}$ mit einer l -Schranke von höchstens $\sqrt{2} \frac{\alpha}{\delta} M \|\Phi\|$. Die obige Konstruktion zeigt, daß diese Konstante für $\alpha \in [1, 2]$ gleichmäßig beschränkt ist. Wir können also [21, Ex. 2.16] anwenden, und erhalten die l -Beschränktheit der Menge $\{\lambda^{1/2} \widehat{N}(\lambda) : \lambda \in S_\omega\}$, was zu zeigen war. \square

Das obige Korollar 3.7.9 haben wir aus dem Fortsetzungssatz für den Fall $H_1 = L^2(I)$ und $H_2 = \mathbb{C}$ erhalten. Vertauschen wir die Räume H_1 und H_2 , setzen wir also $H_1 = \mathbb{C}$ und $H_2 = L^2(I)$ so können wir die folgende Aussage gewinnen:

KOROLLAR 3.7.11 Es seien U, X Banachräume, und U habe endlichen Kotyp. Ist $\varphi : I \rightarrow B(U, X)$ stark meßbar und gilt $\int_I \varphi(t) u(t) dt \in X$ für alle $u \in l(I, U)$ mit einer Abschätzung der Form $\left\| \int_I \varphi(t) u(t) dt \right\|_X \leq K \|u\|_l$, so ist die Menge

$$\left\{ \int_I a(t) \varphi(t) dt : a \in L^2(I), \|a\|_2 \leq 1 \right\}$$

l -beschränkt in $B(U, X)$.

Beweis. Es sei a_k eine abzählbare dichte Teilmenge der Einheitskugel \mathcal{U} von $L^2(I)$. Wir betrachten dann für ein $n \in \mathbb{N}$ und $u_1, \dots, u_n \in U$

$$\begin{aligned} &\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n g_k \int_I a_k(t) \varphi(t) u_k dt \right\|_X^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\mathbb{E} \left\| \int_I \varphi(t) \left(\sum_{k=1}^n g_k (a_k(t) \otimes u_k) \right) dt \right\|_X^2 \right)^{1/2} \\ &\leq M \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n g_k (a_k \otimes u_k) \right\|_{l(\mathbb{R}_+, U)}^2 \right)^{1/2} \\ &= M \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n g_k u_{a_k \otimes u_k} \right\|_{l(L^2(\mathbb{R}_+), U)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Die Operatoren $T_k : \lambda \mapsto \lambda a_k$ sind beschränkt von \mathbb{C} nach $L^2(I)$, also ist die Menge $\{T_k^\otimes : k \in \mathbb{N}\}$ gemäß Satz 3.7.3 und Bemerkung 3.7.5 l -beschränkt von $l(\mathbb{C}, \mathcal{U})$ nach $l(L^2(I), \mathcal{U})$. Für $h \in L^2(I)$ und $u_k \in \mathcal{U} \simeq l(\mathbb{C}, \mathcal{U})$ ist $(T_k^\otimes u_k)(h) = (a_k | h) u_k$, also $T_k^\otimes = u_{a_k \otimes u_k}$. Es folgt

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n g_k \int_I a_k(t) \varphi(t) u_k dt \right\|_X^2 \right)^{1/2} \leq M' \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n g_k u_k \right\|_{\mathcal{U}}^2 \right)^{1/2}.$$

Mit Satz 3.5.5 folgt dann die Behauptung. □

3.8 Translationsinvariante Operatoren auf $l(\mathbb{R}_+, X)$

Es sei mit \mathbb{C}_+ die rechte Halbebene, also die Menge $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ bezeichnet. Mit S_τ sei der „Rechtsshift“, auf $L^2(\mathbb{R}_+)$ bezeichnet, also $(S_\tau f)(t) = f(t - \tau)$ für $t \geq \tau$ und Null sonst. Der entsprechende „Linksshift“ ist der adjungierte Operator: $(S'_\tau f)(t) = f(t + \tau)$. Wir haben dann für einen Banachraum X die erweiterten Shiftoperatoren S_τ^\otimes und $(S'_\tau)^\otimes$, die l -Funktionen $f \in l(\mathbb{R}_+, X)$ in der gleichen Weise nach rechts bzw. links verschieben: Es ist nämlich

$$(S_\tau^\otimes u_f)h = (u_f \circ S'_\tau)(h) = \int_0^\infty f(t) S'_\tau(h)(t) dt = \int_0^\infty S_\tau(f)(t) h(t) dt = u_{S_\tau f} h,$$

und entsprechendes gilt für den Linksshift.

In diesem Abschnitt wollen wir translationsinvariante Operatoren auf dem Raum $l(\mathbb{R}_+, X)$ untersuchen, also Operatoren $F \in B(l(\mathbb{R}_+, X))$ für die $S_\tau^\otimes F = F S_\tau^\otimes$ gilt. Analog zu dem von G. WEISS in [70] betrachteten Fall $L^2(\mathbb{R}_+, X)$ stellt sich heraus, daß translationsinvariante Operatoren auf $l(\mathbb{R}_+, X)$ notwendigerweise Faltungsoperatoren sein müssen. Es sei im folgenden $e_s := \exp(s \cdot)$.

LEMMA 3.8.1 Es sei $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ und $s \in \mathbb{C}_+$ so, daß f der folgenden, als Translationseigenschaft bezeichneten Eigenschaft genügt:

$$\text{Für alle } \tau \geq 0 : \quad S'_\tau f = e^{-s\tau} f. \tag{T}$$

Dann existiert eine komplexe Zahl α , für die fast überall $f = \alpha e_{-s}$ gilt.

Beweis. Es ist $f \in L^1([0, 1])$. Da für $t \in [n, n+1]$ die Beziehung $f(t) = f(t-n)e^{-sn}$ fast überall gilt, ist $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Wir setzen $F(t) := \int_t^\infty f(r) dr$. Auch F genügt der Translationseigenschaft (T) und ist stetig. Daher ist die Funktion $W(t) := e^{st}F(t)$ konstant, und mit $\alpha := sW(t)$ ist $F(t) = \alpha e^{-st}$. Durch Ableiten erhalten wir schließlich $f(t) = -F'(t) = \alpha e^{-st}$ fast überall. \square

LEMMA 3.8.2 Es sei U ein Banachraum und $s \in \mathbb{C}_+$. Erfüllt eine stetige Linearform $f \in l(\mathbb{R}_+, U)'$ für alle $g \in l(\mathbb{R}_+, U)$ die Translationseigenschaft

$$\langle S_\tau g, f \rangle = \langle g, S'_\tau f \rangle = \langle g, e^{-s\tau} f \rangle,$$

so gilt $f = e_{-s} \otimes v'$ für ein eindeutig bestimmtes $v' \in U'$.

Beweis. Wir definieren zunächst den bilinearen Operator $\varphi : U \times l(\mathbb{R}_+, U)' \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$ durch

$$\langle h, \varphi(u, y) \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+)} := \langle h \otimes u, y \rangle_{l(\mathbb{R}_+, U), l(\mathbb{R}_+, U)'}$$

Offenbar ist φ beschränkt. Ist $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$ gegeben, so ist

$$\begin{aligned} \langle h, \varphi(u, S'_\tau y) \rangle &= \langle h \otimes u, S'_\tau y \rangle = \langle (S_\tau h) \otimes u, y \rangle \\ &= \langle S_\tau h, \varphi(u, y) \rangle = \langle h, S'_\tau \varphi(u, y) \rangle. \end{aligned}$$

Demnach gilt $\varphi(u, S'_\tau y) = S'_\tau \varphi(u, y)$. Setzen wir hier $y := f$, so erhalten wir $S'_\tau \varphi(u, f) = \varphi(u, S'_\tau f) = e^{-s\tau} \varphi(u, f)$. Für festes $u \in U$ erfüllt also auch $\varphi(u, f) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ die Translationseigenschaft (T). Also existiert nach Lemma 3.8.1 ein α_u für das $\varphi(u, f) = \alpha_u e_{-s}$ gilt. Die Abbildung $v' : u \mapsto \alpha_u$ ist linear und wegen der Beschränktheit von φ selbst beschränkt, sie ist also ein Element von U' . Ist $y \in l(\mathbb{R}_+, U')$, so ist $\varphi(u, y)$ nach Lemma 3.6.6 durch $t \mapsto \langle u, y(t) \rangle_{U, U'}$ gegeben. Es folgt für alle $u \in U$:

$$\varphi(u, f) = e_{-s} \langle u, v' \rangle_{U, U'} = \varphi(u, e_{-s} \otimes v').$$

Wir zeigen nun, daß hieraus die Behauptung folgt. Dazu beginnen wir mit einem beschränkten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}_+$ und setzen $g := \mathbb{1}_I \otimes u$ für ein $u \in U$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle g, f \rangle_{l(\mathbb{R}_+, U), l(\mathbb{R}_+, U)'} &= \langle \mathbb{1}_I, \varphi(u, f) \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &= \langle \mathbb{1}_I, \varphi(u, e_{-s} \otimes v') \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &= \langle \mathbb{1}_I \otimes u, e_{-s} \otimes v' \rangle_{l(\mathbb{R}_+, U), l(\mathbb{R}_+, U)'} \\ &= \langle g, e_{-s} \otimes v' \rangle_{l(\mathbb{R}_+, U), l(\mathbb{R}_+, U)'} \end{aligned}$$

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

Es ist unmittelbar klar, daß diese Gleichheit auch für Treppenfunktionen gilt, und vermöge deren Dichtheit in $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+, U)$ folgt die Behauptung. \square

SATZ 3.8.3 Es seien U, Y zwei Banachräume, und $F : \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, U) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, Y)$ sei ein stetiger linearer und translationsinvarianter Operator in dem Sinne, daß für alle $\tau \geq 0$ gilt: $S_\tau^\otimes F = F S_\tau^\otimes$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion $H : \mathbb{C}_+ \rightarrow B(U, Y)$ derart, daß für $y := Fu$ gilt:

$$\hat{y}(s) = H(s)\hat{u}(s).$$

Dabei bezeichnen \hat{y} und \hat{u} die Laplacetransformierten der jeweiligen Funktionen y und u . Weiterhin ist H auf der offenen rechten Halbebene analytisch und beschränkt, und es gilt $\|H\|_\infty \leq \|F\|$. Haben U und Y nichttrivialen Typ, so ist H auf der offenen rechten Halbebene sogar \mathcal{L} -beschränkt.

Beweis. Es seien $s \in \mathbb{C}_+$ und $w' \in Y'$. Dann ist $e_{-s} \otimes w' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, Y') \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, Y)'$ und daher gilt für den adjungierten Operator F' : $F'(e_{-s} \otimes w') \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+, U)'$. Wegen der vorausgesetzten Translationsinvarianz ist

$$(S'_\tau)^\otimes F'(e_{-s} \otimes w') = F'(S'_\tau)^\otimes (e_{-s} \otimes w') = e^{-s\tau} F'(e_{-s} \otimes w').$$

Nach Lemma 3.8.2 existiert also ein eindeutig bestimmtes $v' \in U'$ für das gilt: $F'(e_{-s} \otimes w') = e_{-s} \otimes v'$. Die durch $G(s)w' := v'$ gegebene Abbildung $G(s) : Y' \rightarrow U'$ ist konstruktionsgemäß linear und beschränkt. Also ist auch $G(s)' : U'' \rightarrow Y''$ beschränkt. Es sei ι_U die kanonische Einbettung von U in seinen Bidualraum. Wir setzen $H(s) := G(s)' \circ \iota_U$ und zeigen zunächst $\hat{y}(s) = H(s)\hat{u}(s)$: Für beliebiges $w' \in Y'$ ist $F'(e_{-s} \otimes w') = e_{-s} \otimes G(s)w'$. Somit ist

$$\begin{aligned} \langle \hat{y}(s), w' \rangle_{Y, Y'} &= \left\langle \int_0^\infty e^{-st} (Fu)(t) dt, w' \right\rangle_{Y, Y'} \\ &= \int_0^\infty \langle u(t), F'(e_{-s} \otimes w')(t) \rangle_{U, U'} dt \\ &= \int_0^\infty \langle u(t), e^{-st} G(s)w' \rangle_{U, U'} dt \\ &= \langle \hat{u}(s), G(s)w' \rangle_{U, U'} = \langle H(s)\hat{u}(s), w' \rangle_{Y'', Y'}. \end{aligned}$$

Da also für alle s und u das Element $H(s)\hat{u}(s)$ durch $\hat{y}(s) \in Y$ gegeben ist, können wir $H(s)$ auch als Abbildung nach Y betrachten. Damit ist H stetig von U nach Y . Die Betrachtung der speziellen Funktion $u = e_{-1} \otimes v$ zeigt, daß

wegen der Analytizität von $\widehat{Fu}(s) = H(s)\hat{u}(s) = (1+s)^{-1}H(s)v$ auf der rechten Halbebene auch die Funktion $s \mapsto H(s)v$ für jedes $v \in U$ auf der rechten Halbebene analytisch ist. Nach [9, Lemma 1.45] ist H dann auch analytisch als Abbildung nach $B(U, Y)$.

Nun zur Normabschätzung: Es sei $w' \in Y' \setminus \{0\}$ gegeben. Dann ist nach Lemma 3.6.5

$$\begin{aligned} \|G(s)w'\|_{U'} &= \sqrt{2s} \|e_{-s} \otimes G(s)w'\|_{l(\mathbb{R}_+, U)'} = \sqrt{2s} \|F'(e_{-s} \otimes w')\|_{l(\mathbb{R}_+, U)'} \\ &\leq \sqrt{2s} \|F'\| \|e_{-s} \otimes w'\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)'} = \|F'\| \|w'\|_{Y'}, \end{aligned}$$

also $\|G(s)\| \leq \|F'\| = \|F\|$.

Es seien nun U und Y Banachräume mit nichttrivialen Typ. Nach [37, Cor. 5.5] sind die Normen $\|\cdot\|_{l(\mathbb{R}_+, U)'}$ und $\|\cdot\|_{l'(\mathbb{R}_+, U)'}$ äquivalent. Damit können wir $l(\mathbb{R}_+, U')$ als Teilraum von $l(\mathbb{R}_+, U)'$ auffassen. Wir wählen $w'_1, \dots, w'_n \in Y' \setminus \{0\}$ und $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}_+$ und setzen $h_j := e_{-s_j}$, es ist also $\|h_j\|_2 = |2s_j|^{-1/2}$. Nun wenden wir Lemma 3.7.8 an:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j G(s_j)w'_j \right\|_{U'} &\leq c \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j h_j \otimes G(s_j)w'_j \right\|_{l(\mathbb{R}_+, U)'} \\ &\leq cm \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j h_j \otimes G(s_j)w'_j \right\|_{l(\mathbb{R}_+, U)'} \\ &= cm \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j F'(h_j \otimes w'_j) \right\|_{l(\mathbb{R}_+, U)'} \\ &\leq cm \|F'\| \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j h_j \otimes w'_j \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)'}. \end{aligned}$$

Die Dualraumelemente im letzten Ausdruck sind als Funktionen $h_j \otimes w'_j$ in $l(\mathbb{R}_+, Y')$ gegeben, liegen also stets im (offenbar endlichdimensionalen) Teilraum $\text{span}\{w'_1, \dots, w'_n\}$. Damit liegt die Summe nicht nur im Raum $l(\mathbb{R}_+, Y)' = l'_+(\mathbb{R}_+, Y')$ sondern sogar in seinem Teilraum $l'(\mathbb{R}_+, Y')$. Dessen Norm aber ist nach [37, Cor. 5.5] zur Funktionennorm $\|\cdot\|_{l'(\mathbb{R}_+, Y)'}$ äquivalent. Wir erhalten daher eine Abschätzung gegen

$$\leq cm^2 \|F'\| \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j h_j \otimes w'_j \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)'}. .$$

Schließlich erhalten wir die gesuchte Abschätzung mit Lemma 3.7.8, da Y endlichen Kotyp hat

$$\leq c^2 m^2 \|F'\| \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j w'_j \right\|_{Y'}.$$

Wir wissen also, daß die Menge $\{G(s) : s \in \mathbb{C}_+\}$ in $B(Y', U')$ l -beschränkt ist. Da U und Y nichttrivialen Typ haben, ist auch $\{H(s) : s \in \mathbb{C}_+\}$ l -beschränkt. \square

3.9 l -Sektorialität, quadratische l -Abschätzungen

DEFINITION 3.9.1 Ein Operator A auf X heie l -sektoriell vom Typ $\omega_l < \pi$, falls gelten:

- (a) Es ist $\sigma(A) \subseteq \overline{S_{\omega_l}}$.
- (b) Für alle $\theta \in (\omega_l, \pi)$ ist $\{\lambda(\lambda+A)^{-1} : \lambda \notin S_\theta \cup \{0\}\}$ l -beschränkt.

LEMMA 3.9.2 Ist A ein l -sektorieller Operatoren auf dem Banachraum X und $0 \leq s \leq r$, so ist die Menge $\{\lambda^s A^{r-s} (\lambda+A)^r : \lambda > 0\}$ l -beschränkt.

Beweis. Bei genauer Betrachtung ist der Beweis eine Variante des Beweises von Lemma 1.3.4 unter Verwendung von Lemma 3.5.6. Wir geben ihn kurz an: Ist $s \in (0, r)$ und Γ der Integrationsweg aus Lemma 1.3.4, so gilt

$$\begin{aligned} A^s (\lambda+A)^{-r} x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^s}{(\lambda+z)^r} R(z, A) x \, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^s}{(\lambda+z)^r} z R(z, A) x \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

Nun haben wir im Beweis von Lemma 1.3.4 gesehen, daß die Funktionen $h_\lambda(z) := z^s (\lambda+z)^{-r}$ gleichmäßig in $L^1(\Gamma, \frac{dz}{z})$ beschränkt sind. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 3.5.6.

Im Fall $s=0, r > 0$ gehen wir ähnlich vor: wir betrachten wieder die Abbildung $\psi(z) := (1+z)^{-r} - (1+z)^{-1} \in H_0^\infty$. Es ist $\psi(\lambda^{-1}A) = \lambda^r (\lambda+A)^{-r} - \lambda(\lambda+A)^{-1}$. Wegen

$$\psi(\lambda^{-1}A) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi(\frac{z}{\lambda}) z R(z, A) \frac{dz}{z}$$

und der für $\lambda > 0$ offensichtlich gleichmäßigen Beschränktheit der Funktionen $g_\lambda(z) := \psi(z/\lambda)$ in $L^1(\Gamma, \frac{dz}{z})$ folgt die Behauptung für $s=0$ aus Lemma 3.5.6. Den Fall $s=r > 0$ schließlich zeigt man analog zum Fall $s = 0, r > 0$ mittels $\varphi(z) := \psi(1/z)$. \square

SATZ UND DEFINITION 3.9.3 Eine beschränkte analytische Halbgruppe $T(\cdot)$ heie l -analytisch, falls sie auf einem kleinen (nicht degenerierten) Sektor S_θ l -beschränkt ist. Bezeichnet $-A$ den Erzeuger von $T(\cdot)$, so ist dies äquivalent dazu, daß A dicht definiert und l -sektoriell vom Typ $\omega_l < \pi/2$ ist.

Beweis. In [68, Theorem 2.10] hat L. WEIS gezeigt, daß die R -Beschränktheit von $T(z)$ auf Sektoren S_θ für $\theta < \theta_0$ äquivalent dazu ist, daß für alle $\theta < \theta_0$ die Menge $\{\mu R(\mu, A) : -\mu \in S_{\pi/2+\theta}\}$ R -beschränkt ist.

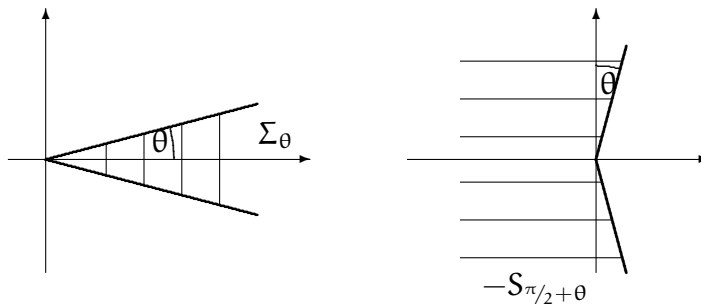


Abbildung 3.1: Die Sektoren S_θ und $-S_{\pi/2+\theta}$

Sein Beweis benutzt neben der Beschränktheit und Analytizität der Halbgruppe nur Satz 3.5.5. Da dieser, wie gezeigt, für R -beschränkte Mengen wie für l -beschränkte Mengen gilt, folgt die Behauptung wie in [68, Theorem 2.10]. \square

DEFINITION 3.9.4 Es sei A ein l -sektorieller Operator vom Typ $\omega_l < \pi$ auf dem Banachraum X . Zu $\sigma > \omega_l$ sei eine Funktion $\varphi \neq 0$ der Klasse $H_0^\infty(S_\sigma)$ gegeben. Wir sagen, daß A einer *quadratischen l -Abschätzung* bezüglich φ genügt, wenn für eine Zahl $M > 0$ die Abschätzung

$$\forall x \in X : \quad \|\varphi(\cdot A)x\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} \leq M \|x\|_X$$

besteht.

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

Analog zu Satz 2.1.5 gelten die folgenden Aussagen (siehe N. KALTON und L. WEIS [37, Proposition 7.7, Theorem 7.2]):

SATZ 3.9.5 Es sei A ein dicht definierter l -sektorieller Operator vom Typ $\omega_l < \pi$ auf dem Banachraum X . Weiter seien zu $\theta \in (\omega_l, \pi)$ zwei von Null verschiedene Funktionen φ und ψ der Klasse $H_0^\infty(S_\theta)$ gegeben. Dann existiert eine Zahl $C > 0$, für die jede Funktion f der Klasse $H^\infty(S_\theta)$ der Abschätzung

$$\|f(A)\varphi(tA)x\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} \leq C \|f\|_\infty \|\psi(tA)x\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)}$$

für $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{R}(A)$ genügt. Insbesondere zeigt die Wahl $f \equiv 1$, daß die Eigenschaft von A , quadratischen l -Abschätzungen zu genügen, nicht von der gewählten Funktion $\varphi \neq 0$ abhängt.

SATZ 3.9.6 Es sei A ein dicht definierter l -sektorieller Operator vom Typ $\omega_l < \pi$ auf dem Banachraum X . Dann gelten:

- (a) Genügen A und A' quadratischen l -Abschätzungen, so hat A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$ -Kalkül für alle $\theta \in (\omega_l, \pi)$.
- (b) Hat X endlichen Kotyp und A einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$ -Kalkül für ein $\theta \in (\omega_l, \pi)$, so genügen A und A' quadratischen l -Abschätzungen.

3.10 Spurräume für das Cauchyproblem

SATZ UND DEFINITION 3.10.1 Es sei $-A$ Erzeuger einer l -beschränkten analytischen Halbgruppe $T(\cdot)$ und $\alpha \in (0, 1)$. Dann sei der Raum $\mathcal{D}_A^l(\alpha)$ definiert als

$$\mathcal{D}_A^l(\alpha) = \{x \in X : [x]_\alpha := \|t^{1-\alpha}AT(t)x\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} < \infty\}.$$

Versieht man den Raum $\mathcal{D}_A^l(\alpha)$ mit der Norm $\|x\|_\alpha := \|x\|_X + [x]_\alpha$, so wird er zu einem Banachraum der $\mathcal{D}(A)$ enthält.

LEMMA 3.10.2 Für $f \in l(I, X)$ sei $\Phi_f : X' \rightarrow L^2(I)$ durch $\Phi_f(x') = x'(f)$ gegeben. Dann gilt die Abschätzung $\|\Phi_f\| \leq \|f\|_{l(I, X)}$.

Beweis. Setzen wir $h(t) := x'(f(t)) \cdot \|x'(f)\|_{L^2}^{-1}$, so ist nach Lemma 3.6.6 und Lemma 3.6.5

$$\begin{aligned} \|\langle x', f \rangle\| &= \int_I |\langle f(t), h(t) \otimes x' \rangle| dt \leq \|f\|_{L(I, X)} \cdot \|h \otimes x'\|_{L(I, X')} \\ &\leq \|x'\|_{X'} \|f\|_{L(I, X)}. \end{aligned}$$

Nun kommen wir zum □

Beweis von Satz 3.10.1. Zunächst zeigen wir, daß $\mathcal{D}_A^1(\alpha)$ stets $\mathcal{D}(A)$ umfaßt. Es sei M die l -Schranke von $\{T(t) : t > 0\}$. Wegen der Darstellung

$$tAT(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} te^{-tz} zR(z, A) dz$$

und der l -Sektorialität von A ist nach Lemma 3.5.6 auch $\{tAT(t) : t > 0\}$ l -beschränkt, etwa mit Konstante K . Ist $x \in \mathcal{D}(A)$, so gilt:

$$\begin{aligned} &\|t^{1-\alpha}AT(t)x\|_{L(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} \\ &= \|t^{1/2-\alpha}T(t)Ax\|_{L(\mathbb{R}_+, X)} \\ &\leq \|t^{1/2-\alpha}T(t)Ax\|_{L((0,1), X)} + \|t^{1/2-\alpha}T(t)Ax\|_{L([1,\infty), X)} \\ &\leq M\|t^{1/2-\alpha}\|_{L^2(0,1)}\|Ax\|_X + K\|t^{-1/2-\alpha}\|_{L^2[1,\infty)}\|x\|_X, \end{aligned}$$

also ist $x \in \mathcal{D}_A^1(\alpha)$. Als nächstes wollen wir zeigen, daß $\mathcal{D}_A^1(\alpha)$ ein Banachraum ist. Dazu sei (x_n) eine Folge in X , die Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_\alpha$ ist. Offenbar konvergiert (x_n) gegen ein $x_0 \in X$ und wegen der Stetigkeit der Operatoren $AT(t)$, $t > 0$, konvergiert die durch $f_n(t) := t^{1-\alpha}AT(t)x_n$ gegebene Funktionenfolge (f_n) auf $(0, \infty)$ lokal gleichmäßig gegen die Funktion $f(t) := t^{1-\alpha}AT(t)x_0$. Diese ist stetig auf $(0, \infty)$, also Bochner-meßbar. Wir wollen $f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)$ nachweisen. Wir betrachten nun stets die Dualität $\langle X, X' \rangle$. Nach dem Lemma von Fatou genügt es zu zeigen, daß für jedes $x' \in X'$ mit $\|x'\| \leq 1$ die Funktionen $\langle f_n, x' \rangle$ in $L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})$ gleichmäßig beschränkt sind. Dies ist aber nach Lemma 3.10.2 der Fall. Wegen $\|f\|_l \leq \liminf \|f_n\|_l$ (siehe Lemma 3.4.10) ist schließlich $x_0 \in \mathcal{D}_A^1(\alpha)$. □

SATZ 3.10.3 Es sei A ein dicht definierter l -sektorieller Operator vom Typ $\omega_l < \pi/2$, $T(\cdot)$ die von $-A$ erzeugte l -beschränkte analytische Halbgruppe, $x \in X$ und $u(t) := T(t)x$. Dann sind äquivalent:

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

- (a) $x \in \mathcal{D}_A^l(1/2)$.
- (b) $Au \in l(\mathbb{R}_+, X)$.
- (c) $u, u' \in l((0, 1), X)$.

Beweis. Es sei $x \in \mathcal{D}_A^l(1/2)$. Wegen der Analytizität von $T(\cdot)$ gilt für alle $t \geq 0$: $u(t) \in \mathcal{D}(A)$. Definitionsgemäß ist $t^{1/2}Au(t) \in l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)$, also $Au \in l(\mathbb{R}_+, X)$. Also gilt (b). Aus (b) folgt seinerseits sofort $u' \in l((0, 1), X)$. Weiterhin gilt $\|u'(t)\|_X \leq \frac{M}{t}$, sodaß Lemma 3.4.9 zeigt:

$$\|u\|_{l((0,1),X)} \leq \int_0^1 t^{1/2} \|u'(t)\|_X dt + \|u(1)\|_X \leq 2M + \text{const.} \|x\|_X.$$

Es gilt also (c). Schließlich sei (c) erfüllt. Es ist $Au = -u' \in l((0, 1), X)$, und damit

$$\begin{aligned} & [x]_\alpha \\ &= \|t^{1/2}Au\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} = \|Au\|_{l(\mathbb{R}_+, X)} \\ &\leq \|u'\|_{l((0,1),X)} + \|t^{-1}tAT(t)x\|_{l([1,\infty),X)} \leq \|u'\|_{l((0,1),X)} + K\|x\|_X \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die l -Beschränktheit von $\{tAT(t) : t \geq 0\}$ sowie $\|t^{-1}\|_{L^2([1,\infty))} = 1$ ausgenutzt. □

BEMERKUNG 3.10.4 Eine Idee im letzten Beweis ist eine separate Bemerkung wert: Ist $T(\cdot)$ analytisch, so ist für alle $x \in X$ und $b > 0$ wegen Lemma 3.4.9 $T(\cdot)x \in l([0, b], X)$. Ist $T(\cdot)$ exponentiell stabil (oder skaliert man entsprechend), so gilt dies auch auf \mathbb{R}_+ :

$$\begin{aligned} \|T(\cdot)x\|_{l(\mathbb{R}_+, X)} &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} T(n)[T(\cdot - n)x\mathbb{1}_{[n, n+1]}(\cdot)] \right\|_{l(\mathbb{R}_+, X)} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} M e^{-an} \|T(\cdot - n)\mathbb{1}_{[n, n+1]}(\cdot)x\|_{l(\mathbb{R}_+, X)} \\ &\leq M(1 - e^{-a})^{-1} \|T(\cdot)x\|_{l([0, 1], X)}. \end{aligned}$$

DEFINITION 3.10.5 Wir bezeichnen als Spurraum $(X, X_1)_{\alpha, l}$ für $\alpha \in (0, 1)$ den Vektorraum aller $x \in X$ für die eine Funktion

$$w \in C([0, 1], X) \cap C((0, 1], X_1) \cap C^1((0, 1], X) \tag{3.10.1}$$

derart existiert, daß $w(0) = x$ sowie

$$\llbracket w \rrbracket_{\alpha, l} := \left\| t^{1-\alpha} w'(t) \right\|_{l((0,1), \frac{dt}{t}, X)} + \left\| t^{1-\alpha} A w(t) \right\|_{l((0,1), \frac{dt}{t}, X)} < \infty$$

gelten. Auf $(X, X_1)_{\alpha, l}$ wird die Norm $\|x\|_{(X, X_1)_{\alpha, l}} := \|x\|_X + \inf_w \llbracket w_x \rrbracket_{\alpha, l}$ erklärt (das Infimum werde hier über all diejenigen w_x genommen, die die obigen Voraussetzungen erfüllen).

SATZ 3.10.6 A sei ein dicht definierter l -sektorieller Operator vom Typ $\omega < \pi/2$ auf X und $T(\cdot)$ die von $-A$ erzeugte l -analytische Halbgruppe. Für $\alpha \in (0, 1)$ und $x \in X$ sind dann die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $x \in \mathcal{D}_A^l(\alpha)$.
- (b) $[x]_{\alpha}' := \left\| t \mapsto t^{-\alpha}(T(t)x - x) \right\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} < \infty$.
- (c) $[x]_{\alpha}'' := \left\| \lambda \mapsto \lambda^{\alpha} A(\lambda + A)^{-1} x \right\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{d\lambda}{\lambda}, X)} < \infty$.
- (d) $x \in (X, X_1)_{\alpha, l}$.

Die drei Normen $\|\cdot\|_{\alpha}$, $\|\cdot\|_{\alpha}' := \|\cdot\|_X + [\cdot]_{\alpha}'$ und $\|\cdot\|_{\alpha}'' := \|\cdot\|_X + [\cdot]_{\alpha}''$ sind äquivalent, insbesondere ist $(X, X_1)_{\alpha, l}$ also ein Banachraum.

Beweis. (a) \Rightarrow (b). Es sei $x \in \mathcal{D}_A^l(\alpha)$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \left\| r^{-\alpha}(T(r)x - x) \right\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dr}{r}, X)} \\ &= \left\| r^{-\alpha} \int_0^r A T(u)x \, du \right\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dr}{r}, X)}, \end{aligned}$$

und mit den Substitutionen $r = e^t$, $u = e^s$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &= \left\| \int_0^{e^t} e^{-\alpha t} A T(u)x \, du \right\|_{l(\mathbb{R}, X)} \\ &= \left\| \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} \cdot e^{s(1-\alpha)} A T(e^s)x \, ds \right\|_{l(\mathbb{R}, X)} \\ &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(t-s) e^{-\alpha(t-s)} \cdot e^{s(1-\alpha)} A T(e^s)x \, ds \right\|_{l(\mathbb{R}, X)}. \end{aligned}$$

Nun können wir Korollar 3.4.13 anwenden und erhalten

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

$$\begin{aligned} &\leq \|e^{-\alpha \cdot}\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \|t \mapsto e^{t(1-\alpha)} A T(e^t)x\|_{L(\mathbb{R}, X)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \|t^{(1-\alpha)} A T(t)x\|_{L(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} \end{aligned}$$

mittels Rücksubstitution.

(b) \Rightarrow (c). Die Resolventendarstellung als Laplacetransformierte der Halbgruppe zeigt, daß für $\lambda > 0$ gilt:

$$A(\lambda+A)^{-1}x = x - \lambda(\lambda+A)^{-1}x = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} (x - T(t)x) dt.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\|\lambda^\alpha A(\lambda+A)^{-1}x\|_{L(\mathbb{R}_+, \frac{d\lambda}{\lambda}, X)} \\ &= \left\| \lambda^\alpha \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} (x - T(t)x) dt \right\|_{L(\mathbb{R}_+, \frac{d\lambda}{\lambda}, X)} \\ &= \left\| \int_0^\infty \underbrace{(\lambda t)^{\alpha+1} e^{-\lambda t}}_{=: h_\lambda(t)} \underbrace{t^{-\alpha} (x - T(t)x)}_{=: F(t)x} \frac{dt}{t} \right\|_{L(\mathbb{R}_+, \frac{d\lambda}{\lambda}, X)} \\ &\stackrel{\lambda t = s}{=} \left\| \int_0^\infty h_1(s) F(\frac{s}{\lambda})x \frac{ds}{s} \right\|_{L(\mathbb{R}_+, \frac{d\lambda}{\lambda}, X)} \\ &\leq \int_0^\infty |h_1(s)| \|F(\frac{s}{\lambda})x\|_{L(\mathbb{R}_+, \frac{d\lambda}{\lambda}, X)} \frac{ds}{s} \\ &\leq \|h_1\|_{L^1(\frac{dt}{t})} \sup_{s>0} \|F(\frac{s}{\lambda})x\|_{L(\mathbb{R}_+, \frac{d\lambda}{\lambda}, X)} \\ &\leq M \|h_1\|_{L^1(\frac{dt}{t})} \|x\| = M \Gamma(\alpha+1) \|x\| \quad \text{nach (b).} \end{aligned}$$

(c) \Rightarrow (d). Es sei $[x]''_\alpha < \infty$ und $u(t) := (1+tA)^{-1}x$. Dann gelten $u(0) = x$ und $u \in C([0, 1], X) \cap C((0, 1], X_1) \cap C^1((0, 1], X)$. Wegen der l -Sektorialität von A und der Gleichheit $(1+tA)^{-1} = \frac{1}{t}(\frac{1}{t}+A)^{-1}$ lassen sich die beiden Summanden in $\llbracket u \rrbracket_{\alpha, l}$ wie nachfolgend zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \llbracket u \rrbracket_{\alpha, l} &= \|t \mapsto t^{1-\alpha} A(1+tA)^{-2}x\|_{L((0, 1), \frac{dt}{t}, X)} \\ &\quad + \|t \mapsto t^{1-\alpha} A(1+tA)^{-1}x\|_{L((0, 1), \frac{dt}{t}, X)} \\ &\leq C \|t \mapsto t^{1-\alpha} A(1+tA)^{-1}x\|_{L((0, 1), \frac{dt}{t}, X)} \\ &\stackrel{\lambda = \frac{1}{t}}{=} \|\lambda \mapsto \lambda^\alpha A(\lambda+A)^{-1}x\|_{L([1, \infty), \frac{d\lambda}{\lambda}, X)} \leq [x]''_\alpha. \end{aligned}$$

Also ist $x \in (X, X_A)_{\alpha, l}$ und $\|x\|_{(X, X_A)_{\alpha, l}} \leq [x]''_{\alpha}$.

(d) \Rightarrow (a). Es sei $x \in (X, X_A)_{l, \alpha}$ und w eine Funktion, die der Bedingung (3.10.1), $w(0) = x$ und $\|w\|_{\alpha, l} < \infty$ genüge. Dann zeigt die Gleichung $x = w(t) - \int_0^t w'(s) ds$, daß

$$\begin{aligned} \|t \mapsto t^{1-\alpha} AT(t)x\|_{l((0,1), \frac{dt}{t}, X)} &\leq \|t \mapsto t^{1-\alpha} AT(t)w(t)\|_{l((0,1), \frac{dt}{t}, X)} \\ &\quad + \|t \mapsto t^{-\alpha} t AT(t) \int_0^t w'(s) ds\|_{l((0,1), \frac{dt}{t}, X)}. \end{aligned}$$

Die l -Beschränktheit von $\{T(t), tAT(t) : t > 0\}$ erlaubt nun eine Abschätzung gegen

$$\leq \text{const.} \left(\|t \mapsto t^{1-\alpha} Aw(t)\|_{l((0,1), \frac{dt}{t}, X)} + \|t \mapsto t^{-\alpha} \int_0^t w'(s) ds\|_{l((0,1), \frac{dt}{t}, X)} \right).$$

Hiervon wird der zweite Term weiter abgeschätzt:

$$\begin{aligned} &\|t \mapsto t^{-\alpha} \int_0^t w'(s) ds\|_{l((0,1), \frac{dt}{t}, X)} \\ &\stackrel{s=e^r}{\stackrel{t=e^u}{\equiv}} \|u \mapsto e^{-\alpha u} \int_{-\infty}^u w'(e^r) e^r dr\|_{l((-\infty,0], X)} \\ &= \|u \mapsto \int_{-\infty}^u w'(e^r) e^{r(1-\alpha)} e^{-\alpha(u-r)} dr\|_{l((-\infty,0], X)} \\ &\stackrel{s=u-r}{\equiv} \|u \mapsto \int_0^{\infty} w'(e^{u-s}) e^{(1-\alpha)(u-s)} e^{-\alpha s} ds\|_{l((-\infty,0], X)} \end{aligned}$$

Mit der kontinuierlichen Minkowski-Ungleichung ergibt sich nun

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^{\infty} e^{-\alpha s} \|u \mapsto w'(e^{u-s}) e^{(1-\alpha)(u-s)}\|_{l((-\infty,0], X)} ds \\ &\stackrel{t=u-s}{\equiv} \int_0^{\infty} e^{-\alpha s} \|t \mapsto w'(e^t) e^{(1-\alpha)t}\|_{l((-\infty, -s], X)} ds \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-\alpha s} \|t \mapsto w'(e^t) e^{(1-\alpha)t}\|_{l((-\infty,0], X)} ds \\ &\stackrel{e^t=s}{\equiv} \frac{1}{\alpha} \|s \mapsto s^{1-\alpha} w'(s)\|_{l[0,1], \frac{ds}{s}, X}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt (a) also aus (d), was zu zeigen war. \square

3 Quadratische Abschätzungen auf Banachräumen

Für den Fall, daß X endlichen Kotyp und A einen beschränkten H^∞ -Kalkül besitzen, können wir $\mathcal{D}_A^1(\alpha)$ mit Hilfe von Satz 3.9.6 leicht bestimmen: ist etwa $x \in \mathcal{D}(A)$, so gilt

$$\|t^{1-\alpha}AT(t)x\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} = \|t^{1-\alpha}A^{1-\alpha}T(t)A^\alpha x\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} \sim \|A^\alpha x\|_X,$$

sodaß wir wegen der Dichtheit von $\mathcal{D}(A)$ die Gleichheit $\mathcal{D}_A^1(\alpha) = \mathcal{D}(A^\alpha)$ haben. Allgemein erhalten wir in diesem Fall aus Satz 3.9.5 für Funktionen $\varphi(z) \in H_0^\infty \setminus \{0\}$ die Darstellung

$$x \in \mathcal{D}_A^1(\alpha) \Leftrightarrow \left\| t \mapsto t^\alpha \varphi(tA)x \right\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} < \infty$$

Insbesondere die Äquivalenzen (b) und (c) aus Satz 3.10.6 erkennen wir dann als Spezialfälle: die Funktion $f(z) := z^\alpha(\exp(-z) - 1)$ etwa liefert die aus (b) bekannte Darstellung via

$$f(tA)A^\alpha x = (tA)^{-\alpha}(T(t)x - x)A^\alpha x = t^{-\alpha}(T(t)x - x),$$

die Funktion $g(z) := z^{1-\alpha}(1+z)^{-1}$ dagegen liefert die aus (c) bekannte Darstellung via

$$g(tA)A^\alpha x = (\lambda^{-1}A)^{1-\alpha}(1+\lambda^{-1}A)^{-1}A^\alpha x = \lambda^\alpha A(\lambda+A)^{-1}x.$$

Die Räume $(X, X_1)_{\alpha, 1}$ erhält man aus der in [38] eingeführten allgemeinen α -Interpolationsmethode, wenn man sie auf die Interpolationsskala der Räume X_α anwendet.

SATZ 3.10.7 Wir betrachten das abstrakte Cauchyproblem $u'(t) + Au(t) = f(t)$, $u(0) = u_0$ auf einem Banachraum X . Es sei A ein dicht definierter stetig invertierbarer l -sektorieller Operator vom Typ $\omega < \pi/2$ und u sei die milde Lösung des Cauchyproblems. Dann sind äquivalent:

- (a) $u \in l(\mathbb{R}_+, X_1) \cap l(\mathbb{R}_+, X)$ und $u' \in l(\mathbb{R}_+, X)$.
- (b) $u_0 \in \mathcal{D}_A^1(1/2)$ und $f \in l(\mathbb{R}_+, X)$.

Wenn eine (beide) Bedingungen erfüllt sind, gilt weiterhin

$$\|u'\|_{l(\mathbb{R}_+, X)} + \|Au\|_{l(\mathbb{R}_+, X)} \leq \text{const.} \|f\|_{l(\mathbb{R}_+, X)}. \quad (3.10.2)$$

Beweis. Es gelte (a). Dann ist

$$\begin{aligned} & \|u' + Au\|_{l(\mathbb{R}_+, X)} \\ &= \left\| t \mapsto t^{1/2}(u'(t) + Au(t)) \right\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} \\ &\leq \left\| t \mapsto t^{1-1/2}u'(t) \right\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} + \left\| t \mapsto t^{1-1/2}Au(t) \right\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} \end{aligned}$$

beschränkt, also $u_0 \in \mathcal{D}_A^1(1/2)$ und $f \in l(\mathbb{R}_+, X)$. Wir nehmen nun an, daß (b) gilt. Dann liegen die homogene Lösung $u_h(t) = T(t)u_0$ wie ihre Ableitung $u_h'(t) = AT(t)u_0$ nach Satz 3.10.3 in $l((0, 1), X)$. Da $T(t)$ analytisch und wegen $0 \in \rho(A)$ exponentiell stabil ist, liegen u_h und u_h' sogar in $l(\mathbb{R}_+, X)$: Wie in 3.10.4 können wir $AT(t)x = T(n)AT(n-t)x$ auf dem Intervall $[n, n+1]$ schreiben und so die l -Norm auf \mathbb{R}_+ gegen diejenige auf $[0, 1]$ abschätzen. Wir können also ohne Einschränkung $u_0 = 0$ annehmen.

Ist $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+, X)$, so hat die Differentialgleichung eine eindeutige klassische Lösung u (siehe etwa [54, Cor. 4.2.5]). Nach der Youngschen Ungleichung ist $u \in L^1(\mathbb{R}_+)$; wir können also die erweiterte Fouriertransformation anwenden und erhalten

$$\widehat{u}(s) = (is + A)^{-1}\widehat{f}(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Die l -Beschränktheit der Mengen $\{\lambda(\lambda+A)^{-1} : \lambda \notin S_\nu\}$ und $\{A(\lambda+A)^{-1} : \lambda \notin S_\nu\}$ für $\nu \in (\omega, \pi/2)$ zeigt dann, daß

$$\|s\widehat{u}(s)\|_{l(\mathbb{R}, X)} + \|A\widehat{u}(s)\|_{l(\mathbb{R}, X)} \leq M\|\widehat{f}\|_{l(\mathbb{R}, X)}$$

wobei $M > 0$ nur von der l -Sektorialitätskonstante abhängt. Dann bekommen wir die gewünschte Abschätzung (3.10.2) mittels erweiterter inverser Fouriertransformation. Da $C_c^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ dicht in $l(\mathbb{R}_+, X)$ liegt, erhalten wir schließlich die in (a) geforderte Abschätzung. \square

4 Kontrolltheorie in Banachräumen Teil 2

4.1 l -Zulässigkeit

DEFINITION 4.1.1 Es sei $-A$ Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $T(\cdot)$ auf dem Banachraum X . Dann heie ein stetiger Beobachtungsoperator C von X_1 nach dem Banachraum Y l -zulässig fur A (oder $T(\cdot)$), falls es eine Zahl $M > 0$ gibt, bezuglich der fur alle $x \in X_1$ die Abschätzung

$$\|CT(\cdot)x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} \leq M\|x\|_X$$

gilt. Entsprechend heie ein stetiger Kontrolloperator B von dem Banachraum U nach X_{-1} l -zulässig, falls das Integral $\int_0^\infty T_{-1}(t)Bu(t) dt$ in X_{-1} existiert, Werte in X annimmt und fur eine Zahl $K > 0$ die Abschätzung

$$\left\| \int_0^\infty T_{-1}(t)Bu(t) dt \right\|_X \leq K\|u\|_{l(\mathbb{R}_+, U)}$$

erfullt ist.

Wie im Kapitel über die L^2 -Zulässigkeit, wollen wir auch diesen Begriff fur beschränkte analytische Halbgruppen charakterisieren. Es zeigt sich, daß unsere Beweise im klassischen L^2 -Falle so formuliert sind, daß sie sich ohne große Muhe übertragen lassen. Erstaunlicherweise stellt die im L^2 -Fall leicht nachzuweisende notwendige Bedingung der Resolventenabschätzung an C hier das Hauptproblem dar, fur das der im vorangestellten Kapitel dargestellte Fortsetzungssatz erdacht wurde.

SATZ 4.1.2 Es sei A ein dicht definierter l -sektorieller Operator vom Typ $\omega_l < \pi/2$ der dichtes Bild habe. Die von $-A$ erzeugte Halbgruppe sei mit $T(\cdot)$ bezeichnet. Es sei C ein stetiger Beobachtungsoperator von X_1 nach dem Banachraum Y und es sei $W_C := \{\lambda^{1/2}C(\lambda + A)^{-1} : \lambda > 0\}$. Dann gelten:

- (a) Notwendig für die l -Zulässigkeit von C ist die l -Beschränktheit der Menge W_C in $B(X, Y)$.
- (b) Genügt A quadratischen l -Abschätzungen so ist die l -Beschränktheit der Menge W_C in $B(X, Y)$ hinreichend für die l -Zulässigkeit von C .

Beweis. Zunächst können wir völlig analog zum Beweis von Satz 2.1.6 $CT(t)$ als $CA^{-1/2}A^{1/2}T(t)$ schreiben und mit $\varphi_0(z) = z^{1/2}e^{-z}$ dies weiter zu $CT(t) = CA^{-1/2}\varphi_0(tA)t^{-1/2}$ umformulieren. Wir wählen die bewährte Darstellung $\varphi_0 = \varphi\psi$ mit den Funktionen

$$\varphi(z) := z^\alpha(1+z)^{-1}, \quad \psi(z) := z^{1/2-\alpha}(1+z)e^{-z}$$

für ein $\alpha \in (0, 1/2)$. Wie im Beweis von Satz 2.1.6 zeigt man, daß die Operatoren $CA^{-1/2}\varphi(tA)$ für $t > 0$ stetige Fortsetzungen $K(t)$ von X nach Y haben, die durch

$$K(t)x := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(tz) z^{1/2} CR(z, A)x \frac{dz}{z}$$

gegeben sind. Nun zeigen wir die l -Beschränktheit von $\{K(t) : t > 0\}$ und nutzen dann die vorausgesetzte quadratische Abschätzung für $\psi(tA)$ aus:

Wenn wir in Lemma 2.1.7 sektoriell durch l -sektoriell ersetzen, erhalten wir die l -Beschränktheit der Menge $\{z^{1/2}CR(z, A) : z \in \Gamma\}$. Die Funktionen $\varphi_t(z) := \varphi(tz)$ liegen wegen der Invarianz von Γ sowie des Maßes $\frac{dz}{z}$ gegenüber Streckungen mit $t > 0$ gleichmäßig in $L^1(\Gamma, \frac{dz}{z})$. Nach Lemma 3.5.6 ist damit auch $\{K(t) : t > 0\}$ l -beschränkt, wie behauptet. Wir schließen damit unter Verwendung der quadratischen l -Abschätzungen für ψ für geeignete $c_1, c_2 > 0$

$$\begin{aligned} \|CT(t)x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} &= \|CA^{-1/2}\varphi(tA)\psi(tA)t^{-1/2}x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} \\ &= \|K(t)\psi(tA)x\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, Y)} \\ &\leq c_1 \|\psi(tA)x\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} \leq c_2 \|x\|. \end{aligned}$$

Umgekehrt sei C ein l -zulässiger Beobachtungsoperator für A . Dann ist

$$\lambda^{1/2}C(\lambda+A)^{-1} = \int_0^\infty \lambda^{1/2}e^{-\lambda t}CT(t)dt.$$

Die Funktionen $h_\lambda : t \mapsto \lambda^{1/2}e^{-\lambda t}$ sind in $L^2(\mathbb{R}_+)$ gleichmäßig beschränkt, sodaß die Behauptung aus Satz 3.7.10 folgt. \square

Wir geben für diesen Satz einen weiteren Beweis an, der seine Reize aus der Verwendung von Mitteln zieht (wie etwa der Fouriertransformation, bzw. deren Erweiterung auf l -Räume), die im Banachraumwertigen L^2 -Falle verwehrt bleiben. Doch zunächst ein einfaches Lemma aus [64, Appendix A] von E. STEIN:

LEMMA 4.1.3 Es sei X ein Banachraum, $1 < p < \infty$. Es sei k eine meßbare, homogene Funktion vom Grad -1 von \mathbb{R}_+^2 nach \mathbb{R} , es gelte also $k(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1}k(x, y)$ für $\lambda > 0$. Wenn $\int_0^\infty |k(1, y)|y^{-1/p} dy =: A_p$ endlich ist, so ist der Operator T auf $L^p(\mathbb{R}_+)$, gegeben durch

$$(Tf)(x) := \int_0^\infty k(x, y)f(y) dy,$$

stetig und seine Norm ist höchstens A_p .

Ein weiterer Beweis von Satz 4.1.2. Wegen des dichten Bildes ist A injektiv ([7, Theorem 3.8]). Die Menge W_C sei l -beschränkt. Wir wenden die in Bemerkung 3.4.12 (d) erklärte Erweiterung der Fouriertransformation \mathcal{F}^\otimes an und erhalten

$$\|CT(\cdot)x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} = \|\mathcal{F}^\otimes(CT(\cdot)x)\|_{l(L^2(\mathbb{R}), Y)} = \|C(i \cdot + A)^{-1}x\|_{l(\mathbb{R}, Y)}.$$

Für $\beta \in (0, 1/2)$ wollen wir die Darstellung

$$C(is+A)^{-1}x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \frac{z^{-\beta}}{is+z} CA^\beta R(z, A)x dz \quad (4.1.1)$$

auf dem dichten Teilraum $Z := \mathcal{R}(A^\alpha(I+A)^{-1})$ nachweisen. Dazu sei ein $\alpha > 0$ mit $\alpha + \beta < 1$ gewählt. Es sei also $x_0 \in X$ und $x = A^\alpha(I+A)^{-1}x_0$. Dann ist $C(is+A)^{-1}x = CA^\alpha(is+A)^{-1}(I+A)^{-1}x_0$. Nach Satz 3.9.3 ist A l -sektoriell vom Typ $\omega_l < \pi/2$. Wir wählen ein $\sigma \in (\omega_l, \pi/2)$. Dann können wir mittels des Funktionalkalküls für $s > 0$ schreiben:

$$\begin{aligned} C(is+A)^{-1}x &= C \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \frac{z^\alpha}{is+z} R(z, A)(I+A)^{-1}x_0 dz \\ &= C(I+A)^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \frac{z^\alpha}{is+z} R(z, A)x_0 dz \end{aligned}$$

Mit Lemma 1.3.5 ergibt sich

$$\begin{aligned}
 &= C(I+A)^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \frac{z^{-\beta}}{is+z} A^{\alpha+\beta} R(z, A) x_0 dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \frac{z^{-\beta}}{is+z} CA^\beta R(z, A) \underbrace{A^\alpha (I+A)^{-1} x_0}_{=x} dz. \quad (4.1.2)
 \end{aligned}$$

Damit ist der erste Abschnitt gezeigt. Als nächstes betrachten wir

$$K(z)x := \int_{\gamma_z} CA^\beta R(\lambda, A)^2 x d\lambda, \quad (4.1.3)$$

wobei γ_z der durch den Halbstrahl von z gegen Unendlich auf dem Sektorrand Γ gegebene Weg ist. Ist $x = A^{1-\beta} (I+A)^{-2} x_0$, so gilt nach Korollar 1.3.7

$$\begin{aligned}
 CA^\beta R(z, A)x &= CR(z, A)A(I+A)^{-2}x_0 \\
 &= C(I+A)^{-1} \int_{\gamma_z} R(\lambda, A)^2 A(I+A)^{-1}x_0 d\lambda \\
 &= \int_{\gamma_z} CA^\beta R(\lambda, A)^2 x d\lambda,
 \end{aligned}$$

Wegen der Abschätzung

$$\|CA^\beta R(\lambda, A)^2\| = \|\lambda^{\beta-3/2} \cdot \lambda^{1-\beta} A^\beta R(\lambda, A) \cdot \lambda^{1/2} CR(\lambda, A)\| \leq \text{const. } |\lambda|^{\beta-3/2}$$

und unter Beachtung von $\beta < 1/2$ konvergiert das Integral in (4.1.3) für alle $x \in X$. $K(z)$ ist also wegen der Dichtheit von $\mathcal{R}(A^{1-\beta}(I+A)^{-2})$ eine stetige Fortsetzung von $CA^\beta R(z, A)$ auf $B(X, Y)$. Integrieren wir nun, so folgt zudem die Abschätzung $\|K(z)\| \leq \text{const. } |z|^{\beta-1/2}$. Diese zeigt, daß die zunächst nur auf dem dichten Teilraum $Z = \mathcal{R}(A^\alpha(I+A)^{-1})$ gültige Gleichheit

$$\begin{aligned}
 &CR(is, -A)x \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \frac{1}{is+z} z^{-\beta} CA^\beta R(z, A)x dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \frac{1}{is+z} z^{-\beta} K(z)x dz
 \end{aligned}$$

auf ganz X fortgesetzt werden kann. Wir schreiben dies um als

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \frac{1}{is+z} z^{-\beta} \int_{\gamma_z} \lambda^{\beta-1} \underbrace{[\lambda^{1/2} CR(\lambda, A)]}_{=:R(\lambda)} \underbrace{[\lambda^{1/2-\beta} A^\beta R(\lambda, A)]}_{=:S(\lambda)} x d\lambda dz.$$

Wir schätzen nun in zwei Schritten ab:

a. Wenn wir die Parametrisierungen der beiden Wegintegrale einsetzen, ergibt

sich

$$\|C(is+A)^{-1}x\| \quad (4.1.4)$$

$$\leq \left\| \int_0^\infty \frac{1}{is+re^{-i\sigma}} \left\{ r^{-\beta} \int_r^\infty t^{\beta-1} R(e^{-i\sigma}t) S(e^{-i\sigma}t)x \, dt \right\} dr \right\| \quad (4.1.5)$$

$$+ \left\| \int_{-\infty}^0 \frac{1}{is+re^{i\sigma}} \left\{ r^{-\beta} \int_r^\infty t^{\beta-1} R(e^{i\sigma}t) S(e^{i\sigma}t)x \, dt \right\} dr \right\|. \quad (4.1.6)$$

Der Integrkern

$$K_1(s, r) = \frac{1}{\pm is + re^{\pm i\sigma}}$$

ist homogen vom Grad -1 , sodaß nach Lemma 4.1.3 die ersten Integrale in den beiden Zeilen (4.1.5) und (4.1.6) einen beschränkten Integraloperator \mathcal{K}_1 auf $L^2(\mathbb{R}_+)$ definieren. Das jeweilige zweite Integral wollen wir sehr ähnlich abschätzen: Der Integrkern lautet

$$K_2(r, t) = r^{-\beta} t^{\beta-1} \mathbb{1}_{[r, \infty)}(t).$$

Er ist ebenfalls homogen vom Grad -1 , und wegen $\beta \in (0, 1/2)$ definiert auch er einen beschränkten Operator \mathcal{K}_2 auf $L^2(\mathbb{R}_+)$. Mit \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 sind auch ihre Erweiterungen auf $\mathfrak{L}(\mathbb{R}_+, X)$ beschränkt. Wir schreiben dies der Übersichtlichkeit halber aus: für $u = e^{\pm i\sigma}$, $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$ und $f(t) := R(ut)S(ut)x$ gilt:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty k_i(t, s) f(t) \, dt \right) (h) &= \int_0^\infty h(s) \int_0^\infty k_i(t, s) f(t) \, dt \, ds \\ &= \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty h(s) k_i(t, s) \, ds \, dt \\ &= \int_0^\infty f(t) (\mathcal{K}'_i h)(t) \, dt \\ &= u_f (\mathcal{K}'_i h) = \mathcal{K}_i^\otimes(f). \end{aligned}$$

b. Wie im ersten Beweis erkennen wir $\{R(\lambda) : \lambda \in \Gamma_\sigma\}$ als \mathfrak{L} -beschränkt. Schließlich müssen wir noch zeigen, daß $S(\cdot)x$ sich mittels einer quadratische \mathfrak{L} -Abschätzung gegen die Norm von x abschätzen läßt; dazu sei $u := e^{\pm i\sigma}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|S(ut)x\|_{\mathfrak{L}(\mathbb{R}_+, X)} &= \left\| t \mapsto A^\beta t^{1/2-\beta} R(tu, A)x \right\|_{\mathfrak{L}(\mathbb{R}_+, X)} \\ &\leq K \left\| t \mapsto A^\beta t^{1-\beta} (t+A)^{-1}x \right\|_{\mathfrak{L}(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} \\ &\stackrel{s=1/t}{=} K \left\| (sA)^\beta (I+sA)^{-1}x \right\|_{\mathfrak{L}(\mathbb{R}_+, \frac{ds}{s}, X)}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, daß die Menge der Orthonormalsysteme auf $L^2(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t})$ invariant unter der Substitution $s = 1/t$ ist, die l -Norm sich also nicht ändert. Die beiden Teile zusammen ergeben:

$$\begin{aligned} & \|C(is+A)^{-1}x\|_{l(\mathbb{R}, Y)} \\ \leq & \|C(is+A)^{-1}x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} + \|C(-is+A)^{-1}x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} \end{aligned}$$

Wegen der Darstellung von $C(\pm is+A)^{-1}x = \mathcal{K}_1^\otimes \mathcal{K}_2^\otimes R(e^{\pm i\sigma \cdot})S(e^{\pm i\sigma \cdot})x$ gibt es nach (a) eine Zahl $M > 0$, für die gilt:

$$\leq M \|R(e^{i\sigma s})S(e^{i\sigma s})x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} + M \|R(e^{-i\sigma s})S(e^{-i\sigma s})x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)}.$$

Nach (b) ist die Menge $\{R(e^{\pm i\sigma s}) : s > 0\}$ l -beschränkt sodaß wir gegen die Norm $\|S(e^{\pm i\sigma s})x\|_{l(\mathbb{R}_+, X)}$ und die weiter gegen die Norm von x abschätzen können. Insgesamt ist C also l -zulässig. Die umgekehrte Richtung haben wir im ersten Beweis schon aufgeschrieben. \square

Wir merken auch hier an, daß für die Gültigkeit des obigen Satzes die Voraussetzung an A , quadratische l -Abschätzungen zu besitzen, notwendig ist: nach Lemma 3.9.2 ist die Menge $\{\lambda^{1/2}A^{1/2}(\lambda+A)^{-1} : \lambda > 0\}$ l -beschränkt; gilt Satz 4.1.2, so ist A also l -zulässig, und dies ist äquivalent zu quadratischen l -Abschätzungen für A .

SATZ 4.1.4 Es seien X und U Banachräume und A ein dicht definierter l -sektorieller Operator vom Typ $\omega_l < \pi/2$ mit dichtem Bild. Die von $-A$ erzeugte Halbgruppe auf X sei mit $T(\cdot)$ bezeichnet. Wir betrachten einen stetigen Kontrolloperator B von U nach X_{-1} und setzen $W_B := \{\lambda^{1/2}(\lambda+A_{-1})^{-1}B : \lambda > 0\}$. Dann gelten:

- (a) Hat U endlichen Kotyp, so impliziert die l -Zulässigkeit von B die l -Beschränktheit von W_B in $B(U, X)$.
- (b) Genügt A' einer quadratischen l -Abschätzung auf X' , so impliziert die l -Beschränktheit von W_B die l -Zulässigkeit von B .

Beweis. A ist l -sektoriell vom Typ $\omega_l < \pi/2$. Wir wählen ein $\sigma \in (\omega_l, \pi/2)$. Wieder sei $\Gamma := \partial S_\sigma$ der bekannte Sektorrand mit geeigneter Parametrisierung. Nach Lemma 2.1.11 gilt für $\alpha \in (0, 1/2)$ die Darstellung

$$T_{-1}(t)Bu(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z^{-\alpha} e^{-\lambda t} A_{-1}^\alpha (\lambda+A_{-1})^{-1} Bu(t) d\lambda.$$

Wir wählen ein x' aus $\mathcal{D}(A')$ und haben

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \int_0^\infty T_{-1}(t) B u(t) dt, x' \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \left\langle \int_0^\infty T_{-1}(t/2) \int_\Gamma \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda/2 t} (A_{-1})^\alpha (\lambda + A_{-1})^{-1} B u(t) d\lambda dt, x' \right\rangle \right| \end{aligned}$$

Mit der Funktionenfamilie $h_t(\lambda) := t^{1/2-\alpha} e^{-\lambda/2 t} \lambda^{-\alpha-1/2}$ und der Operatorfamilie $R(\lambda) := \lambda^{1/2} (\lambda + A_{-1})^{-1} B$ läßt sich dies folgendermaßen umschreiben:

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left| \left\langle \int_\Gamma h_t(\lambda) R(\lambda) d\lambda u(t), t^{\alpha-1/2} ((A_{-1})^\alpha T_{-1}(t/2))' x' \right\rangle \right| dt$$

Nun wenden wir Lemma 3.6.6 an:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{1}{2\pi} \|t \mapsto \int_\Gamma h_t(\lambda) R(\lambda) d\lambda u(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_+, X)} \\ & \quad \|t \mapsto t^{\alpha-1/2} ((A_{-1})^\alpha T_{-1}(t/2))' x'\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_+, X')}. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Wir wenden die quadratische ℓ -Abschätzung für A' nun auf die Funktion $\phi_\alpha(z) = z^\alpha e^{-z/2}$ an und erhalten

$$\leq M_\alpha \|x'\| \|t \mapsto \left(\int_\Gamma h_t(\lambda) R(\lambda) d\lambda \right) u(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_+, X)}. \tag{4.1.8}$$

Wie im Beweis von 2.1.12 bereits gesehen, ist die Funktionenfamilie $\{h_t: t > 0\}$ in $L^1(\Gamma)$ gleichmäßig beschränkt. Nach Lemma 3.5.6 bilden die Operatoren innerhalb der ℓ -Norm in Gleichung (4.1.8) also eine ℓ -beschränkte Menge, woraus mit Satz 3.5.7 die Behauptung folgt.

Es habe nun also U endlichen Kotyp und B sei ℓ -zulässig. Da

$$\lambda^{1/2} (\lambda + A_{-1})^{-1} B = \int_0^\infty \lambda^{1/2} e^{-\lambda t} \cdot T_{-1}(t) B dt$$

und die Funktionen $h_\lambda(t) := \lambda^{1/2} e^{-\lambda t}$ in $L^2(\mathbb{R}_+)$ gleichmäßig beschränkt sind, folgt die ℓ -Beschränktheit der Menge $W_B \subseteq B(U, X)$ aus Korollar 3.7.11. \square

Die Voraussetzung an A' , quadratischen ℓ -Abschätzungen zu genügen, ist auch in diesem Falle notwendig.

4.2 l -Zulässigkeit auf endlichen Zeitintervallen

DEFINITION 4.2.1 Es sei $-A$ Erzeuger der beschränkten stark stetigen Halbgruppe $T(\cdot)$. Ein Beobachtungsoperator $C \in B(X_1, Y)$ heiÙe l -zulässig auf $[0, b]$, falls für alle $x \in X_1$ die Abschätzung

$$\|CT(\cdot)x\|_{l([0,b],Y)} \leq \text{const.} \|x\|_X$$

gilt. Ein Kontrolloperator $B \in B(U, X_{-1})$ heiÙe l -zulässig auf $[0, b]$, falls für alle $u \in l([0, b], U)$ das Integral $\int_0^b T_{-1}(t)Bu(t)$ in X_{-1} existiert, Werte in X annimmt und die Abschätzung

$$\left\| \int_0^b T_{-1}(t)Bu(t) dt \right\|_X \leq \text{const.} \|u\|_{l([0,b],U)}$$

gilt.

LEMMA 4.2.2 Ist der Beobachtungsoperator C stetig von X nach Y , so ist er auf jedem endlichem Zeitintervall $[0, b]$ l -zulässig. Entsprechend gilt: Ist der Beobachtungsoperator B stetig von U nach X , so ist er auf jedem endlichen Zeitintervall $[0, b]$ l -zulässig.

Beweis. Es gilt $\left\| \frac{d}{dt}CT(t)x \right\| = \|CAT(t)x\| \leq \text{const.} \|C\| \|x\| \frac{1}{t}$. Also folgt die l -Zulässigkeit von C auf endlichen Intervallen aus Lemma 3.4.9. Für Kontrolloperatoren B und $x' \in \mathcal{D}(A')$ gilt:

$$\begin{aligned} \left\langle x', \int_0^t T_{-1}(t)Bu(t) dt \right\rangle &= \int_0^t \langle T_{-1}(t)'x', Bu(t) dt \rangle \\ &\leq \|T_{-1}(t)'x'\|_{l([0,b],X')} \|B\| \|u\|_{l([0,b],U)}. \end{aligned}$$

Der vordere Ausdruck läÙt sich nun nach demselben Argument gegen die Norm $\|x'\|$ abschätzen. □

Ähnlich zu den Ergebnissen aus Kapitel 2 kann man auch die l -Zulässigkeit auf endlichen Zeitintervallen charakterisieren.

LEMMA 4.2.3 Es sei $T(\cdot)$ eine l -beschränkte analytische Halbgruppe mit Erzeuger $-A$. Die Operatoren $B : U \rightarrow X_{-1}$ und $C : X_1 \rightarrow Y$ seien stetig und es sei $t_0 > 0$.

- (a) Der Kontrolloperator B ist genau dann auf $[0, t_0]$ l -zulässig bezüglich $T(\cdot)$, wenn B für alle $\alpha > 0$ auf ganz \mathbb{R}_+ l -zulässig für die skalierte Halbgruppe $e^{-\alpha \cdot} T(\cdot)$ ist.
- (b) Der Beobachtungsoperator C ist genau dann auf $[0, t_0]$ l -zulässig bezüglich $T(\cdot)$, wenn C für alle $\alpha > 0$ auf ganz \mathbb{R}_+ l -zulässig für die skalierte Halbgruppe $e^{-\alpha \cdot} T(\cdot)$ ist.

Insbesondere hängt die Eigenschaft, auf $[0, b]$ zulässig zu sein, nicht von $b > 0$ ab.

Beweis. (a) Ist B bezüglich der skalierten Halbgruppe l -zulässig auf \mathbb{R}_+ , so ist B auch bezüglich der skalierten Halbgruppe l -zulässig auf $[0, t_0]$. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn B bezüglich der unskalierten Halbgruppe l -zulässig ist, wie wir aus Bemerkung 3.4.12(b) (wegen $e^{-\alpha t_0} \leq e^{-\alpha t} \leq 1$ für alle $t \in [0, t_0]$) wissen. Nun sei B auf $[0, t_0]$ l -zulässig bezüglich $T(\cdot)$ und $\alpha > 0$. Wie in Lemma 2.2.2 können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $\|T(t_0)e^{-\alpha t_0}\| < 1$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_{-1}(t) B u(t) dt &= \sum_{n=0}^\infty \int_{nt_0}^{(n+1)t_0} e^{-\alpha t} T_{-1}(t) B u(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty (e^{-\alpha t_0} T(t_0))^n \int_0^{t_0} T_{-1}(t) B u(nt_0 + t) e^{-\alpha t} dt. \end{aligned}$$

Das Integral läßt sich wegen der vorausgesetzten l -Zulässigkeit auf $[0, t_0]$ gleichmäßig in $n \in \mathbb{N}_0$ gegen die l -Norm von u auf \mathbb{R}_+ abschätzen (beachte Bemerkung 3.4.12 (a)). Wegen der Abschätzung $\|hf\|_l \leq \|h\|_\infty \|f\|_l$ konvergiert die Reihe in X absolut und genügt einer Abschätzung gegen $\|u\|_{l(\mathbb{R}_+, u)}$.

(b) Ist C bezüglich der skalierten Halbgruppe l -zulässig, dann folgt die l -Zulässigkeit bezüglich $T(\cdot)$ auf $[0, t_0]$ wie oben. Es sei also C auf $[0, t_0]$ l -zulässig bezüglich $T(\cdot)$. Wieder können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\|T(t_0)e^{-\alpha t_0}\| < 1$ gilt. Es bezeichne I_n das Intervall $I_n := [nt_0, (n+1)t_0]$. Unter Verwendung der Halbgruppeneigenschaft erhalten

wir so

$$\begin{aligned}
 \|e^{-\alpha \cdot} CT(\cdot)x\|_{L^2(\mathbb{R}_+, X)} &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{I_n}(\cdot) e^{-\alpha \cdot} CT(\cdot)x \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+, X)} \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|e^{-\alpha \cdot} CT(\cdot)x\|_{L^2(I_n, X)} \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \max\{e^{-\alpha t} : t \in I_n\} \|CT(\cdot)x\|_{L^2(I_n, X)} \\
 &\stackrel{\text{Vor.}}{\leq} \text{const.} \sum_{n=0}^{\infty} \|(e^{-\alpha t_0} T(t_0))^n x\|_X \leq \text{const.} \|x\|_X. \quad \square
 \end{aligned}$$

LEMMA 4.2.4 Falls $B \in B(U, X_{-1})$ für die exponentiell stabile l -beschränkte und analytische Halbgruppe $T(\cdot)$ l -zulässig ist, so ist die Abbildung $u \mapsto \Phi_\tau u$ für jedes $T > 0$ von $l([0, T], U)$ nach $l([0, T], X)$ beschränkt.

Beweis. Es sei $I := [0, T]$ und u eine Funktion aus der Schwartzklasse $\mathcal{S}(I, U)$; wir bezeichnen ihre Nullfortsetzung auf \mathbb{R} mit u_0 . Vermöge der erweiterten Fouriertransformation gilt dann

$$\begin{aligned}
 &\left\| \tau \mapsto \int_0^\tau T_{-1}(\tau-s) B u(s) ds \right\|_{l(\mathbb{R}, X)} \leq c \|(is + A_{-1})^{-1} B \widehat{u}_0(s)\|_{l(\mathbb{R}, X)} \\
 &= c \|[I + (is + A_{-1})^{-1} - is(is + A_{-1})^{-1}](I + A_{-1})^{-1} B \widehat{u}(s)\|_{l(\mathbb{R}, X)} \quad (4.2.1)
 \end{aligned}$$

Es gilt für alle $s \neq 0$

$$(is + A_{-1})^{-1} = \int_0^\infty e^{-ist} T_{-1}(t) dt.$$

Da die Funktionen $h_s(t) := \exp(-ist)$ in $L^\infty(\mathbb{R})$ gleichmäßig beschränkt sind, ist $\{(is + A_{-1})^{-1} : s \in I\}$ nach Lemma 3.1.6 l -beschränkt. Damit bilden die in der eckigen Klammer stehenden Operatoren für $s \in I$ eine l -beschränkte Menge in $B(X)$, sodaß die Behauptung wegen $(I + A_{-1})^{-1} B \in B(U, X)$ mittels inverser Fouriertransformation folgt. Schließlich zeigt die Dichtheit von $\mathcal{S}(I, U)$ in $l(I, U)$ die gewünschte Behauptung. \square

4.3 l -Zulässigkeit vom Typ α

DEFINITION 4.3.1 Es seien U, X, Y Banachräume, $-A$ sei Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $T(\cdot)$ auf X und $\alpha > -1$.

- (a) Ein Beobachtungsoperator $C \in B(X_1, Y)$ heiÙe l -zulässig vom Typ α , falls für eine Zahl $M > 0$ und alle $x \in X_1$ gilt:

$$\left\| \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}} CT(t)x \, dt \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} \leq M \|x\|_X.$$

- (b) Entsprechend heiÙe ein Kontrolloperator $B \in B(U, X_{-1})$ l -zulässig vom Typ α , falls für alle $u \in l(\mathbb{R}_+, U)$ das Integral $\int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}} T_{-1}(t)Bu(t) \, dt$ in X_{-1} existiert, Werte in X annimmt und für eine Zahl $K > 0$ gilt:

$$\left\| \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}} T_{-1}(t)Bu(t) \, dt \right\|_X \leq K \|u\|_{l(\mathbb{R}_+, U)}.$$

SATZ 4.3.2 Es sei A ein l -sektorieller, dicht definierter Operator vom Typ $\omega < \frac{\pi}{2}$ auf dem Banachraum X , der dichtes Bild habe; die von $-A$ erzeugte Halbgruppe sei mit $T(\cdot)$ bezeichnet. Es seien Zahlen $\alpha > -1$ und $\beta \in (-1, 3)$ derart gegeben, daß $k := \frac{\alpha + \beta}{2}$ eine nichtnegative ganze Zahl sei. Wir betrachten einen stetigen Beobachtungsoperator $C : X_k \rightarrow Y$ und setzen $W_C := \{\lambda^{\frac{1+\beta}{2}} C(\lambda + A)^{-k-1}, \lambda > 0\}$. Dann gelten:

- (a) Ist C l -zulässig vom Typ α , so ist W_C in $B(X, Y)$ l -beschränkt.
 (b) Genügt A quadratischen l -Abschätzungen, und ist W_C l -beschränkt, so ist C l -zulässig vom Typ α .

Beweis. Zunächst verläuft der Beweis wie derjenige im L^2 -Fall (Satz 2.4.4). Wir schreiben $t^{\frac{\alpha}{2}} CT(t)x = t^{\frac{\alpha}{2}-k} CA^{-k} \varphi_0(tA)x$ mit $\varphi_0(z) := z^k e^{-z}$ und zerlegen φ_0 als $\varphi_0(z) = \varphi(z)\psi(z)$ mit den Funktionen

$$\varphi(z) = z^\varepsilon (1+z)^{-k} \quad \text{und} \quad \psi(z) = z^{k-\varepsilon} (1+z)^k e^{-z}.$$

Dabei lassen wir die genaue Wahl von $\varepsilon \in (0, 1)$ noch offen; wir erhalten

$$\begin{aligned} \left\| t^{\frac{\alpha}{2}} CT(t)x \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} &= \left\| t^{\frac{\alpha+1}{2}-k} CA^{-k} \varphi(tA) t^{-1/2} \psi(tA)x \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} \\ &= \left\| t^{\frac{\alpha+1}{2}-k} CA^{-k} \varphi(tA) \psi(tA)x \right\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, Y)}. \end{aligned}$$

Das Ziel ist, die quadratische l -Abschätzung für ψ auszunutzen; für die aus Lemma 2.4.3 gegebene Funktion f betrachten wir wieder

$$\begin{aligned} K(t)x &:= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{\frac{\alpha+1}{2}} f(z) CR(z, tA)^{k+1} x \, dz + \gamma t^{\frac{\alpha+1}{2}} C(1+tA)^{-k-1} x \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{\frac{1-\beta}{2}} f(z) \left[\left(\frac{z}{t} \right)^{\frac{1+\beta}{2}} CR\left(\frac{z}{t}, A\right)^{k+1} \right] \frac{dz}{z} + \gamma \left[t^{-\frac{1+\beta}{2}} C\left(\frac{1}{t} + A\right)^{-k-1} x \right]. \end{aligned}$$

Da die Menge W_C beschränkt ist, wissen wir bereits aus dem Beweis von Satz 2.4.4, daß $K(t)$ eine stetige Erweiterung von $t^{\frac{\alpha+1}{2}-k} CA^{-k} \varphi(tA)$ ist. Es gilt nun die l -Beschränktheit von $\{K(t) : t > 0\}$ nachzuweisen.

Wie in Lemma 2.1.7 können wir die l -Beschränktheit der Operatoren aus W_C auf den Integrationsweg Γ ausdehnen. Um Lemma 3.5.6 verwenden zu können wollen wir zeigen, daß die Funktion $z \mapsto z^{-\frac{1+\beta}{2}} f(z)$ in $L^1(\Gamma)$ liegt. Da $\varphi \in O(|z|^\varepsilon)$ für $z \rightarrow 0$ und $\varphi \in O(|z|^{\varepsilon-1})$ für $z \rightarrow \infty$ liegt, wissen wir aus Lemma 2.4.3, daß f mit denselben Abschätzungen gewählt werden kann. Damit liegt $z \mapsto z^{-\frac{1+\beta}{2}} f(z)$ in $L^1(\mathbb{R}_+)$, falls gleichzeitig $\frac{1+\beta}{2} - \varepsilon < 1$ und $\frac{1+\beta}{2} + (1-\varepsilon) > 1$ gelten, mit anderen Worten falls

$$\frac{\beta-1}{2} < \varepsilon < \frac{\beta+1}{2}.$$

Wegen $\beta \in (-1, 3)$ ist diese doppelte Ungleichung stets erfüllbar. Aus Lemma 3.5.6 folgt die l -Beschränktheit von $\{K(t) : t > 0\}$ und daher die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|t^{\frac{\alpha}{2}} CT(t)x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} &= \|t^{\frac{\alpha+1}{2}-k} CA^{-k} \varphi(tA) \psi(tA)x\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, Y)} \\ &= \|K(t) \psi(tA)x\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, Y)} \\ &\leq K_\beta \|\psi(tA)x\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X)} \leq MK_\beta \|x\|, \end{aligned}$$

in der, wie angekündigt, die quadratische l -Abschätzung für A benutzt wird. Es sei nun C l -zulässig. Es ist

$$\begin{aligned} \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} C(\lambda+A)^{-k-1} &= \int_0^\infty \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} \frac{(-1)^k}{k!} t^k e^{-\lambda t} CT(t)x \, dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{(-1)^k}{k!} \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} t^{\frac{\beta}{2}} e^{-\lambda t} \right) \cdot \left(t^{\frac{\alpha}{2}} CT(t)x \right) dt. \end{aligned}$$

Im Beweis zu Satz 2.4.4 wurde bereits gezeigt, daß die Funktionenfamilie $h_\lambda(t) := \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} t^{\beta/2} e^{-\lambda t}$ in L^2 gleichmäßig beschränkt ist. Daher folgt die l -Beschränktheit von W_C mit Satz 3.7.10. \square

Die geforderte quadratische l -Abschätzung an A ist dabei für die Gültigkeit des Satzes notwendig.

SATZ 4.3.3 Es sei A ein l -sektorieller, dicht definierter Operator vom Typ $\omega_l < \pi/2$ auf einem Banachraum X , der dichtes Bild habe. Die von $-A$ erzeugte Halbgruppe sei mit $T(\cdot)$ bezeichnet. Es seien U ein weiterer Banachraum, $\alpha > -1$ und $\beta \in (-1, 3)$ so, daß $k := \frac{\alpha+\beta}{2}$ eine nichtnegative ganze Zahl ist. Wir betrachten einen stetigen Kontrolloperator $B : U \rightarrow X_{-k}$, und setzen $W_B := \{\lambda^{\frac{1+\beta}{2}}(\lambda+A_{-k})^{-k-1}B, \lambda > 0\}$. Dann gelten:

- (a) Genügt A' quadratischen l -Abschätzungen auf X' , so impliziert die l -Beschränktheit von W_B die l -Zulässigkeit vom Typ α von B .
- (b) Hat U endlichen Kotyp, so impliziert die l -Zulässigkeit vom Typ α von B die l -Beschränktheit von W_B in $B(U, X)$.

Beweis. Wegen der l -Sektorialität von A können wir ohne Einschränkung $k > 0$ annehmen. Wir zeigen zunächst, daß die Beschränktheitsbedingung an W_B hinreichend ist: dabei verläuft alles in gewohnten Bahnen: wir wählen ein $\theta \in (\omega_l, \pi/2)$, und Γ sei der bekannte Integrationsweg. Als erstes wollen wir nachweisen, daß das Integral

$$\int_0^\infty t^{\alpha/2} T_{-k}(t) B u(t) dt \tag{4.3.1}$$

als Pettis-Integral in X_{-1} existiert, sodann, daß es eine stetige lineare Abbildung Φ von $l(\mathbb{R}_+, U)$ nach X definiert. Es sei $(X')_k$ der mit der Graphennorm von $(A')^k$ versehene Definitionsbereich von $(A')^k$. Wir betrachten den bereits in Satz 2.4.6 verwendeten Isomorphismus $\kappa_k : (X')_k \rightarrow (X_{-k})'$. Es sei also $x' \in (X')_k$. Dann ist

$$\int_0^\infty |\langle t^{\frac{\alpha}{2}} T_{-k}(t) B u(t), x' \rangle| dt = \int_0^\infty |\langle t^{\frac{\alpha}{2}-k} A^{-k} (tA)^k T_{-k}(t) B u(t), x' \rangle| dt.$$

Wieder zerlegen wir die Funktion $\varphi_0(z) = z^{-k} e^{-z}$ in $\varphi_0(z) = \psi(z)\varphi(z)$ mit

$$\varphi(z) = z^\varepsilon (1+z)^{-k} \quad \text{und} \quad \psi(z) = z^{k-\varepsilon} (1+z)^k e^{-z},$$

wobei die Wahl von $\varepsilon \in (0, 1)$ auf später verschoben wird. Es entsteht

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |\langle t^{\frac{\alpha}{2}} T_{-k}(t) B u(t), x' \rangle| dt \\ &= \int_0^\infty |\langle A_{-k}^{-k} \varphi(t A_{-k}) t^{\frac{\alpha}{2}-k} \psi(t A_{-k}) B u(t), x' \rangle| dt \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Satz 2.4.6 können wir wegen der Analytizität der Halbgruppe wie folgt vertauschen:

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty |\langle t^{\frac{\alpha}{2}-k} \varphi(t A_{-k}) A_{-k}^{-k} \psi(t A_{-k}) B u(t), x' \rangle| dt \\ &= \int_0^\infty |\langle t^{\frac{\alpha+1}{2}-k} A_{-k}^{-k} \psi(t A_{-k}) B u(t), t^{-1/2} \varphi(t A_{-k})' x' \rangle| dt \\ &\leq \left\| \left[t^{\frac{\alpha+1}{2}-k} A_{-k}^{-k} \psi(t A_{-k}) B \right] u(t) \right\|_{l(\mathbb{R}_+, X)} \left\| \varphi(t A_{-k})' x' \right\|_{l(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, X')}. \end{aligned}$$

Die l -Beschränktheit der Operatorfamilie $(t^{\frac{\alpha+1}{2}-k} A_{-k}^{-k} \psi(t A_{-k}) B)_{t>0}$ zeigt man völlig analog zum Beweis von Satz 4.3.2. Hierbei können wir wieder eine geeignete Wahl von ε treffen; die quadratische l -Abschätzung für φ auf X' zeigt nun, daß das Integral (4.3.1) schwach existiert, also eine stetige lineare Abbildung $\Phi : l(\mathbb{R}_+, U) \rightarrow X''$ definiert. Ist u eine Treppenfunktion, deren Träger kompakt ist und die Null meidet, so existiert das Integral (4.3.1) sogar als Bochner-Integral. Wegen der Analytizität der Halbgruppe liegt sein Wert in X . Da derartige Treppenfunktionen in $l(\mathbb{R}_+, U)$ dicht liegen (siehe die Bemerkungen nach 3.4.6), ist das Bild von Φ in X enthalten. Nach dem Graphensatz ist Φ damit auch als Abbildung von $l(\mathbb{R}_+, U)$ nach X stetig.

Es habe nun also U endlichen Kotyp und B sei l -zulässig vom Typ α . Es gilt

$$\lambda^{\frac{1+\beta}{2}} (\lambda + A_{-1})^{-k-1} B = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} t^k e^{-\lambda t} \cdot T_{-1}(t) B dt.$$

Wie bereits im Beweis von Satz 2.4.6 gesehen, sind die Funktionen $h_\lambda(t) := \lambda^{\frac{1+\beta}{2}} t^k e^{-\lambda t}$ in $L^2(\mathbb{R}_+)$ gleichmäßig beschränkt; mit folgt Korollar 3.7.11 hieraus die l -Beschränktheit der Menge $W_B \subseteq B(U, X)$. \square

Die geforderte quadratische l -Abschätzung an A' ist für die Gültigkeit des Satzes wiederum notwendig.

4.4 Beispiele l -zulässiger Operatoren

Wir wollen im Falle $X = L^p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, Beispiele für l -zulässige Kontroll- und Beobachtungsoperatoren angeben. Wir verwenden dazu eine Notation aus der Arbeit [20] von GIRARDI und WEIS: Es bezeichne $\text{Rad}(X) = l(\mathbb{N}, X)$ den Vektorraum aller Folgen $(x_j)_j$ aus X , für die die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} r_j(\cdot)x_j$ in $L^2([0, 1], X)$ konvergiert. Auf $\text{Rad}(X)$ haben wir für $q \in [1, \infty)$ nach Kahanes Ungleichung die äquivalenten Normen $\|(x_j)_j\|_{\text{Rad}_q(X)}$, die durch

$$\|(x_j)_j\|_{\text{Rad}_q(X)} := \left\| \sum_j r_j(\cdot)x_j \right\|_{L^q([0,1],X)},$$

gegeben sind.

BEMERKUNG 4.4.1 Mit dem Raum $\text{Rad}(X)$ haben wir die folgende äquivalente Formulierung von R -Beschränktheit: Eine Menge $\{T_j : j \in \mathbb{N}\} \subseteq B(X, Y)$ ist genau dann R -beschränkt wenn der zugehörige Diagonaloperator (T_j) von $\text{Rad}_p(X)$ nach $\text{Rad}_p(Y)$ beschränkt ist. In diesem Fall ist die Operatornorm von (T_j) genau die R -Schranke der Menge $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$.

Wir betrachten die Abbildung

$$I_X : L^p(\Omega, \text{Rad}_p(X)) \rightarrow \text{Rad}_p(L^p(\Omega, X)),$$

die durch $I_X f := (f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ für $f(\cdot) = (f_j(\cdot))_{j \in \mathbb{N}} \in L^p(\Omega, \text{Rad}_p(X))$ gegeben sei. Nach dem Satz von Fubini ist sie eine Isometrie. Darüber hinaus gilt für Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \text{Rad}_p(X))$

$$\mathcal{F}_n f = (\mathcal{F}_n f_j)_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_n^{-1} f = (\mathcal{F}_n^{-1} f_j)_{j \in \mathbb{N}}.$$

(siehe [20, 2.4])

Im Folgenden sei $A = \varepsilon - \Delta_n$ für ein $\varepsilon \geq 0$ und Δ_n der Laplace Operator Δ auf $X = L^p(\mathbb{R}^n)$. Es sei weiterhin $1 \leq k \leq n$, und mit (x, y) seien Variablen des \mathbb{R}^n bezeichnet, wobei $x \in \mathbb{R}^{n-k}$ und $y \in \mathbb{R}^k$ seien.

4.4.1 Beobachtungsoperatoren

Wir untersuchen Beobachtungsoperatoren C , die von $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ nach $Y = L^p(\mathbb{R}^{n-k})$ für $k < n$ bzw. $Y = \mathbb{C}$ für $k = n$ abbilden und von der Form $(C_\psi f)(x) = \langle \psi, f(x, \cdot) \rangle_k$ sind, wobei $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$ gewählt sei. Die l -Zulässigkeit solcher Operatoren läßt sich wie folgt charakterisieren:

SATZ 4.4.2 Es seien $p \in (1, \infty)$, $n > k \geq 1$, $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $Y = L^p(\mathbb{R}^{n-k})$, $A = \varepsilon - \Delta_n$ und $\varepsilon \geq 0$. Es definiert $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k) \cap H_{p'}^{-2}(\mathbb{R}^k)$ genau dann einen l -zulässigen Beobachtungsoperator C_ψ von X nach Y , wenn die Menge

$$\{ \mu \langle (\mu^2 + \varepsilon - \Delta_k)^{-1} \psi, \cdot \rangle : \mu > 0 \} \subset B(L^p(\mathbb{R}^k), \mathbb{C}) \quad (4.4.1)$$

l -beschränkt ist.

Da sowohl X als auch Y endlichen Kotyp haben, fallen die Begriffe der R -Beschränktheit (bzw. der R -Zulässigkeit) und der l -Beschränktheit (bzw. der l -Zulässigkeit) zusammen. Wir verlangen $\psi \in H_{p'}^{-2}(\mathbb{R}^k)$ um sicherzustellen, daß die Voraussetzung $C \in B(X_1, Y)$ von Satz 4.1.2 erfüllt ist.

Beweis. Es sei ein ψ fest gewählt. Wir schreiben abkürzend $C := C_\psi$. Da A einen beschränkten H^∞ -Kalkül hat (und Y endlichen Kotyp hat), ist nach Satz 4.1.2 C genau dann l -zulässig, wenn die Menge

$$\{ \sqrt{\lambda} C(\lambda + A)^{-1} : \lambda > 0 \} \subset B(L^p(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^{n-k}))$$

R -beschränkt ist. Zunächst wollen wir $T_{m_\lambda} := \sqrt{\lambda} C(\lambda + A)^{-1}$ als Fourierre-multiplikator von $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^{n-k}, L^p(\mathbb{R}^k))$ nach $L^p(\mathbb{R}^{n-k})$ erkennen. Für das operatorwertige Symbol $m_\lambda : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow B(L^p(\mathbb{R}^k), \mathbb{C})$, $\xi \mapsto m_\lambda(\xi)$ zeigen wir also $T_{m_\lambda} f = \mathcal{F}^{-1}(m_\lambda \mathcal{F}(f))$. Dazu bezeichne nun \mathcal{F}_{n-k} die Fouriertransformation auf \mathbb{R}^{n-k} und $\widehat{f}(\xi, y)$ die partielle Fouriertransformation auf \mathbb{R}^n bezüglich $x \rightarrow \xi$. Schließlich sei $A_k := \varepsilon - \Delta_k$, also der auf \mathbb{R}^k eingeschränkte Operator A . Dann ist

$$\sqrt{\lambda} C(\lambda + A)^{-1} f = \mathcal{F}_{n-k}^{-1}(\xi \mapsto \sqrt{\lambda} \langle \psi, (\lambda + |\xi|^2 - A_k)^{-1} \widehat{f}(\xi, \cdot) \rangle),$$

es gilt also in der Tat $T_{m_\lambda} f = \mathcal{F}_{n-k}^{-1}(\xi \mapsto m_\lambda(\xi) \mathcal{F}_{n-k} f(\xi))$ wobei $m_\lambda(\xi) = \sqrt{\lambda} \langle \psi, (\lambda + |\xi|^2 - A_k)^{-1} \cdot \rangle : L^p(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{C}$ für $\xi \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Es sei $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen und die Operatorfamilie $\{T_{m_{\lambda_j}} : \lambda > 0\} \subset B(X, Y)$ sei R -beschränkt. Wir betrachten das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Rad}_p(L^p(\mathbb{R}^{n-k}), L^p(\mathbb{R}^k)) & \xrightarrow{(\mathbb{T}_{m_{\lambda_j}})} & \text{Rad}_p(L^p(\mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{C})) \\
 \uparrow I_{L^p(\mathbb{R}^k)} & & \uparrow I_{\mathbb{C}} \\
 L^p(\mathbb{R}^{n-k}, \text{Rad}_p(L^p(\mathbb{R}^k))) & \xrightarrow{(\tilde{\mathbb{T}}_{m_{\lambda_j}})} & L^p(\mathbb{R}^{n-k}, \text{Rad}_p(\mathbb{C}))
 \end{array}$$

Nach Bemerkung 4.4.1 gilt für Funktionen $f = (f_j)$ aus der Schwartzklasse $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k}, \text{Rad}_p(L^p(\mathbb{R}^k)))$, daß

$$\tilde{\mathbb{T}}_{m_{\lambda_j}} f = \mathcal{F}_{n-k}^{-1}(\xi \mapsto m_{\lambda_j}(\xi) \widehat{f}(\xi, \cdot)) = (\mathcal{F}_{n-k}^{-1})[\xi \mapsto (m_{\lambda_j}(\xi))(\widehat{f}(\xi, \cdot))].$$

Also ist auch $\tilde{\mathbb{T}}_{m_{\lambda_j}}$ ein beschränkter Fouriermultiplikator. Dann aber folgt aus der notwendigen Bedingung [6, Proposition 1] aus der Arbeit von CLÉMENT und PRÜSS, daß die Menge

$$\{(m_{\lambda_j}(\xi))_j : \xi \in \mathbb{R}^{n-k}\}$$

in $B(\text{Rad}_p(L^p(\mathbb{R}^k)), \text{Rad}_p(\mathbb{C}))$ R-beschränkt sein muß.

Wir zeigen, daß dann auch die Menge der Symbole $\{m_{\lambda}(\xi) : \lambda > 0, \xi \in \mathbb{R}^m\}$ in $B(L^p(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$ R-beschränkt ist: Dazu seien Zahlen $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^{n-k}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ und Funktionen $f_1, \dots, f_n \in L^p(\mathbb{R}^k)$ gewählt. Um eine umständliche Notation zu vermeiden, setzen wir diese Elemente mit Nullelementen zu Folgen (ξ_j) , (λ_j) und (f_j) in den jeweiligen Räumen fort. Schließlich sei $f_{jk} := f_j \delta_{jk}$, wobei δ_{jk} das Kronecker Symbol bezeichne. Es folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left\| \sum_j \varepsilon_j m_{\lambda_j}(\xi_j) f_j \right\|_{\mathbb{C}}^2 &\stackrel{(*)}{=} \mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{j,k} \varepsilon_j \varepsilon'_k m_{\lambda_j}(\xi_j) f_{jk} \right\|_{\mathbb{C}}^2 \\
 &= \mathbb{E} \left\| \sum_k \varepsilon_k (m_{\lambda_j}(\xi_k)) (f_{jk})_j \right\|_{\text{Rad}_p(\mathbb{C})}^2 \\
 &\leq M \mathbb{E} \left\| \sum_k \varepsilon_k (f_{jk})_j \right\|_{\text{Rad}_p(L^p(\mathbb{R}^k))}^2 \\
 &= M \mathbb{E} \mathbb{E}' \left\| \sum_{j,k} \varepsilon_j \varepsilon'_k f_{jk} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^k)}^2 \\
 &\stackrel{(*)}{=} M \mathbb{E} \left\| \sum_j \varepsilon_j f_j \right\|_{L^p(\mathbb{R}^k)}^2,
 \end{aligned}$$

in den beiden mit (*) bezeichneten Gleichungen haben wir die folgende Aussage aus [10, Lemma 11.2] verwendet: Sind $(\chi_k)_k$ eine Folge symmetrischer

reellwertiger unabhängiger Zufallsvariablen auf Ω , $(x_k) \subseteq X$ eine Folge in X und (r'_k) eine unabhängige Folge Bernoullischer Zufallsvariablen auf Ω' und $p \in [1, \infty)$, so ist

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n \chi_k x_k \right\|^p = \mathbb{E}' \mathbb{E} \left\| \sum_{k=1}^n r'_k \chi_k x_k \right\|^p.$$

Damit ist die Notwendigkeit von Gleichung (4.4.1) gezeigt.

Für die andere Richtung benutzen wir das Ergebnis [20, Thm. 3.2] von GIRARDI und WEIS. Es besagt, daß die Menge $\{T_{m_\lambda} : \lambda > 0\}$ R -beschränkt ist, falls die Symbole $m_\lambda(\xi)$ die folgende R -Version der Voraussetzungen von Michlins Multiplikatorsatz erfüllen: Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ ist die Menge

$$\{\xi^\alpha m_\lambda^{(\alpha)}(\xi) : \xi \neq 0, \lambda > 0\}$$

R -beschränkt. Es wäre ausreichend, dies für alle $\alpha \leq (1, \dots, 1)$ nachzuweisen, aber den Aufwand reduziert dies nicht. Durch eine Induktion erkennt man die nachzuweisende R -Beschränktheit als äquivalent zu der R -Beschränktheit der Mengen

$$\{\widehat{D}^\alpha m_\lambda(\xi) : \xi \neq 0, \lambda > 0\}$$

wobei $\widehat{D}^\alpha := \widehat{D}_1^{\alpha_1} \cdots \widehat{D}_{n-k}^{\alpha_{n-k}}$ und $\widehat{D}_j := \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ seien.

Mittels einer weiteren Induktion erkennt man, daß es zu jedem Multiindex α C^∞ -Funktionen $\varphi_{\alpha, \nu} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, $\nu = 0, \dots, |\alpha|$ gibt, die positiv homogen vom Grad 2ν sind (die also $\varphi_{\alpha, \nu}(\rho\xi) = \rho^{2\nu} \varphi_{\alpha, \nu}(\xi)$ für $\xi \in \mathbb{R}^m$ und $\rho \in \mathbb{R}_+$ erfüllen), sodaß gilt:

$$\widehat{D}^\alpha m_\lambda(\xi) = \sqrt{\lambda} \sum_{\nu=0}^{|\alpha|} \varphi_{\alpha, \nu}(\xi) \langle \psi, (\lambda + |\xi|^2 - A_k)^{-(\nu+1)} \cdot \rangle.$$

Es seien $\lambda =: \sigma^2$ und $\mu^2 := \sigma^2 + |\xi|^2$ (wir wählen $\sigma, \mu > 0$). Wegen der Homogenität und der Abschätzung $\sigma \leq \mu$ genügt es, die R -Beschränktheit der Mengen

$$\{\mu^{2\nu+1} \langle (\mu^2 - A_k)^{-(\nu+1)} \psi, \cdot \rangle : \mu > 0\} \subset B(L^p(\mathbb{R}^k), \mathbb{C})$$

für $\nu \in \mathbb{N}_0$ nachzuweisen. Da aber die Menge $\{\mu^2(\mu^2 + A_k)^{-1} : \mu > 0\}$ wegen der R -Sektorialität von A_k eine R -beschränkte Teilmenge von $B(L^p(\mathbb{R}^k))$ ist, ist die R -Beschränktheit für $\nu = 1$, also die R -Beschränktheit der Menge

$$\{\mu \langle (\mu^2 + \varepsilon - \Delta_k)^{-1} \psi, \cdot \rangle : \mu > 0\}$$

bereits hinreichend, was zu zeigen war. □

Nach Bemerkung 3.5.4 sind für $p \leq 2$ beschränkte Mengen in $B(L^p(\mathbb{R}^k), \mathbb{C})$ stets l -beschränkt. Es sei außerdem $\varepsilon > 0$ vorausgesetzt. Dann ist für ein $\psi \in H_p^{-2}(\mathbb{R}^k) = X_{-1}$ die Bedingung (4.4.1) äquivalent zur Beschränktheit der Menge $\{\lambda^{1/2} A_{-1}(\lambda + A_{-1})^{-1} \psi\}$ in X_{-1} . Nach [67, 1.14.2] ist dies nun äquivalent zu $\psi \in (X_{-1}, X)_{1/2, \infty} = B_{p', \infty}^{-1}(\mathbb{R}^k)$.

BEISPIEL 4.4.3 Wir betrachten den Spezialfall $\psi = \delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, den man als Beobachtung auf einem $(n-k)$ -dimensionalen Teilraum von \mathbb{R}^n auffassen kann.

In [55, Example 3.2, S. 50] zeigt PEETRE, daß $\delta_0 \in B_{p, q}^s(\mathbb{R}^k)$ für $s \leq -k/p$ und $q = \infty$ gilt. Darüberhinaus wird gezeigt, daß dieses Ergebnis in dem Sinne optimal ist, daß es für echt größere s oder im Falle $s = -k/p$ und $q < \infty$ falsch wird. Es ist also genau dann $\delta_0 \in B_{p', \infty}^{-1}(\mathbb{R}^k)$, wenn $k \leq p'$. Da wir $p \in (1, 2]$ voraussetzen, können wir als Ergebnis festhalten, daß δ_0 für $k = 1, 2$ (für $A = \varepsilon - \Delta_n$) stets l -zulässige Beobachtungen definiert. Ist $p \in (1, \frac{n}{n-1}]$, so gilt dies für alle $k = 1, \dots, n$.

Aber auch im Falle $p > 2$ läßt sich R -Beschränktheit in $B(L^p(\Omega), \mathbb{C})$ und dual dazu in $B(\mathbb{C}, L^{p'}(\Omega))$ charakterisieren [69]:

SATZ 4.4.4 Es sei (Ω, Σ, μ) ein σ -endlicher Maßraum, $p \in (2, \infty)$ und (f_j) eine Folge von Funktionen auf $L^{p'}(\Omega)$. Es seien durch $T_j(g) := \int_{\Omega} g f_j d\mu$ Operatoren $T_j : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben, und durch $S_j : \lambda \mapsto \lambda f_j$ Operatoren $\mathbb{C} \rightarrow L^{p'}(\Omega)$ gegeben. Dann gelten:

- (a) Die Menge $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ ist genau dann l -beschränkt, wenn eine positive Funktion $w \in L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)$ mit $\|w\|_{\frac{p}{p-2}} \leq 1$ existiert, für die die Funktionen f_j in $L^2(\Omega, w^{-1} d\mu)$ gleichmäßig beschränkt sind.
- (b) Die Menge $\{S_j : j \in \mathbb{N}\}$ genau dann l -beschränkt, wenn eine positive Funktion $w \in L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)$ mit $\|w^{-1}\|_{\frac{p}{p-2}} \leq 1$ so existiert, daß die Funktionen f_j in $L^2(\Omega, w d\nu)$ gleichmäßig beschränkt sind.

Beweis. (a). Die l -Beschränktheit von $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ in $B(L^p(\Omega), \mathbb{C})$ bedeutet definitionsgemäß für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $h_1, \dots, h_n \in L^p(\Omega)$ die Abschätzung

$$\left(\mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^n g_j T_j h_j \right|^2 \right)^{1/2} \leq M \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j h_j \right\|_{L^p}^2 \right)^{1/2}$$

Nach der Chinčin–Ungleichung und der Kahane–Ungleichung ist dies äquivalent zu der Abschätzung

$$\left(\sum_{j=1}^n |T_j h_j|^2 \right)^{1/2} \leq c \left\| \left(\sum_{j=1}^n |h_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}.$$

Mit den Konstanten aus den Sätzen 3.1.1 und 3.1.4 können wir $c := MB_p K_{p,2}$ wählen. Wir setzen $1/r := 1/2 - 1/p$. Dann ist die letzte Abschätzung nach [32, Theorem VI.4.5'] äquivalent zur Existenz einer positiven Funktion $w \in L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)$ mit $\|w\|_{\frac{p}{p-2}} \leq 1$ und der Abschätzung

$$\forall j \in \mathbb{N}: \quad |T_j h| \leq c \|h\|_{L^2(\Omega, w \, d\mu)}.$$

Dies bedeutet aber nichts anderes als $f_j \in (L^2(\Omega, w \, d\mu))' = L^2(\Omega, w^{-1} \, d\mu)$ mit einer gleichmäßigen Normabschätzung gegen c .

(b). Die l -Beschränktheit von $\{T_j : j \in \mathbb{N}\}$ in $B(\mathbb{C}, L^{p'}(\Omega))$ ist wie oben äquivalent zu einer Abschätzung der Form

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^{p'}} \leq c \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{1/2},$$

und mit $1/r := 1/p' - 1/2$ ist dies nach [32, Theorem VI.4.2'] gleichbedeutend zur Existenz einer positiven Funktion $w \in L^{\frac{p'}{2-p'}}(\Omega)$ mit $\|w^{-1}\|_{\frac{p'}{2-p'}} \leq 1$ die die Abschätzung

$$\forall j \in \mathbb{N}: \quad \|S_j \lambda\|_{L^2(\Omega, w \, d\mu)} \leq c |\lambda|$$

erfüllt. Dies war zu zeigen. □

4.4.2 Kontrolloperatoren

Der adjungierte Operator C_ψ^* von C_ψ ist als die Abbildung $g \mapsto g \otimes \psi$ gegeben. Ist nämlich $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^{n-k})$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, so ist nach dem Satz von Fubini

$$\langle g, C_\psi f \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} g(x) \langle \psi, f(x, \cdot) \rangle \, dx = \langle \psi, \int g(x) f(x, \cdot) \, dx \rangle = \langle g \otimes \psi, f \rangle.$$

Wir erhalten mittels Dualisieren von Satz 4.4.2 das folgende Ergebnis:

SATZ 4.4.5 Es seien $p \in (1, \infty)$, $n > k \geq 1$, $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $U = L^p(\mathbb{R}^{n-k})$, $A = \varepsilon - \Delta_n$ und $\varepsilon \geq 0$. Dann erzeugt $\phi \in S'(\mathbb{R}^k) \cap H_p^{-2}(\mathbb{R}^k)$ genau dann einen l-zulässigen Kontrolloperator $B_\phi : g \mapsto g \otimes \phi$, wenn die Menge

$$\{ \mu(\mu^2 + \varepsilon - \Delta_k)^{-1} \phi : \mu > 0 \} \subset B(\mathbb{C}, L^p(\mathbb{R}^k)) \tag{4.4.2}$$

l-beschränkt ist.

4.5 l-Beobachtbarkeit

Betrachten wir Lösungen des Kontrollsystems (KS)

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) &= Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

für l-zulässige Kontroll- und Beobachtungsoperatoren B und C, so stellen sich etwa die folgenden Fragen: welche Werte kann die Lösung x annehmen, und kann man durch geeignete Kontrollfunktionen u einen gewünschten Zustand in vorgegebener Zeit erreichen? Welche Rückschlüsse auf die Lösung x lassen die Beobachtungen durch C zu? Dazu betrachten wir die folgenden Abbildungen: Zu $\tau > 0$ seien die *Beobachtung* und die *Steuerung* auf $[0, \tau]$ gegeben durch

$$\Psi_\tau : \begin{cases} X_1 &\rightarrow l([0, \tau], Y) \\ x &\mapsto CT(\cdot)x \end{cases} \quad \text{und} \quad \Phi_\tau : \begin{cases} l([0, \tau], U) &\rightarrow X \\ u &\mapsto \int_0^\tau T_{-1}(\tau-s)Bu(s)ds. \end{cases}$$

Dazu betrachten wir noch die entsprechenden Abbildungen $\Psi_\infty : X_1 \rightarrow l(\mathbb{R}_+, Y)$ und $\Phi_\infty : l(\mathbb{R}_+, U) \rightarrow X$, die durch $\Psi_\infty u = CT(\cdot)u$ beziehungsweise $\Phi_\infty u := \int_0^\infty T_{-1}(t)Bu(t) dt$ gegeben sind.

Die l-Zulässigkeitsabschätzung erlaubt es, die Abbildung Ψ_τ auf X fortzusetzen; wir erhalten so eine Abbildung $\Psi_\tau^+ : X \rightarrow l(L^2([0, \tau]), Y)$; entsprechendes gilt für Ψ_∞ . Ψ_τ^+ ist also abstrakt als stetige Fortsetzung gegeben; wir haben jedoch für $x \in X_1$ die Beziehung $\Psi_\tau^+ x = u_{\Psi_\tau x}$. Ist die Halbgruppe $T(\cdot)$ analytisch, so ist $\Psi_\tau^+ x$ stets durch die Funktion $CT(\cdot)x$ repräsentiert.

Desgleichen können wir Φ_τ sowohl als Abbildung von $l([0, \tau], U)$ nach X als auch, durch (stetige) Fortsetzung auf den Abschluß, als Abbildung des Operatorraums $l(L^2([0, \tau]), U)$ nach X begreifen (gleiches gilt für Φ_∞). Wir schreiben hierfür analog Φ_τ^+ bzw. Φ_∞^+ .

Bei der Frage der l -Beobachtbarkeit untersuchen wir, welche Rückschlüsse die beobachtete Lösung $y(t) = Cx(t)$ auf x zuläßt. Im Folgenden sei $-A$ Erzeuger einer stark stetigen beschränkten Halbgruppe $T(\cdot)$ auf X und $C \in B(X_1, Y)$ sei ein l -zulässiger Beobachtungsoperator.

4.5.1 Exakte l -Beobachtbarkeit

SATZ UND DEFINITION 4.5.1 Das Kontrollsystem (A, C) heiße auf $[0, \tau]$ *exakt l -beobachtbar*, falls der Anfangszustand in eindeutiger Weise und stetiger Abhängigkeit aus der Beobachtung hergeleitet werden kann, wenn also ein $\gamma > 0$ so existiert, daß für alle $x \in X_1$ gilt: $\|\Psi_\tau x\|_{l([0, \tau], Y)} \geq \gamma \|x\|_X$. Dies gilt genau dann, wenn Ψ_τ^+ injektiv ist und einen abgeschlossenen Wertebereich besitzt.

Beweis. Wenn (A, C) exakt l -beobachtbar ist, so gilt offenbar die Abschätzung $\|\Psi_\tau^+ x\|_{l(L^2([0, \tau]), Y)} \geq \gamma \|x\|_X$ für alle $x \in X$. Damit ist Ψ_τ^+ injektiv. Ist (x_n) eine Folge in X , für die $(\Psi_\tau^+ x_n)$ in $l(L^2([0, \tau]), Y)$ konvergiert, so folgt aus der exakten l -Beobachtbarkeit, daß (x_n) eine Cauchyfolge ist; sie konvergiert also gegen ein $x \in X$ und die Stetigkeit von Ψ_τ^+ impliziert die Abgeschlossenheit des Bildes in $l(L^2([0, \tau]), Y)$. Nun zur umgekehrten Richtung: als abgeschlossener Unterraum von $l(L^2([0, \tau]), Y)$ ist $\mathcal{R}(\Psi_\tau^+)$ ein Banachraum. Wir können also die Bijektion $\widehat{\Psi}_\tau^+ : X \rightarrow \mathcal{R}(\Psi_\tau^+)$ betrachten. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist diese offen, ihre Inverse also stetig. Dies zeigt, daß (A, C) exakt l -beobachtbar ist. \square

Es gilt $\|\Psi_t^+ x\|_l \geq \|\Psi_s^+ x\|_l$, falls $t \geq s$. Für $x \in X_1$ ist dies klar, und so folgt der allgemeine Fall wegen der Dichtheit von X_1 in X . Wir sehen also, der Begriff der exakten l -Beobachtbarkeit auf $[0, \tau]$ mit wachsendem τ schwächer wird.

Die Eigenschaft eines Beobachtungsoperators C , auf $[0, \tau]$ exakt l -beobachtbar zu sein, hängt nicht von Skalierungen der Halbgruppe ab, denn nach Bemerkung 3.4.12 (b) ist für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in X_1$

$$\|CT(\cdot) \exp(\lambda \cdot) x\|_l \geq \min(1, e^{\tau \operatorname{Re} \lambda}) \|CT(\cdot) x\|_l \geq \min(1, e^{\tau \operatorname{Re} \lambda}) \gamma \|x\|.$$

Wir können also ohne Einschränkung von exponentiell stabilen Halbgruppen ausgehen. In diesem Falle können wir von der exakten l -Beobachtbarkeit auf \mathbb{R}_+ stets diese auch auf einem hinreichend großen Intervall erhalten. Diese Idee wurde in [62, Proposition 2.8] für den Hilbertraumfall ausgeführt.

BEMERKUNG 4.5.2 Es sei $T(\cdot)$ eine stabile Halbgruppe und $x \in X_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|CT(\cdot)x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} &= \|\mathbb{1}_{[0, \tau]}(\cdot)CT(\cdot)x + \mathbb{1}_{[\tau, \infty)}(\cdot)CT(\cdot)x\|_{l([0, \infty), Y)} \\ &\leq \|CT(\cdot)x\|_{l([0, \tau], Y)} + \|CT(\cdot)x\|_{l([\tau, \infty), Y)}. \end{aligned}$$

Es bezeichne K die Konstante der l -Zulässigkeit von C und γ die Konstante der exakten l -Beobachtbarkeit von (A, C) auf \mathbb{R}_+ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|CT(\cdot)x\|_{l([0, \tau], Y)} &\geq \|CT(\cdot)x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} - \|CT(\cdot)x\|_{l([\tau, \infty), Y)} \\ &= \|CT(\cdot)x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} - \|CT(\cdot)T(\tau)x\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} \\ &\geq (\gamma - K\|T(\tau)\|) \|x\|. \end{aligned}$$

Die exponentielle Stabilität sichert nun, daß die Zahl in der Klammer für hinreichend großes τ positiv wird. Damit folgt exakte l -Beobachtbarkeit auf $[0, \tau]$.

SATZ 4.5.3 Ist $-A$ Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $T(\cdot)$ und ist $C \in B(X_1, Y)$ sowohl l -zulässig als auch das System (A, C) exakt l -beobachtbar, so besitzt A für jedes $\theta > \frac{\pi}{2}$ einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$ -Kalkül.

Beweis. Der Übersichtlichkeit halber identifizieren wir im folgenden erzeugende Funktionen $h \in l(\Omega, Y)$ und die erzeugten Operatoren $u_h \in l(L^2(\Omega, Y))$. Es sei $E : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ die Nullfortsetzung, also $(Ef)(t) := f(t)$ für $t \geq 0$ und Null sonst. Weiter sei P der (zu E adjungierte) Einschränkungoperator $P : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$, $Pf := f|_{\mathbb{R}_+}$. Dann gelten für die Erweiterungen die Beziehungen

$$P^\otimes : l(L^2(\mathbb{R}_+), Y) \rightarrow l(L^2(\mathbb{R}), Y) \quad \text{und} \quad E^\otimes : l(L^2(\mathbb{R}), Y) \rightarrow l(L^2(\mathbb{R}_+), Y),$$

beide mit einer Norm von höchstens eins. Es ist $E^\otimes P^\otimes = \text{Id}$. Dies zeigt, daß $l(L^2(\mathbb{R}_+), Y)$ ein komplementierter Teilraum von $l(L^2(\mathbb{R}), Y)$ ist.

Wegen der l -Zulässigkeit und der exakten l -Beobachtbarkeit ist also $\Psi_\infty^+(X)$ ein zu X isomorpher Teilraum in $l(L^2(\mathbb{R}_+), Y)$ und damit auch in $l(L^2(\mathbb{R}), Y)$. Es sei U_t die durch $(U_t u)f := u(f(\cdot - t))$ gegebene Translationsgruppe auf $l(L^2(\mathbb{R}), Y)$. Sie werde von $-B$ erzeugt. Dann gilt die Dilatationsgleichung

$$\Psi_\infty^+ T(t)x = E^\otimes U_t P^\otimes \Psi_\infty^+ x. \tag{4.5.1}$$

Grund hierfür ist, daß für $x \in X_1$ gilt $(P^\otimes \Psi_\infty^+ x)(s) = CT(s)x$ für $s \geq 0$ und $(P^\otimes \Psi_\infty x)(s) = 0$ für $s < 0$. Also folgt

$$(U_t P^\otimes \Psi_\infty x)(s) = (P^\otimes \Psi_\infty x)(s+t) = \begin{cases} CT(s)T(t)x & s \geq -t \\ 0 & s < -t. \end{cases}$$

und damit $E^\otimes U_t P^\otimes \Psi_\infty x = \Psi_\infty T(t)x$. Die Dilatationsgleichung (4.5.1) läßt sich zunächst wegen der Resolventendarstellung über die Laplace-Transformation der Halbgruppe zunächst auf die Resolventen der Erzeuger $-A$ und $-B$ fortsetzen:

$$\begin{aligned} \Psi_\infty (\lambda + A)^{-1} x &= \Psi_\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Psi_\infty T(t)x \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} E^\otimes U_t P^\otimes \Psi_\infty x \, dt = E^\otimes \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_t (P^\otimes \Psi_\infty x) \, dt \\ &= E^\otimes (\lambda + B)^{-1} P^\otimes \Psi_\infty x. \end{aligned}$$

Nach der Definition des Funktionalkalküls erhalten wir sie schließlich auch für $\psi(A)$ und $\psi(B)$ mit $\psi \in H_0^\infty$:

$$\Psi_\infty \psi(A) = E^\otimes \psi(B) P^\otimes \Psi_\infty.$$

Da B einen beschränkten $H^\infty(S_\theta)$ -Kalkül besitzt [18, Satz 6.1.3] ergibt sich hieraus

$$\|f(A)\| \leq \|\Psi_\infty^{-1}\| \|\Psi_\infty f(A)\| \leq M \|\Psi_\infty^{-1}\| \|\Psi_\infty\| \|f\|_\infty. \quad \square$$

SATZ 4.5.4 Es sei X ein Banachraum und $-A$ Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $T(\cdot)$ auf X . Y sei ein weiterer Banachraum mit der (α) -Eigenschaft und $C \in B(X_1, Y)$ ein l -zulässiger Beobachtungsoperator für das System (A, C) . Ist (A, C) auf \mathbb{R}_+ exakt l -beobachtbar, so existiert eine Zahl $m > 0$ so, daß die folgende Abschätzung gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit positivem Realteil und $x_1, \dots, x_n \in X_1$ gilt:

$$m \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j \operatorname{Re}(\lambda_j) x_j \right\|_X^2 \leq \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j (\lambda_j - A) x_j \right\|_X^2 + \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j \operatorname{Re}(\lambda_j)^{1/2} C x_j \right\|_Y^2$$

Dabei seien g_1, \dots, g_n unabhängige Gaußsche Zufallsvariablen.

Beweis. Es ist $\lambda-A$ Erzeuger der Halbgruppe $\exp(\lambda \cdot)T(\cdot)$ und daher

$$(\lambda-A) \int_0^t e^{\lambda s} T(s) x_0 \, ds = e^{\lambda t} T(t) x_0 - x_0.$$

Schreiben wir $x(t) = T(t)x_0$, so erhalten wir hieraus mit $z_\lambda := (\lambda - A)x$

$$x(t) = e^{-\lambda t} x_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} T(s) z_\lambda \, ds.$$

Wir bezeichnen mit e_s die durch $e_s(t) := \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \exp(st)$ gegebene Funktion. Dann ist $\Psi_\infty x_0 = Cx(t) = e_{-\lambda} \otimes Cx_0 + (e_{-\lambda} * CT(\cdot)z_\lambda)(t)$. Mit dieser Darstellung zeigen wir nun die Behauptung: Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit positivem Realteil sowie x_1, \dots, x_n gegeben. Indem wir die obige Darstellung für die Anfangswerte x_j und zugehörige λ_j bzw. $z_{\lambda_j} = (\lambda_j - A)x_j$ betrachten, erhalten wir für ein $m > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} m \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j \operatorname{Re}(\lambda_j) x_j \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} &\leq \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j \operatorname{Re}(\lambda_j) \Psi_\infty x_j \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} \\ &\leq \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j \operatorname{Re}(\lambda_j) e_{-\lambda_j} \otimes Cx_j \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} \\ &\quad + \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j \operatorname{Re}(\lambda_j) [e_{-\lambda_j} * CT(\cdot)z_{\lambda_j}](\cdot) \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Behauptung in zwei separaten Schritten für die beiden Summanden: Betrachten wir die Abbildung $M_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$, $M_\lambda(\alpha) = \alpha \operatorname{Re}(\lambda)^{1/2} e_{-\lambda}$, so ist für alle λ mit positivem Realteil $\|M_\lambda\| = 1$. Damit ist die Menge $\{M_{\lambda_1}, \dots, M_{\lambda_n}\}$ in $B(\mathbb{C}, L^2(\mathbb{R}_+))$ unabhängig von der Wahl der λ_n und von $n \in \mathbb{N}$ beschränkt. Nach Satz 3.7.3 und Bemerkung 3.7.5 ist also $\{M_{\lambda_1}^\otimes, \dots, M_{\lambda_n}^\otimes\}$ von $l(\mathbb{C}, Y)$ nach $l(L^2(\mathbb{R}_+), Y)$ unabhängig von der Wahl der λ_n und $n \in \mathbb{N}$ l-beschränkt. Ist $u : \alpha \mapsto \alpha y$ ein Element von $l(\mathbb{C}, Y)$, so ist

$$(M_\lambda^\otimes u)(f) = u(M'_\lambda(f)) = y \langle f, m_\lambda \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = u_{y \otimes m_\lambda} f.$$

Das zeigt nun, daß die Bilder von Operatoren aus $l(\mathbb{C}, Y)$ durch Funktionen $y \otimes m_\lambda \in l(\mathbb{R}_+, Y)$ erzeugt werden; wir können deshalb die Operatoren $\{M_{\lambda_1}^\otimes, \dots, M_{\lambda_n}^\otimes\}$ als l-beschränkt von $l(\mathbb{C}, Y)$ nach $l(\mathbb{R}_+, Y)$ auffassen und erhalten aus der Isomorphie $l(\mathbb{C}, Y) \sim Y$ die Abschätzung

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j \operatorname{Re}(\lambda_j) e_{-\lambda_j} \otimes Cx_j \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} \leq \text{const.} \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j \operatorname{Re}(\lambda_j)^{1/2} Cx_j \right\|_Y.$$

Ähnlich können wir auch den zweiten Summanden angehen: Wir betrachten die Faltungsoperatoren $S_\lambda \in B(L^2(\mathbb{R}_+))$, die durch Faltung mit der L^1 -Funktion $Re(\lambda)e_{-\lambda}$ gegeben sind. Für beliebige λ mit positivem Realteil ist nach der Young-Ungleichung $\|S_\lambda\| \leq 1$. Damit ist $\{S_{\lambda_1}, \dots, S_{\lambda_n}\}$ unabhängig von der Wahl der λ_n und $n \in \mathbb{N}$ beschränkt in $B(L^2(\mathbb{R}_+))$; damit ist nach Satz 3.7.3 auch die Menge $\{S_{\lambda_1}^\otimes, \dots, S_{\lambda_n}^\otimes\}$ unabhängig von der Wahl der λ_n und $n \in \mathbb{N}$ in $B(l(L^2(\mathbb{R}_+), Y))$ l -beschränkt. Wir erhalten

$$(S_\lambda^\otimes u_f)(g) = u_f(S'_\lambda g) = \langle f, S'_\lambda g \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \langle S_\lambda f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = u_{S_\lambda f}(g)$$

und daraus die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j [(Re(\lambda_j)e_{-\lambda_j}) * CT(\cdot)z_{\lambda_j}](\cdot) \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} &\leq c_1 \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j CT(\cdot)z_{\lambda_j} \right\|_{l(\mathbb{R}_+, Y)} \\ &\leq c_2 \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^n g_j z_{\lambda_j} \right\|_X \end{aligned}$$

unter Verwendung der l -Zulässigkeit von C . Jetzt können wir die Behauptung aus den beiden separat gezeigten Abschätzungen mit Hilfe der Kahane-Ungleichung gewinnen. \square

BEMERKUNG 4.5.5 Man beachte, daß die Abschätzung des obigen Satzes ausdrücklich auch auf dem Spektrum von A gilt. Ist $-A$ etwa Erzeuger einer l -beschränkten analytischen Halbgruppe, so ist die Abschätzung für $\lambda_j \notin \overline{S_{\omega_1}}$ immer erfüllt, da wegen der l -Sektorialität ein $m > 0$ existiert, das die Ungleichung auch ohne den dritten Term erfüllt. Damit gilt die Abschätzung unabhängig von der Wahl von C .

BEMERKUNG 4.5.6 Sind X und Y Hilberträume (oder allgemeiner vom Typ und Kotyp zwei), so erhält man aus dem obigen Satz als notwendige Voraussetzung die Existenz einer Abschätzung der Form

$$m \|Re(\lambda)x\|_X^2 \leq \|(\lambda - A)x\|_X^2 + \|Re(\lambda)^{1/2}Cx\|_Y^2 \tag{4.5.2}$$

für beliebige $x \in X$ und λ mit positivem Realteil. Dies wird in [62, Theorem 1.2] von RUSSELL und WEISS behandelt. Die Autoren stellten die (noch immer unbewiesene) Vermutung auf, diese als „Hautus Test“ bekannten Abschätzung

sei äquivalent zur exakten (l -)Beobachtbarkeit von C . Es existieren partielle positive Ergebnisse, etwa im Hilbertraumfall unter der Voraussetzung, daß $C \in B(X, Y)$ und A (!) stetig sei (siehe [62]). Eine weniger restriktive und dennoch hinreichende Zusatzvoraussetzung wird in [31] angegeben: A sei ein Diagonaloperator auf einem separablen Hilbertraum, die Eigenwerte von A besitzen positiven Realteil (also $\lim e^{-tA}x = 0$ für alle $x \in X$) und $C \in B(X_1, \mathbb{C}) = X'_1$ sei L^2 -zulässig.

Andererseits ist von JACOB und ZWART [30] gezeigt worden, daß die Abschätzung (4.5.2) für beliebige Hilberträume und der Wahl $Y = \mathbb{C}$ nicht hinreichend ist, um die exakte Beobachtbarkeit des Systems sicherzustellen. Ihr Gegenbeispiel stützt sich jedoch darauf, daß der angegebene Operator A *keinen* beschränkten H^∞ -Kalkül besitzt; dies aber haben wir oben als notwendig erkannt (man beachte, daß die oben erwähnten Diagonaloperatoren aus dem positiven Ergebnis [31] einen besonders guten Funktionalkalkül besitzen), Insbesondere ist also noch kein Gegenbeispiel bekannt, wenn man zur Abschätzung (4.5.2) die Voraussetzung eines beschränkten H^∞ -Kalküls von A hinzunimmt (siehe auch [3, Problem 30] und dortige Referenzen).

BEMERKUNG 4.5.7 Insgesamt ist der Begriff der exakten Beobachtbarkeit zu stark, um im allgemeinen unendlichdimensionalen Fall von Bedeutung zu sein: ist etwa Y ein endlichdimensionaler Raum, oder allgemeiner ein Hilbertraum, so implizieren exakte l -Beobachtbarkeit und l -Zulässigkeit, daß die Abbildung Ψ_∞ ein Isomorphismus von X auf einen Hilbertraum ist (nämlich auf einen abgeschlossenen Unterraum von $l(\mathbb{R}_+, Y) = L^2(\mathbb{R}_+, Y)$). Insbesondere muß X also Typ und Kotyp 2 haben.

Wir betrachten daher als nächstes eine schwächere Form von Beobachtbarkeit, die im Falle endlichdimensionaler Räume X, U, Y mit der exakten Beobachtbarkeit zusammenfällt, also ebenfalls als Erweiterung des klassischen Begriffs angesehen werden kann:

4.5.2 Approximative l -Beobachtbarkeit

SATZ UND DEFINITION 4.5.8 Das Kontrollsystem (A, C) heie auf $[0, \tau]$ *approximativ l -beobachtbar*, falls eine Beobachtung y den Anfangszustand eindeutig festlegt, wenn also Ψ_τ injektiv ist. Dies ist äquivalent zu: Aus $CT(\cdot)x = 0$ fast überall auf $[0, \tau]$ folgt $x = 0$.

Beweis. Ist das System approximativ l -beobachtbar und gilt $CT(\cdot)x = 0$ fast überall auf $[0, \tau]$, so ist offenbar $\Psi_\tau x = 0$ und daher $x = 0$. Es sei umgekehrt $\Psi_\tau x = 0$. Wir betrachten eine meßbare Menge $I \subseteq [0, \tau]$ mit positivem Maß und die Funktion $e(t) := |I|^{-1/2} \mathbb{1}_I(t)$. Es ist also $\|e\|_{L^2} = 1$. Nach der Definition der l -Norm folgt dann für das einelementige Orthonormalsystem $\{e\}$, daß $\|\int_I CT(s)x ds\|_Y \leq |I|^{1/2} \|\Psi_\tau x\|_l = 0$. Dies gilt für beliebige meßbare Mengen positiven Maßes, also ist $CT(\cdot)x = 0$ fast überall. Somit ist $x = 0$. \square

DEFINITION 4.5.9 Das Kontrollsystem (A, C) heiße auf \mathbb{R}_+ *approximativ l -beobachtbar*, falls Ψ_∞ injektiv ist, oder äquivalent, falls $\mathcal{N} := \bigcap_{\tau > 0} \ker \Psi_\tau = \{0\}$ gilt.

BEMERKUNG 4.5.10 Offenbar wird auch der Begriff der approximativen l -Beobachtbarkeit mit wachsendem Intervall $[0, \tau]$ oder dem Grenzfall \mathbb{R}_+ schwächer. Exponentielle Stabilität, die wir in Bemerkung 4.5.2 dazu verwenden konnten, von exakter l -Beobachtbarkeit \mathbb{R}_+ diese auch auf hinreichend großen endlichen Intervallen zu erhalten, kann bei approximativer l -Beobachtbarkeit keine Rolle spielen:

BEISPIEL 4.5.11 Wir betrachten etwa $X = L^2(\mathbb{R}_+)$, die durch $Cf := \int_0^1 f(t) dt$ gegebene Beobachtung $C : X \rightarrow Y := \mathbb{C}$ und die exponentiell stabile Halbgruppe $(T(t)f)(s) := e^{-tf}(t+s)$. Als stetiger Operator auf X ist C wegen der exponentiellen Stabilität der Halbgruppe nach Lemma 4.2.2 und 4.2.3 eine l -zulässige Beobachtung für $T(\cdot)$. Weiterhin ist das System (A, C) zwar auf \mathbb{R}_+ , aber offenbar auf keinem endlichen Intervall approximativ l -beobachtbar.

LEMMA 4.5.12 Es seien $T(\cdot)$ eine analytische Halbgruppe mit Erzeuger $-A$ und C ein für A l -zulässiger Beobachtungsoperator. Ist (A, C) für ein $\tau > 0$ auf $[0, \tau]$ approximativ l -beobachtbar, so gilt dies für alle $\tau > 0$.

Beweis. Wir verwenden die Äquivalenz aus Definition 4.5.8. Zunächst ist wegen

$$CT(t)x = C(I+A)^{-1} (I+A)T(t)x$$

die Funktion $CT(\cdot)x$ für jedes $x \in X$ auf $(0, \infty)$ analytisch. Ist sie auf einem Intervall $[0, \tau]$ identisch Null, so gilt dies folglich auf ganz \mathbb{R}_+ . Damit ist die Injektivität von Ψ_τ nicht vom gewählten Intervall abhängig. \square

4.6 l-Steuerbarkeit

Es sei im Folgenden $-A$ Erzeuger einer stark stetigen beschränkten Halbgruppe $T(\cdot)$ auf X , und B sei ein stetiger Kontrolloperator von U nach X_{-1} . Um $\Phi_\tau : \mathcal{L}([0, \tau], U) \rightarrow X$ für alle $\tau > 0$ stetig zu wissen, setzen wir B als l -zulässig voraus.

4.6.1 Exakte l-Steuerbarkeit

DEFINITION 4.6.1 Das System (A, B) heiÙe auf $[0, \tau]$ *exakt l-steuerbar*, falls jeder beliebige Zustand in der Zeit τ erreichbar ist, also falls Φ_τ^+ surjektiv ist.

Offenbar ist das System (A, B) genau dann exakt l -steuerbar, wenn $(\Phi_\tau^+)'$ injektiv ist und abgeschlossenen Wertebereich hat. Dies folgt aus dem dichten Bild von Φ_τ^+ zum einen und dem Satz vom abgeschlossenen Wertebereich (siehe etwa [73, Theorem IV.5.1]) auf der anderen Seite. Damit folgt: (A, B) ist genau dann exakt l -steuerbar, wenn ein $\gamma > 0$ so existiert, daÙ gilt $\|(\Phi_\tau^+)'x'\|_{\mathcal{L}(L^2([0, \tau], U))'} \geq \gamma \|x'\|_{X'}$. Es seien $f \in \mathcal{L}([0, \tau], U)$ und $x' \in (X_{-1})'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle u_f, (\Phi_\tau^+)'x' \rangle &= \langle \Phi_\tau^+ u_f, x' \rangle = \langle \Phi_\tau f, x' \rangle \\ &= \left\langle \int_0^\tau T_{-1}(s) B f(s) \, ds, x' \right\rangle \\ &= \int_0^\tau \langle f(s), B' T_{-1}(s)' x' \rangle \, ds. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von Lemma 3.6.6 zeigt die Dichtheit der Operatoren u_f in $\mathcal{L}(L^2([0, \tau], U))$ also $(\Phi_\tau^+)'x' = u_{B' T_{-1}(\cdot)' x'}$ für $x' \in (X_{-1})'$. Ist X ein reflexiver Raum, so ist $(X_{-1})' = [\mathcal{D}(A')]$; das System (A, B) ist also auf $[0, \tau]$ genau dann exakt l -steuerbar ist, wenn (A', B') auf $[0, \tau]$ exakt l -beobachtbar ist.

Ist $B \in B(U, X)$, so ist nach [8, Theorem 4.1.5] Φ_τ kompakt. Ist U also endlichdimensional, X aber nicht, so kann (A, B) für kein $B \in B(U, X)$ exakt l -steuerbar sein.

Analog zum endlichen Fall kann man auch exakte l -Steuerbarkeit auf \mathbb{R}_+ über die Surjektivität von Φ_∞^+ erklären. Dieser Begriff ist schwächer als exakte l -Steuerbarkeit auf endlichen Intervallen: Ist nämlich u ein Kontrollfunktion, für die $\Phi_\tau^+ u = x$ gilt, so ist für $\tilde{u}(t) := u(\tau - t) \mathbb{1}_{[0, \tau]}(t)$ offenbar $\Phi_\infty^+ \tilde{u} = x$.

4.6.2 Approximative l -Steuerbarkeit

DEFINITION 4.6.2 Das System (A, B) heie auf $[0, \tau]$ *approximativ l -steuerbar*, falls von jedem Anfangszustand $a \in X$ jeder Zustand $b \in X$ in der Zeit τ approximiert werden kann, also falls Φ_τ in X dichten Wertebereich hat.

Im Falle endlichdimensionaler Räume X, Y, U sind die Bilder von Φ_τ unabhängig vom Zeitpunkt $\tau > 0$ (siehe etwa [74, Proposition 1.1]). Die folgende Beobachtung von FATTORINI [14] erlaubt jedoch für analytische Halbgruppen eine solche Unabhängigkeit zu zeigen.

LEMMA 4.6.3 Es gilt $x' \in \mathcal{R}(\Phi_\tau)^\perp$ bezüglich der Dualität $\langle X, X' \rangle$ genau dann, wenn $B'T_{-1}(\cdot)'x' = 0$ auf $[0, \tau]$. Für analytische Halbgruppen $T(\cdot)$ hängt daher die approximative Steuerbarkeit nicht vom gewählten Intervall $[0, \tau]$ ab.

Beweis. Es sei $\langle \Phi_\tau u, x' \rangle = 0$ für alle $u \in l([0, \tau], U)$. Die Wahl $u = u_0 \otimes h$ für Funktionen $h \in L^2([0, \tau])$ und $u_0 \in U$ zeigt, daß stets

$$\int_0^\tau h(t) \langle B'T_{-1}(t)'x', u_0 \rangle_{U', U} dt = 0$$

gilt, woraus $B'T_{-1}(\cdot)'x' = 0$ auf $[0, \tau]$ folgt. Umgekehrt folgt aus $B'T_{-1}(\cdot)'x' = 0$ zunächst, daß x' alle Elemente der Form $\Phi_\tau(u \otimes h)$ annulliert. Die Dichtheit derselben und die Stetigkeit von Φ_τ zeigen dann, wie erwartet $x' \in \mathcal{R}(\Phi_\tau)^\perp$. Die Analytizität von $B'T_{-1}(\cdot)'x'$ zeigt nun wegen des Identitätssatzes die Zeitunabhängigkeit der approximativen Steuerbarkeit. \square

SATZ UND DEFINITION 4.6.4 Das System (A, B) heie auf \mathbb{R}_+ *approximativ l -steuerbar*, wenn Φ_∞ dichten Wertebereich hat. Dies gilt genau dann, wenn jeder Zustand in endlicher Zeit approximierbar ist, also falls der Erreichbarkeitsraum $\mathcal{R} := \bigcup_{\tau > 0} \mathcal{R}(\Phi_\tau)$ dicht in X liegt.

Beweis. \mathcal{R} sei dicht in X . Zu einem fest gewählten $\alpha > \omega_\infty(T(t))$ existiert ein $t_0 > 0$ so, daß für alle $\tau > t_0$ gilt: $\|T(\tau)e^{-\alpha\tau}\| \leq 1/2$. Also ist $F_\tau := (I - T(\tau)e^{-\alpha\tau})^{-1}$ für alle $\tau \geq t_0$ ein Isomorphismus in $B(X)$. Ist ein solches τ fixiert

und $t = n\tau + s$ mit $s \in [0, \tau], n \in \mathbb{N}_0$, so sei die Funktion u_τ definiert als $u_\tau(t) = u_\tau(n\tau + s) := u(\tau - s)e^{-a\tau n}$. Es ist also

$$\begin{aligned} \Phi_\infty u_\tau &= \int_0^\infty T_{-1}(t)Bu_\tau(s)ds = \sum_{n=0}^\infty \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} T_{-1}(t)Bu_\tau(s)ds \\ &= \sum_{n=0}^\infty (T(\tau))^n \int_0^\tau T_{-1}(t)Bu(\tau - s)e^{-a\tau n}ds \\ &= \sum_{n=0}^\infty (T(\tau)e^{-a\tau})^n \Phi_\tau u = F_\tau \Phi_\tau u. \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß Φ_∞ dichten Wertebereich hat. Dazu sei $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$ gewählt. Da $F_\tau x$ mit wachsendem τ gegen x konvergiert existiert ein $s > t_0$ so, daß $\|F_t x - x\| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $\|F_t\| \leq 2$ für alle $t \geq s$ gelten. Da \mathcal{R} dicht ist, gibt es ein $\tau_0 > 0$ und ein $u \in l([0, \tau], U)$ so, daß $\|x - \Phi_{\tau_0} u\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Es sei τ das Maximum von s und τ_0 . Da die Wertebereiche der Abbildungen Φ_τ mit wachsendem τ (bezüglich der Inklusionshalbordnung) wachsen, können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, daß $\tau = \tau_0$ gilt. Dann ist

$$\|\Phi_\infty u_\tau - x\| = \|F_\tau \Phi_\tau u - x\| \leq \|F_\tau \Phi_\tau u - F_\tau x\| + \|F_\tau x - x\| \leq \varepsilon,$$

woraus die eine Richtung folgt.

Umgekehrt nehmen wir an, \mathcal{R} sei nicht dicht in X . Dann existieren $x \in X, \varepsilon > 0$ derart, daß für alle $\tau > 0 : \text{dist}(\mathcal{R}(\Phi_\tau), x) > \varepsilon$. Es sei $S^\tau : l([0, \tau], U) \rightarrow X$ durch $S^\tau u := \int_0^\tau T(s)Bu(s)ds$ gegeben. Offenbar ist $\mathcal{R}(\Phi_\tau) = \mathcal{R}(S^\tau)$, sodaß für alle $\tau > 0$ gilt: $\text{dist}(\mathcal{R}(S^\tau), x) > \varepsilon$ und daher $\text{dist}(\mathcal{R}(\Phi_\infty), x) \geq \varepsilon$. Dann aber hat Φ_∞ keinen dichten Wertebereich. \square

4.7 Input-Output Regularität

Betrachten wir das Kontrollsystem

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) &= Bu(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

so stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen an A, B, C Kontrollfunktionen u aus $L^p(\mathbb{R}_+, U)$ eine beobachtete Lösung $y(t) = CT(t)x_0 + (CT(\cdot)B * u)(t)$

$u)(t)$ in $L^p(\mathbb{R}_+, Y)$ nach sich ziehen. Da der erste Summand bereits in der Diskussion der L^p -Zulässigkeit in Abschnitt 2.3 behandelt wurde, können wir $x_0 = 0$ annehmen.

Ist $-A$ Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf X , so ist die Input-Output Funktion \mathbb{F}_∞ durch $\mathbb{F}_\infty(u) := CT(\cdot)B * u$ gegeben. Wir möchten diese als Fouriermultiplikator auffassen (dies wurde in [33, Sect. 4] für den Spezialfall $B \in B(X, Y)$ und $B \in B(U, X)$ bereits untersucht). Es liege also die imaginäre Achse mit möglicher Ausnahme des Nullpunktes in der Resolventenmenge von A . Wir betrachten das Symbol $\xi \mapsto C(i\xi + A_{-1})^{-1}B$: falls das Bild von B und der Definitionsbereich von C insoweit zusammenpassen, daß für jedes $\xi \neq 0$ der Operator $C(i\xi + A_{-1})^{-1}B$ stetig von U nach Y abbildet, nennen wir die Input-Output Abbildung L^p -regulär, falls \mathbb{F}_∞ stetig von $L^p(\mathbb{R}_+, U)$ nach $L^p(\mathbb{R}_+, Y)$ abbildet.

Notwendig für die L^p -Beschränktheit von \mathbb{F}_∞ ist nach [6, Proposition 1] die R -Beschränktheit des Symbols auf seinen Lebesgue-Punkten, also die R -Beschränktheit der Menge

$$\{C(i\xi + A_{-1})^{-1}B : \xi \neq 0\} \quad \text{in } B(U, Y). \quad (4.7.1)$$

Sind U und Y UMD-Räume, so besagt der Satz [68, Theorem 3.4], daß die zusätzliche Forderung der R -Beschränktheit der Operatoren

$$\left\{ \xi \frac{d}{d\xi} C(i\xi + A_{-1})^{-1}B : \xi \neq 0 \right\}$$

hinreichend ist, um die L^p -Beschränktheit von \mathbb{F}_∞ sicherzustellen. Nun ist

$$\xi \frac{d}{d\xi} C(i\xi + A_{-1})^{-1}B = -i\xi^{1/2}CR(i\xi, -A) \cdot \xi^{1/2}R(i\xi, -A_{-1})B,$$

woraus unmittelbar folgt:

SATZ 4.7.1 Es sei $-A$ Erzeuger einer R -beschränkten analytischen Halbgruppe auf X , die Räume U, Y haben die UMD-Eigenschaft und die Beobachtungs- und Kontrolloperatoren B und C seien R -zulässig. Dann ist die Input-Output Abbildung \mathbb{F}_∞ genau dann L^p -regulär, wenn die Menge (4.7.1) in $B(U, Y)$ R -beschränkt ist.

Nun können wir auch l -Regularität der Input-Output Abbildung betrachten. Diese sei gegeben, wenn der Faltungsoperator \mathbb{F}_∞ stetig von $l(\mathbb{R}_+, U)$ nach $l(\mathbb{R}_+, Y)$ abbildet. Wir fassen \mathbb{F}_∞ wieder als Fouriermultiplikator auf und erhalten mit [37, Cor. 4.12] die Äquivalenz zur l -Beschränktheit der Menge in (4.7.1). Die im L^p -Falle notwendige Bedingung ist wegen Bemerkung 3.5.2 im l -Fall also notwendig und hinreichend und zwar ohne weitere Bedingung an die Räume U, X, Y .

Wir können nun die l - und L^p -Regularität unter gewissen Voraussetzungen miteinander vergleichen: Sind U und Y UMD-Räume, so haben sie notwendigerweise bereits nichttrivialen Typ und endlichen Kotyp (siehe [21, Lecture II, Kap. 3]). Es fallen demzufolge in UMD-Räumen die Begriffe von R -Beschränktheit und l -Beschränktheit zusammen. Wir erhalten sofort

KOROLLAR 4.7.2 Es sei X ein Banachraum endlichen Kotyps und U, Y UMD-Räume. Auf X sei eine l -beschränkte analytische Halbgruppe $T(\cdot)$ mit Erzeuger $-A$ gegeben. Sind $B \in B(U, X_{-1})$ und $C \in B(X_1, Y)$ l -zulässige Kontroll- bzw. Beobachtungsoperatoren für A , so sind äquivalent:

- (a) Die Input-Output Abbildung \mathbb{F}_∞ ist L^p -regulär.
- (b) Die Input-Output Abbildung \mathbb{F}_∞ ist l -regulär.
- (c) Die Menge in (4.7.1) ist l -beschränkt.

4.8 Quasilineare Systeme

Es sei X ein Banachraum gegeben und $Q \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Außerdem seien zwei weitere Banachräume Z, W derart gegeben, daß $Z \subseteq X \subseteq W$ mit stetigen Einbettungen gilt. Es seien zwei operatorwertige Funktionen $A : Q \rightarrow B(Z, W)$ und $B : Q \rightarrow B(U, W)$ gegeben. Weiter seien die Banachräume Y, U gegeben und $C \in B(Z, Y)$ sowie $F \in B(Y, U)$. Wir betrachten das Kontrollproblem

$$\begin{cases} x'(t) + A(x(t))x(t) & = B(x(t))u(t) \\ y(0) & = x_0, \quad x_0 \in Q \\ y(t) & = Cx(t), \end{cases}$$

und untersuchen die Lösbarkeit des durch $u(t) = Fy(t)$ rückgekoppelten Systems

$$\begin{cases} x'(t) + A(x(t))x(t) &= B(x(t))FCx(t) \\ x(0) &= x_0, \quad x_0 \in Q. \end{cases} \quad (\text{QP})$$

4.8.1 Der L^p -Fall

Als *Strikte Lösung* des Problems (QP) auf $[0, T_0]$ bezeichnen wir eine Funktion $x \in W^{1,p}([0, T_0], W) \cap L^p([0, T_0], Z) \cap C([0, T_0], X)$, die (QP) im Sinne der Gleichheit auf $L^p([0, T_0], W)$, also fast überall, erfüllt.

Es seien zwei operatorwertige Funktionen

$$A \in \text{Lip}(Q, B(Z, W)) \quad \text{und} \quad B \in \text{Lip}(Q, B(U, W)) \quad (\text{H0})$$

gegeben, und es sei $A_0 := A(x_0) - B(x_0)FC$. Wir betrachten A_0 als linearen Operator in W und verlangen, daß $-A_0$ eine analytische Halbgruppe auf W erzeugt und $Z = \mathcal{D}(A_0)$ mit einer zur Graphennorm von A_0 in W äquivalenten Norm gilt. Wir nehmen an, der Teil $A_X := A_0|_X$ von A in X sei Erzeuger einer analytischen Halbgruppe $T_X(\cdot)$ auf X . Bezüglich A_X können wir dann die Räume X_1 und X_{-1} betrachten, und erhalten $X_1 \subseteq Z$ sowie $W \subseteq X_{-1}$.

Für die Lösungen y des inhomogenen Cauchyproblems $y'(t) + A_0y(t) = f(t)$, $y(0) = 0$ auf W , also für $y(t) := \int_0^t T(t-s)f(s) ds$ fordern wir die Abschätzungen

$$\|y\|_{L^p([0,T],Z)} \leq c_1 \|f\|_{L^p([0,T],W)} \quad (\text{H1})$$

$$\|y\|_{C([0,T],X)} \leq c_2 \|f\|_{L^p([0,T],W)} \quad (\text{H2})$$

mit Konstanten $c_1, c_2 > 0$, die nicht von f abhängen. Wegen $Z = [\mathcal{D}(A_0)]_W$ erhalten wir aus (H1) die Abschätzung $\|A_0y\|_{L^p([0,T],W)} \leq c_1 \|f\|_{L^p([0,T],W)}$, sodaß wir die Abschätzung $\|y'\|_{L^p([0,T],W)} \leq 2c_1 \|f\|_{L^p([0,T],W)}$ bekommen.

Schließlich gelte für die Lösung des homogenen Problems $y'(t) + A_0y(t) = 0$, $y(0) = x_0$ die Abschätzung

$$\|y\|_{L^p([0,T],Z)} \leq c_3 \|x_0\|_X \quad (\text{H3})$$

für ein (von x_0 unabhängiges) $c_3 > 0$. Dann können wir den folgenden Satz zeigen, der sich in der Beweisführung stark an der Arbeit [5] von Clément und Li orientiert:

SATZ 4.8.1 Es sei $-A_0 = B(x_0)FC - A(x_0)$ Erzeuger einer analytischen Halbgruppe $T(\cdot)$ auf W und $\mathcal{D}(A_0) = Z$. Für ein $T > 0$ gelten die Voraussetzungen (H0)–(H3). Dann existiert ein $T_0 \in (0, T]$ so, daß das quasilineare Kontrollproblem (QP) auf $[0, T_0)$ eine eindeutige strikte Lösung besitzt.

Beweis. Es sei w die Lösung von $w'(t) + A_0w(t) = 0$, $w(0) = x_0$, also $w(t) = T(t)x_0 = T_x(t)x_0$. Damit ist $w \in C([0, T], X)$ klar. Wir setzen $\Sigma := C([0, T], X) \cap L^p([0, T], Z) \cap W^{1,p}([0, T], W)$ und versehen Σ mit der Maximumsnorm der drei Raumnormen. Wir betrachten für $T, \rho > 0$ die Teilräume

$$\Sigma_{\rho, T} := \{x \in \Sigma : x(0) = x_0 \text{ und } \|x - w\|_{\Sigma} \leq \rho\}.$$

Wegen $w \in C([0, T], X)$ können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\{x(t) : x \in \Sigma_{\rho, T}, t \in [0, T]\} \subseteq Q$ gilt. Beachtet man dazu noch die Voraussetzung (H3), so folgt für alle $\rho, T > 0$: $w \in \Sigma_{\rho, T}$. Für $x \in \Sigma_{\rho, T}$ bezeichne Γx die milde Lösung des inhomogenen Cauchyproblems

$$\begin{cases} z'(t) + A_0z(t) &= (A(x_0) - A(x(t)))x(t) + (B(x(t)) - B(x_0))FCx(t) \\ z(0) &= x_0 \end{cases} \quad (*)$$

Ist $x \in \Sigma$, so ist die rechte Seite von (*) wegen der Stetigkeitsvoraussetzungen $A(\cdot) \in B(Z, W)$, $B(\cdot) \in B(U, W)$ und $FC \in B(Z, U)$ ebenfalls in $L^p([0, T], W)$. Aus den Voraussetzungen (H1) und (H3) erhalten wir für milde Lösung z von (*): $z \in L^p([0, T], Z)$ und daher $A_0z \in L^p([0, T], W)$. Dann muß aber auch $z' \in L^p([0, T], W)$ liegen, wir haben also $z \in W^{1,p}([0, T], W) \cap L^p([0, T], Z)$. Aus (H2) und $w \in C([0, T], X)$ schließlich folgt $z \in C([0, T], X)$ und damit $\Gamma x \in \Sigma$. Γx ist also eine strikte Lösung von (*). Konstruktionsgemäß ist x genau dann eine Lösung des betrachteten Problems (QP), wenn $\Gamma x = x$ gilt. Wir wollen auf Γ den Banachschen Fixpunktsatz anwenden.

Zunächst ist zu zeigen, daß Γ für ein geeignetes $T_1 \in (0, T]$ und $\rho_1 > 0$ für alle $\rho_0 \in (0, \rho_1)$ und alle $T_0 \in (0, T_1)$ eine Selbstabbildung von Σ_{ρ_0, T_0} in sich ist. Dazu betrachten wir $\Gamma x - w$: Es löst die Gleichung (*) mit Anfangswert $x_0 = 0$,

sodaß wir mit (H1) und (H2) schließen können:

$$\begin{aligned} \|\Gamma x - w\|_{L^p([0,T],Z)} &\leq c_1 \left(\|(A(x_0) - A(x))x\|_{L^p([0,T],W)} \right. \\ &\quad \left. + \|(B(x) - B(x_0))FCx\|_{L^p([0,T],W)} \right), \\ \|\Gamma x - w\|_{C([0,T],X)} &\leq c_2 \left(\|(A(x_0) - A(x))x\|_{L^p([0,T],W)} \right. \\ &\quad \left. + \|(B(x) - B(x_0))FCx\|_{L^p([0,T],W)} \right) \quad \text{sowie} \\ \|\Gamma x - w\|_{W^{1,p}([0,T],W)} &\leq 3c_1 \left(\|(A(x_0) - A(x))x\|_{L^p([0,T],W)} \right. \\ &\quad \left. + \|(B(x) - B(x_0))FCx\|_{L^p([0,T],W)} \right). \end{aligned}$$

Wir schätzen die rechten Seiten ab: zunächst ist wegen der Lipschitzstetigkeit von $A(\cdot)$

$$\begin{aligned} &\|(A(x_0) - A(x))x\|_{L^p([0,T],W)} \\ &\leq \|A(x_0) - A(x)\|_{L^\infty([0,T],B(Z,W))} \|x\|_{L^p([0,T],Z)} \\ &\leq L \|x_0 - x\|_{L^\infty([0,T],X)} \|x\|_{L^p([0,T],Z)}, \end{aligned}$$

ebenso ist

$$\begin{aligned} &\|(B(x) - B(x_0))FCx\|_{L^p([0,T],W)} \\ &\leq \|B(x) - B(x_0)\|_{L^\infty([0,T],B(U,W))} \|FCx\|_{L^p([0,T],U)} \\ &\leq L \|x_0 - x\|_{L^\infty([0,T],X)} \|FC\|_{B(Z,U)} \|x\|_{L^p([0,T],Z)}. \end{aligned}$$

Wir haben also $\|\Gamma x - w\|_\Sigma \leq \text{const.} \|x_0 - x\|_{L^\infty([0,T],X)} \|x\|_{L^p([0,T],Z)}$. Nun ist zum einen

$$\|x_0 - x\|_{L^\infty([0,T],X)} \leq \|x_0 - w\|_{L^\infty([0,T],X)} + \|w - x\|_{L^\infty([0,T],X)},$$

und für $x \in \Sigma_{\rho,T}$ wird der erste Ausdruck wegen der Stetigkeit von w klein, wenn nur T klein wird, der zweite ist durch ρ nach oben beschränkt. Des weiteren ist wegen (H3)

$$\|x\|_{L^p([0,T],Z)} \leq \|x - w\|_{L^p([0,T],Z)} + \|w\|_{L^p([0,T],Z)} \leq \rho + c_3 \|x_0\|_X$$

Insgesamt ist $\|\Gamma x - w\|_\Sigma \leq \text{const.} (\|x_0 - w\|_{L^\infty([0,T],X)} + \rho)(c_3 \|x_0\|_X + \rho)$, wir sehen also, daß Zahlen $\rho_1 > 0, T_1 \in (0, T]$ so existieren, daß für beliebige $\rho_0 \in (0, \rho_1)$ und $T_0 \in (0, T_1)$ die Menge Σ_{ρ_0, T_0} von Γ in sich abgebildet wird.

Nun gilt es zu zeigen, daß Γ für hinreichend kleine derartige ρ_0, T_0 eine Kontraktion auf Σ_{ρ_0, T_0} ist. Dazu seien $x, y \in \Sigma_{\rho, T}$. Dann gilt für $z := \Gamma x - \Gamma y$ als

Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} z'(t) + A_0 z(t) &= A(x_0)(x - y) + A(y)y - A(x)x + \\ & B(x_0)FC(y - x) + B(x)FC x - B(y)FC y \\ z(0) &= 0. \end{cases}$$

nach (H1) und (H2) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Gamma x - \Gamma y\|_{\Sigma} \leq & (3c_1 + c_2) \left(\| [A(x_0) - A(x)](x - y) \|_{L^P([0, T], W)} + \right. \\ & \| [A(y) - A(x)](y - w) \|_{L^P([0, T], W)} + \\ & \| [A(y) - A(x)](w - x) \|_{L^P([0, T], W)} + \\ & \| [A(y) - A(x)]x \|_{L^P([0, T], W)} + \\ & \| [B(x_0) - B(x)]FC(y - x) \|_{L^P([0, T], W)} + \\ & \| [B(y) - B(x)]FC(w - y) \|_{L^P([0, T], W)} + \\ & \| [B(y) - B(x)]FC(x - w) \|_{L^P([0, T], W)} + \\ & \left. \| [B(x) - B(y)]FC x \|_{L^P([0, T], W)} \right) \end{aligned}$$

Wegen der Lipschitzstetigkeit von $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ gilt nun

$$\begin{aligned} \|\Gamma x - \Gamma y\|_{\Sigma} \leq & (3c_1 + c_2)L(1 + \|FC\|) \left(\|x_0 - x\|_{L^\infty([0, T], X)} \|x - y\|_{L^P([0, T], Z)} \right. \\ & \left. + 2\rho \|x - y\|_{L^\infty([0, T], X)} + \|x - y\|_{L^\infty([0, T], X)} \|x\|_{L^P([0, T], Z)} \right). \end{aligned}$$

Aus der Abschätzung zum Nachweis der Selbstabbildungseigenschaft wissen wir bereits, daß $\|x_0 - x\|_{L^\infty([0, T], X)}$ für hinreichend kleine T unabhängig von x beliebig klein gemacht werden kann und $\|x\|_{L^P([0, T], Z)}$ wegen (H3) beschränkt ist. Außerdem ist

$$\|x - y\|_{L^P([0, T], Z)} \leq \|x - w\|_{L^P([0, T], Z)} + \|w - y\|_{L^P([0, T], Z)} \leq 2\rho,$$

und schließlich ist auch

$$\|x - y\|_{L^\infty([0, T], X)} \leq \|x - x_0\|_{L^\infty([0, T], X)} + \|x_0 - y\|_{L^\infty([0, T], X)}$$

beliebig klein zu bekommen.

Insgesamt ist also durch geeignete Wahl von $\rho_0 \in (0, \rho_1]$ und $T_0 \in (0, T_1]$ damit die Kontraktionseigenschaft von Γ auf Σ_{ρ_0, T_0} gezeigt. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert also auf $[0, T_0)$ eine eindeutige Lösung von (QP). \square

Diskussion der Voraussetzungen (H1)–(H3): Wie oben bereits ausgeführt impliziert die Bedingung (H1) die Abschätzungen

$$\|A_0 y\|_{L^p([0,T],W)} \leq c_1 \|f\|_{L^p([0,T],W)} \quad \text{und} \quad \|y'\|_{L^p([0,T],W)} \leq 2c_1 \|f\|_{L^p([0,T],W)},$$

mit anderen Worten, (H1) ist die Forderung nach maximaler L^p -Regularität auf $[0, T]$ für A_0 . Es sei ω_∞ die Wachstumsschranke von $T(\cdot)$ und ω der Sektorialitätswinkel von A_0 . Dann ist nach [6, Proposition 1] für jedes $\alpha > \omega_\infty$ und $\theta \in (\omega, \pi)$ die R -Beschränktheit $\{(is + \alpha + A_0)^{-1} : s \notin S_\theta\}$ in $B(W, Z)$ notwendig; ist darüberhinaus X ein UMD-Raum, so ist dies wegen $Z = [\mathcal{D}(A_0)]$ nach [68, Theorem 4.2] für (H1) bereits hinreichend.

Die Voraussetzung (H2) können wir so interpretieren, daß die Identität Id_W ein L^p -zulässiger Kontrolloperator für A_0 auf endlichen Zeitintervallen beziehungsweise ein L^p -zulässiger Kontrolloperator auf \mathbb{R}_+ für $A_0 + \varepsilon$ bei hinreichend großem ε ist. Dies ist äquivalent dazu, daß für jeden Banachraum U jedes $B \in B(U, W)$ für $A_0 + \varepsilon$ L^p -zulässig ist. Notwendig hierfür ist nach Abschnitt 2.3 mit $1/p + 1/q = 1$ die Beschränktheit der Menge $\{\lambda^{1/q}(\lambda + \varepsilon + A_0)^{-1} B : \lambda > 0\}$. Wegen

$$\begin{aligned} & (X, \dot{X}_{-1, A_0 + \varepsilon})_{1/p, \infty} \\ &= \left\{ x \in X_{-1} : \sup_{\lambda > 0} \|\lambda^{1-1/p}(\varepsilon + A_0)(\lambda + \varepsilon + A_0)^{-1} x\|_{X_{-1}} < \infty \right\} \\ &= \left\{ x \in X_{-1} : \sup_{\lambda > 0} \|\lambda^{1/q}(\lambda + \varepsilon + A_0)^{-1} x\|_X < \infty \right\} \end{aligned}$$

führt dies auf die notwendige Bedingung

$$W \hookrightarrow (X, \dot{X}_{-1, A_0 + \varepsilon})_{1/p, \infty} = (X, X_{-1, A_0})_{1/p, \infty}. \quad (\text{H2}')$$

Genügt A_0 einer L^p -Abschätzung gemäß (2.3.1), so ist sie auch hinreichend für (H2).

Schließlich läßt sich die Voraussetzung (H3) so interpretieren, daß die Identität $\text{Id}_Z : Z \subseteq W \rightarrow Z$ ein L^p -zulässiger Beobachtungsoperator für $A_0 + \varepsilon$ auf \mathbb{R}_+ für hinreichend große ε ist, oder äquivalent, daß für beliebige Banachräume Y jedes $C \in B(Z, Y)$ ebenfalls L^p -zulässig für $A_0 + \varepsilon$ ist; wie oben ist hierfür die Beschränktheit der Menge $\{\lambda^{1-1/p} C(\lambda + \varepsilon + A_0)^{-1} : \lambda > 0\}$ notwendig. Nach Satz 2.5.6 ist also die folgende Einbettung notwendig für die Gültigkeit von (H3):

$$(X, \dot{X}_{1, A_0 + \varepsilon})_{1/p, 1} = (X, X_{1, A_0})_{1/p, 1} \hookrightarrow Z, \quad (\text{H3}')$$

die im Falle von L^q -Abschätzungen für A'_0 auf X' auch hinreichend ist.

Wenn wir den Beweis von Satz 4.8.1 nochmals betrachten, so fällt auf, daß wir den Raum $W^{1,p}$ eigentlich nur benutzt haben, um einen geeigneten Lösungsbegriff des quasilinearen Kontrollproblems (QP) zu erhalten. Ist $A(x) \equiv A$ dagegen konstant, so erhalten wir ein *semilineares Problem*, nämlich

$$\begin{cases} x'(t) + Ax(t) &= B(x(t))FCx(t) \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (\text{SP})$$

Als *milde Lösung* bezeichnen wir eine Funktion $x \in C([0, T], X) \cap L^p([0, T], Z)$, die der Integralgleichung

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)B(x(s))FCx(s) ds$$

genügt. Dann können wir durch Modifikation des Beweises von Satz 4.8.1 das folgende Ergebnis erhalten:

SATZ 4.8.2 Es sei $A(x) \equiv A$, $B(\cdot) \in \text{Lip}(Q, B(U, W))$ und es sei $-A_0 := B(x_0)FC - A$ Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $T(\cdot)$ auf W . Die Einschränkung $T|_X$ auf X sei ebenfalls stark stetig mit Erzeuger $-A_X$ und es sei $T > 0$. Unter den Voraussetzungen (H1)–(H3) existiert dann für jedes $x_0 \in Q$ ein $T_0 \in (0, T]$ derart, daß das semilineare Problem (SP) auf $[0, T_0)$ eine eindeutige milde Lösung besitzt.

BEMERKUNG 4.8.3 Die Voraussetzungen (H1)–(H3) sind etwa für $Z = W = X$ erfüllt, und wir erhalten aus dem obigen Satz eine spezielle Version von [54, Theorem 6.1.2]. Die Forderung $W = X$ läßt sich nach [47] weiter abschwächen, allerdings ist dies nur für nicht-reflexive Räume X von Bedeutung:

Es sei $T(\cdot)$ als exponentiell stabil vorausgesetzt. Wir bezeichnen mit

$$F_{-1} := \{x \in X_{-1} : \sup_{t>0} \|T_{-1}(t)x - x\|_{X_{-1}} < \infty\}$$

die extrapolierte Favard-Klasse von $T_{-1}(\cdot)$, die mit der kanonischen Norm $\|x\|_{F_{-1}} := \sup_{t>0} \|T_{-1}(t)x - x\|_{X_{-1}}$ versehen wird. Ist X reflexiv, so gilt $F_{-1} = X$, im allgemeinen jedoch ist $X \subseteq F_{-1}$. In [47, Prop. 3.3] wird der folgende Satz gezeigt:

Es sei A Erzeuger einer exponentiell stabilen stark stetigen Halbgruppe $T(\cdot)$ auf X . Dann existiert ein $M > 0$ so, daß für alle $f \in L^1(\mathbb{R}_+, F_{-1})$ und $t \geq 0$ gelten:

- (a) $(T_{-1} * f)(t) \in X$ und es gilt $\|(T_{-1} * f)(t)\|_X \leq M \|f\|_{L^1((0,t), F_{-1})}$
- (b) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(T_{-1} * f)(t)\|_X = 0$.

Es sei $W = F_{-1}$. Dann können wir mit $(S_h f)(t) = f(t + h)$ wie folgt auf (H2) schließen: es ist

$$\begin{aligned} & \|(T_{-1} * f)(t+h) - (T_{-1} * f)(t)\|_X \\ &= \left\| T_{-1}(t)(T_{-1} * f)(h) + (T_{-1} * (S_h f - f)) \right\|_X \\ &\stackrel{(a)}{\leq} \left\| T_{-1}(t)(T_{-1} * f)(h) \right\|_X + M \|S_h f - f\|_{L^1((0,t), F_{-1})}. \end{aligned}$$

Die starke Stetigkeit der Halbgruppe $T(\cdot)$, (b) und die starke Stetigkeit der Translationshalbgruppe S_\bullet lassen $T_{-1} * f \in C([0, T], X)$ schließen. Aus (a) folgt dann für $f \in L^p([0, T], W)$

$$\|T_{-1} * f\|_{C([0,T],X)} \leq M \|f\|_{L^1([0,T],W)} \leq MT^{1-1/p} \|f\|_{L^p([0,T],W)},$$

es gilt also (H2). Wegen $Z = X$ erhalten wir hieraus sofort auch (H1). Schließlich ist (H3) wegen $Z = X$ ebenfalls erfüllt.

4.8.2 Der \mathfrak{l} -Fall

Als Nächstes wollen wir Satz 4.8.1 auf \mathfrak{l} -Räume übertragen. Dazu sei I im folgenden ein offenes Intervall in \mathbb{R} . Da wir anstelle von $\mathfrak{l}(I, X)$ die Vervollständigung $\mathfrak{l}(L^2(I), X)$ betrachten müssen, um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, passen wir zunächst den Lösungs begriff an:

DEFINITION 4.8.4 Es sei $u \in \mathfrak{l}(L^2(I), X)$. Wir schreiben $u' \in \mathfrak{l}(L^2(I), X)$, falls die durch $u'(\varphi) = -u(\varphi')$ für $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ gegebene distributionelle Ableitung $u' \in \mathcal{D}'(I, X)$ eine stetige Fortsetzung $\tilde{u}' : L^2(I) \rightarrow X$ hat und diese ein Element von $\mathfrak{l}(L^2(I), X)$ ist. Wir schreiben der Einfachheit halber wieder $u' \in \mathfrak{l}(L^2(I), X)$.

Es sei $Q \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $Z \subseteq X \subseteq W$ mit stetigen Einbettungen. Für zwei l -beschränkte operatorwertige Funktionen $A : Q \rightarrow B(Z, W)$ und $B : Q \rightarrow B(U, W)$ gelte für Zahlen $L, R > 0$ und alle $r \in (0, R)$

$$\begin{aligned} l(\{A(x) - A(x_0) : \|x - x_0\|_X \leq r\}) &\leq Lr \\ l(\{B(x) - B(x_0) : \|x - x_0\|_X \leq r\}) &\leq Lr. \end{aligned} \tag{\widetilde{H0}}$$

Wir betrachten wieder $A_0 := A(x_0) - B(x_0)FC$ als linearen Operator in W und verlangen, daß $-A_0$ Erzeuger einer analytischen Halbgruppe $T(\cdot)$ sei, für den $Z = \mathcal{D}(A_0)$ mit einer zur Graphennorm von A_0 in W äquivalenten Norm gelte. Wir nehmen an, $A_X := A_0|_X$ sei Erzeuger einer analytischen Halbgruppe $T_X(\cdot)$ auf X . Bezüglich A_X können wir dann die Räume X_1 und X_{-1} betrachten, und erhalten $X_1 \subseteq Z$ sowie $W \subseteq X_{-1}$.

Für Lösungen y des inhomogenen Cauchyproblems $y'(t) + A_0y(t) = f(t)$, $y(0) = 0$ auf W , also für $y(t) = \int_0^t T(t-s)f(s) ds$ fordern wir die Abschätzungen

$$\|y\|_{l([0,T],Z)} \leq c_1 \|f\|_{l([0,T],W)} \tag{H1}$$

$$\|y\|_{C([0,T],X)} \leq c_2 \|f\|_{l([0,T],W)} \tag{H2}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 > 0$ die nicht von f abhängen. Wie im L^p -Fall erhalten wir aus (H1) zusätzlich die Abschätzung $\|y'\|_{l([0,T],W)} \leq 2c_1 \|f\|_{l([0,T],W)}$.

Schließlich gelte für die Lösung des homogenen Problems $y'(t) + A_0y(t) = 0$, $y(0) = x_0$, also für $y(t) = T(t)x_0$ die Abschätzung

$$\|y\|_{l([0,T],Z)} \leq c_3 \|x_0\|_X \tag{H3}$$

für ein von x_0 unabhängiges $c_3 > 0$.

Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_f' + A(f(\cdot))u_f &= B(f(\cdot))FC u_f \\ f(0) &= x_0, \quad x_0 \in Q \end{cases} \tag{QP*}$$

in $l(L^2([0, T]), W)$. Dabei sei $A(f(\cdot))$ die durch

$$A(f(\cdot))u_g(h) := \int_0^T A(f(t))g(t)h(t) dt$$

gegebene Abbildung von $l(L^2([0, T]), Z)$ nach $l(L^2([0, T]), W)$ und mit $B(f(\cdot))$ die entsprechende Abbildung von $l(L^2([0, T]), U)$ nach $l(L^2([0, T]), W)$.

Als Lösung von (QP^*) bezeichnen wir dann ein $x = u_f$ mit $f \in C([0, T], X)$, für das $u_f \in l(L^2([0, T]), Z)$ und $u'_f \in l(L^2([0, T]), W)$ gelten und das (QP^*) erfüllt.

SATZ 4.8.5 Es sei $-A_0 = B(x_0)FC - A(x_0)$ Erzeuger einer analytischen Halbgruppe $T(\cdot)$ auf W . Für ein $T > 0$ gelten die Voraussetzungen $(\widetilde{H0})$ – $(\widetilde{H3})$. Dann existiert ein $T_0 \in (0, T]$ so, daß das quasilineare Kontrollproblem (QP^*) auf $[0, T_0)$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zu demjenigen von Satz 4.8.1. Anstelle der Lipschitzstetigkeit verwenden wir die Voraussetzung $(\widetilde{H0})$ in Kombination mit Satz 3.5.7:

Es sei w die Lösung von $w'(t) + A_0 w(t) = 0$, $w(0) = x_0$, also $w(t) = T(t)x_0$. Wir setzen $\Sigma := \{f \in C([0, T], X) : u_f \in l(L^2([0, T]), Z) \text{ und } u'_f \in l(L^2([0, T]), W)\}$ und versehen Σ mit der Maximumsnorm der drei Raumnormen. Für $\rho, T > 0$ betrachten wir

$$\Sigma_{\rho, T} := \{x \in \Sigma : x(0) = x_0 \text{ und } \|x - w\|_{\Sigma} \leq \rho\}.$$

Dann sind Σ und $\Sigma_{\rho, T}$ für $\rho, T > 0$ Banachräume. Nach $(\widetilde{H3})$ ist dann $w \in l([0, T], Z)$, daher auch $w' \in l(L^2([0, T]), W)$, und $w \in C([0, T], X)$ folgt aus der Analytizität der Halbgruppe. Damit gilt $w \in \Sigma_{\rho, T}$ für beliebige $\rho, T > 0$.

Wir können wegen $w \in C([0, T], X)$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\{x(t) : x \in \Sigma_{\rho, T}, t \in [0, T]\} \subseteq Q$ gilt. Für $x \in \Sigma_{\rho, T}$ bezeichne Γx die milde Lösung des inhomogenen Cauchyproblems

$$\begin{cases} z'(t) + A_0 z(t) &= (A(x_0) - A(x(t)))x(t) + (B(x(t)) - B(x_0))FCx(t) \\ z(0) &= x_0. \end{cases} \quad (*)$$

Mit $(\widetilde{H1})$ und $(\widetilde{H2})$ können wir für $x \in \Sigma$ auch $\Gamma x \in \Sigma$ folgern, die milde Lösung ist also eine Lösung von $(*)$ im obigen Sinne. Konstruktionsgemäß ist x genau dann Lösung von (QP^*) in $l([0, T_0), Z)$, wenn $\Gamma x = x$ gilt. Wir wollen auf Γ den Banachschen Fixpunktsatz anwenden.

Zunächst ist zu zeigen, daß Γ für ein geeignetes $T_1 \in (0, T]$ und $\rho_1 > 0$ für alle $\rho_0 \in (0, \rho_1)$ und alle $T_0 \in (0, T_1)$ eine Selbstabbildung von Σ_{ρ_0, T_0} in sich

ist. Dazu betrachten wir $\Gamma x - w$: es löst die Gleichung (*) mit Anfangswert 0, sodaß wir mit ($\widetilde{H1}$) und ($\widetilde{H2}$) folgern können:

$$\begin{aligned} \|\Gamma x - w\|_{L^1([0,T],Z)} &\leq c_1 \left(\|(A(x_0) - A(x))x\|_{L^1([0,T],W)} \right. \\ &\quad \left. + \|(B(x) - B(x_0))FCx\|_{L^1([0,T],W)} \right), \\ \|\Gamma x - w\|_{C([0,T],X)} &\leq c_2 \left(\|(A(x_0) - A(x))x\|_{L^1([0,T],W)} \right. \\ &\quad \left. + \|(B(x) - B(x_0))FCx\|_{L^1([0,T],W)} \right) \quad \text{sowie} \\ \|(\Gamma x)' - w'\|_{L^1([0,T],W)} &\leq 2c_1 \left(\|(A(x_0) - A(x))x\|_{L^1([0,T],W)} \right. \\ &\quad \left. + \|(B(x) - B(x_0))FCx\|_{L^1([0,T],W)} \right). \end{aligned}$$

Wir schätzen die rechten Seiten ab: zunächst ist wegen ($\widetilde{H0}$)

$$\begin{aligned} &\|(A(x_0) - A(x))x\|_{L^1([0,T],W)} \\ &\leq \|A(x_0) - A(x)\|_{L^\infty([0,T],B(Z,W))} \|x\|_{L^1([0,T],Z)} \\ &\leq L \|x_0 - x\|_{L^\infty([0,T],X)} \|x\|_{L^1([0,T],Z)}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\|(B(x) - B(x_0))FCx\|_{L^1([0,T],W)} \\ &\leq \|B(x) - B(x_0)\|_{L^\infty([0,T],B(U,W))} \|FCx\|_{L^1([0,T],U)} \\ &\leq L \|x_0 - x\|_{L^\infty([0,T],X)} \|FC\|_{B(Z,U)} \|x\|_{L^1([0,T],Z)}. \end{aligned}$$

Wir haben also $\|\Gamma x - w\|_{\Sigma} \leq \text{const.} \|x_0 - x\|_{L^\infty([0,T],X)} \|x\|_{L^1([0,T],Z)}$. Nun ist zum einen

$$\|x_0 - x\|_{L^\infty([0,T],X)} \leq \|x_0 - w\|_{L^\infty([0,T],X)} + \|w - x\|_{L^\infty([0,T],X)},$$

und für $x \in \Sigma_{\rho,T}$ wird der erste Ausdruck wegen der Stetigkeit von w klein, wenn nur T klein wird, der zweite ist durch ρ nach oben beschränkt. Des weiteren ist wegen ($\widetilde{H3}$)

$$\|x\|_{L^1([0,T],Z)} \leq \|x - w\|_{L^1([0,T],Z)} + \|w\|_{L^1([0,T],Z)} \leq \rho + c_3 \|x_0\|_X.$$

Insgesamt ist also $\|\Gamma x - w\|_{\Sigma} \leq \text{const.} (\|x_0 - w\|_{L^\infty([0,T],X)} + \rho)(c_3 \|x_0\|_X + \rho)$, wir sehen also, daß Zahlen $\rho_1 > 0$, $T_1 \in (0, T]$ derart existieren, daß für $\rho_0 \in (0, \rho_1)$ und $T_0 \in (0, T_1)$ die Menge Σ_{ρ_0, T_0} von Γ in sich abgebildet wird.

Nun gilt es zu zeigen, daß Γ für hinreichend kleine $\rho_0, T_0 > 0$ eine Kontraktion ist. Dazu seien $x, y \in \Sigma_{\rho, T}$. Dann gilt für $z := \Gamma x - \Gamma y$ als Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{cases} z'(t) + A_0 z(t) &= A(x_0)(x - y) + A(y)y - A(x)x + \\ & B(x_0)FC(y - x) + B(x)FC x - B(y)FC y \\ z(0) &= 0. \end{cases}$$

nach $(\widetilde{H1})$ und $(\widetilde{H2})$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Gamma x - \Gamma y\|_{\Sigma} \leq & (3c_1 + c_2) \left(\| [A(x_0) - A(x)](x - y) \|_{L^p([0, T], W)} + \right. \\ & \| [A(y) - A(x)](y - w) \|_{L^p([0, T], W)} + \\ & \| [A(y) - A(x)](w - x) \|_{L^p([0, T], W)} + \\ & \| [A(y) - A(x)]x \|_{L^p([0, T], W)} + \\ & \| [B(x_0) - B(x)]FC(y - x) \|_{L^p([0, T], W)} + \\ & \| [B(y) - B(x)]FC(w - y) \|_{L^p([0, T], W)} + \\ & \| [B(y) - B(x)]FC(x - w) \|_{L^p([0, T], W)} + \\ & \left. \| [B(x) - B(y)]FC x \|_{L^p([0, T], W)} \right) \end{aligned}$$

Wegen $(\widetilde{H0})$ gilt nun

$$\begin{aligned} \|\Gamma x - \Gamma y\|_{\Sigma} \leq & (c_1 + c_2)L(1 + \|FC\|) \left(\|x_0 - x\|_{L^\infty([0, T], X)} \|x - y\|_{L([0, T], Z)} \right. \\ & \left. + 2\rho \|x - y\|_{L^\infty([0, T], X)} + \|x - y\|_{L^\infty([0, T], X)} \|x\|_{L([0, T], Z)} \right). \end{aligned}$$

Aus der Abschätzung zum Nachweis der Selbstabbildungseigenschaft wissen wir bereits, daß $\|x_0 - x\|_{L^\infty([0, T], X)}$ für hinreichend kleine T unabhängig von x beliebig klein gemacht werden kann und $\|x\|_{L([0, T], Z)}$ wegen $(\widetilde{H3})$ beschränkt ist. Außerdem ist

$$\|x - y\|_{L([0, T], Z)} \leq \|x - w\|_{L([0, T], Z)} + \|w - y\|_{L([0, T], Z)} \leq 2\rho,$$

und schließlich ist auch

$$\|x - y\|_{L^\infty([0, T], X)} \leq \|x - x_0\|_{L^\infty([0, T], X)} + \|x_0 - y\|_{L^\infty([0, T], X)}$$

beliebig klein zu bekommen.

Insgesamt ist also durch geeignete Wahl von $\rho_0 \in (0, \rho_1]$ und $T_0 \in (0, T_1]$ damit die Kontraktionseigenschaft von Γ auf Σ_{ρ_0, T_0} gezeigt. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert also auf $[0, T_0)$ eine eindeutige Lösung von (QP*) in $l([0, T_0), Z)$. \square

Diskussion der Voraussetzungen Wir betrachten den Fall, daß A_X ein l -sektorieller Operator vom Typ $\omega_l < \pi/2$ sei und $0 \in \rho(A_X)$ gilt. Die Halbgruppe $T_X(\cdot)$ ist also als exponentiell stabil vorausgesetzt.

Dann ist (H1) erfüllt, da die hierfür notwendige und hinreichende Bedingung der l -Beschränktheit von $\{(i\xi + A_X)^{-1} : \xi \neq 0\}$ (siehe Abschnitt 4.7) stets erfüllt ist: Da $h_\xi(t) := \exp(i\xi t)$ in $L^\infty(\mathbb{R})$ gleichmäßig beschränkt ist, folgt die Behauptung aus

$$(i\xi + A_X)^{-1}x = \int_0^\infty h_\xi(t)T(t)x \, dt$$

mit Lemma 3.1.6.

In Analogie zum L^p -Fall läßt sich (H2) so interpretieren, daß die Identität Id_W ein l -zulässiger Kontrolloperator auf $[0, T]$ für A_0 , bei exponentieller Stabilität damit auch auf \mathbb{R}_+ ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß für beliebige Banachräume U jedes $B \in B(U, W)$ l -zulässig ist. Daher ist die folgende Bedingung notwendig für (H2): für alle Banachräume U endlichen Kotyps und $B \in B(U, W)$ ist die Menge

$$\{\lambda^{1/2}(\lambda + A_0)^{-1}B : \lambda > 0\} \subseteq B(U, Z)$$

l -beschränkt. Entsprechend können wir auch (H3) so interpretieren, daß die Identität $\text{Id}_Z : Z \subseteq W \rightarrow Z$ ein l -zulässiger Beobachtungsoperator auf $[0, T]$ für A_0 , bei exponentieller Stabilität damit auch auf \mathbb{R}_+ ist. Daher ist für alle Banachräume Y endlichen Kotyps und $C \in B(Z, Y)$ die l -Beschränktheit der Menge

$$\{\lambda^{1/2}C(\lambda + A_0)^{-1} : \lambda > 0\} \subseteq B(W, Y)$$

notwendig. Genügen A_0 und A'_0 quadratischen l -Abschätzungen, so sind diese beiden Bedingungen auch hinreichend. Wir erinnern, daß auf Räumen W endlichen Kotyps quadratische l -Abschätzungen für A_0 und A'_0 nach Satz 3.9.6 äquivalent zu einem beschränkten H^∞ -Kalkül von A_0 sind.

Schließlich stellen wir die Bedingungen $(\widetilde{H0})$ und $(H0)$ einander gegenüber: Während Lipschitzstetigkeit eine eher einfach nachzuweisende Eigenschaft darstellt, wirkt die Bedingung $(\widetilde{H0})$ eher abschreckend. Andererseits sind für die notwendigen Bedingungen $(H2)$, $(H3)$ im L^p -Falle für $p \neq 2$ keine brauchbaren Charakterisierungen bekannt, sodaß man den schwierigen Nachweis von $(\widetilde{H0})$ als den Preis betrachten kann, den man für die besser zu handhabenden Bedingungen $(\widetilde{H2})$ und $(\widetilde{H3})$ bezahlen muß.

Literaturverzeichnis

- [1] D. Albrecht, X. Duong, A. McIntosh: *Operator theory and harmonic analysis.*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Vol. 34, Australian National University, 77-136 (1986).
- [2] H. Amann: *Operator-valued Fourier Multipliers, Vector-valued Besov Spaces and Applications*, Math. Nachr. 186, 5-56 (1997).
- [3] V. Blondel, A. Megretski (Herausgeber): *2002 MNTS Problem Book, Open problems on the mathematical theory of systems* (2002). Verfügbar unter <http://www.nd.edu/~mtns/OPMTNS.pdf>
- [4] P. Clément, B. De Pagter, F. Sukochev und H. Witvliet: *Schauder decompositions and multiplier theorems*, Studia math. 138, 135-163 (2000).
- [5] P. Clément, S. Li: *Abstract parabolic quasilinear equations and application to a groundwater flow problem*, Advances in Mathematical Sciences and Applications, Gakkōtoshō Tokyo, Vol. 3, 17-32 (1994).
- [6] P. Clément, J. Prüß: *An Operator-Valued Transference Principle and Maximal Regularity on Vector-Valued L^p -spaces.*, In: Evolution equations and their applications in physical and life sciences. G. Lumer, L. Weis (editors). Lecture notes in pure and applied mathematics, Marcel Dekker, vol 215, 195-215 (2001).
- [7] M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh und A. Yagi: *Banach space operators with a bounded H^∞ -calculus*, J. Austr. Math. Soc. (Series A) 60, 51-89 (1993).
- [8] R. Curtain, H. Zwart: *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Texts in Applied Mathematics 21, Springer Verlag (1995).
- [9] E. B. Davies: *One parameter semigroups*, London Mathematical Society, Monographs, No.15. London, Academic Press (1980).

- [10] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge: *Absolutely summing operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 43, (1995).
- [11] J. Diestel, J. Uhl Jr.: *Vector measures*, Mathematical surveys, number 15, AMS (1979).
- [12] N. Dunford, J. Schwartz: *Linear Operators, part I*, Interscience Publishers Inc., New York, (1958).
- [13] K. Engel, R. Nagel: *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York (2000).
- [14] H. Fattorini: *Some remarks on complete controllability*, J. SIAM Control, Vol. 4, No. 4, 686-694 (1966).
- [15] M. Fréchet: *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. Palermo Rend. 22, 1-74; auch sep. (Thèse) Paris: Gauthier-Villars. (1906).
- [16] X. Fernique: *Intégrabilité des vecteurs gaussiens*, C.R. Acad. Sci. Paris A270, 1698-1699 (1970).
- [17] A. Fröhlich: *Ein Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren*, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1998).
- [18] A. Fröhlich: *H^∞ -Kalkül und Dilatationen*, Dissertation, Universität Karlsruhe (2003).
- [19] M. Girardi, L. Weis: *Operator valued Fourier Multiplier Theorems on Besov spaces*, Mathematische Nachrichten, 251, 34–51 (2003).
- [20] M. Girardi, L. Weis: *Criteria for R -boundedness of operator families*, Recent Contributions to Evolution Equations, Lecture Notes in Math., Marcel Dekker (erscheint).
- [21] P. Kunstmann, L. Weis: *Maximal L_p -regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞ -functional calculus*, in: M. Iannelli, R. Nagel, S. Piazzera (eds.), Functional analytic methods for evolution equations, Springer Verlag: Lecture Notes Math. 1855, 65-311 (2004).
- [22] B. Haak, C. Le Merdy: *α -Admissibility of observation and control operators*, erscheint in: Houston Journal of Mathematics.

-
- [23] M. Haase: *The functional calculus for sectorial operators and similarity methods*, Dissertation, Universität Ulm (2003).
- [24] M. Haase: *The functional calculus for sectorial operators*, Buchmanuskript, (Stand 18.12.2003), zu finden unter
<http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/haase/book.ps>
- [25] M. Haase: *A general framework for holomorphic functional calculi*, Ulmer Seminare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen Heft 8, 190-208 (2003).
- [26] J. Hadamard: *Sur les opérations fonctionelles*. C. R. 136, 351-354, (1903).
- [27] B. Jacob, J. Partington: *The Weiss conjecture on admissibility of observation operators for contraction semigroups*, Integral Equations Operator Theory, 40(2), 231-243 (2001).
- [28] B. Jacob und J. Partington: *Admissibility of control and observation operators for semigroups: a survey*, Proceedings of IWOTA 2002, (erscheint).
- [29] B. Jacob, J. Partington und S. Pott: *Admissible and weakly admissible observation operators for the right shift semigroup*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 45(2):353-362 (2002).
- [30] B. Jacob, H. Zwart: *Disproof of two conjectures of George Weiss*, Memorandum 1546, Faculty of Mathematical Sciences, University of Twente (2000).
- [31] B. Jacob, H. Zwart: *Exact observability of diagonal systems with a one-dimensional output operator*, Proceedings of the 14th Intern. Symp. of Mathematical Theory of Networks and Systems, Perpignan (2000).
- [32] J. García-Cuerva, J. Rubio de Francia: *Weighted norm inequalities and related topics*, Mathematical studies 116, North-Holland (1985).
- [33] Y. Latushkin, F. Raebiger: *Operator valued Fourier multipliers and stability of strongly continuous semigroups*, erscheint in: Integr. eq. op. theory, Birkhäuser.
- [34] W. Johnson, J. Lindenstrauss: *Basic concepts in the geometry of Banach spaces*, Handbook of the Geometry of Banach spaces, Vol. I, North-Holland (2001).
- [35] C. Kaiser, L. Weis: *Continuous and discrete wavelet transform for functions with values in Banach spaces*, in Vorbereitung.

- [36] N. Kalton und L. Weis: *The H^∞ -calculus and sums of closed operators*, Math. Annalen 321, 319-345 (2001).
- [37] N. Kalton und L. Weis: *The H^∞ -calculus and square function estimates*, in Vorbereitung.
- [38] N. Kalton, L. Weis: *Euclidian structures*, in Vorbereitung.
- [39] H. Kneser: *Funktionentheorie*, Studia Mathematica, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (1958).
- [40] P.C. Kunstmann und L. Weis: *Perturbation theorems for maximal L^p -regularity*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) Vol. XXX, 415-435 (2001).
- [41] H.J. Landau, L.A. Shepp *On the supremum of a Gaussian process* Sankhyà A32, 369-378 (1970).
- [42] C. Le Merdy: *The Weiss conjecture for bounded analytic semigroups*, J. London Math. Soc. (3) 67, 715-738 (2003).
- [43] C. Le Merdy: *On square functions associated to sectorial operators*, Research Report MRR02-004, Mathematical Sciences Institute, Australian national university (2002).
- [44] W. Linde: *Probability in Banach spaces – stable and infinitely divisible distributions*, John Wiley & Sons, (1986).
- [45] A. McIntosh: *Operators which have an H^∞ -functional calculus*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Vol. 14, Australian National University, 210-231 (1986).
- [46] A. McIntosh, A. Yagi: *Operators of type ω without a bounded H^∞ -calculus*, Miniconference on Operators in Analysis (Sydney, 1989), Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Vol. 24, Australian National University, (1989).
- [47] R. Nagel, E. Sinestrari: *Inhomogeneous Volterra integrodifferential equations for Hille-Yoshida operators*, Lect. Notes Pure Appl. Math. 150, Marcel Dekker, 51-70 (1993).
- [48] J. van Neerven: *The Adjoint of a Semigroup of Linear Operators*, Lecture Notes in Mathematics 1529, Springer-Verlag (1992).

-
- [49] J. van Neerven, L. Weis: *Spaces of γ -radonifying operators and stochastic integration in Banach spaces*, preprint.
- [50] J. van Neerven, L. Weis: *R-boundedness of the resolvent and the asymptotic behaviour of the linear stochastic Cauchy problem*, preprint.
- [51] E. Nelson: *A functional calculus using singular Laplace integrals*. Trans. Am. Math. Soc. 88, 400-413, (1958).
- [52] J. von Neumann: *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.*, Math. Ann. 102, 49-131, (1929).
- [53] J. Partington, G. Weiss: *Admissible observation operators for the right shift semigroup*, Math. Control Signals Syst., 13 (3), 179-192 (2000).
- [54] A. Pazy: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Volume 44, Springer-Verlag (1983).
- [55] J. Peetre: *New thoughts on Besov spaces*, Duke University Mathematics Series I, Duke University Durham, N.C. (1976).
- [56] A. Pietsch, J. Wenzel: *Orthonormal Systems and Banach Space Geometry*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Volume 70, Cambridge University Press, (1998).
- [57] G. Pisier: *Some results on Banach spaces without local unconditional structure*, Compos. Math. 37, 3-19 (1978).
- [58] G. Pisier: *The volume of convex bodies and Banach space geometry* Cambridge University Press (1989).
- [59] R. Rebarber und G. Weiss: *Necessary conditions for exact controllability with a finite-dimensional input space*, Systems & Control Letters, 40, 217-227 (2000).
- [60] F. Riesz: *Les systèmes d'équations linéaires à une infinite d'inconnues*. Paris: Gauthier-Villars, VI (1913).
- [61] B. Ross: *The development of fractional calculus 1695-1900*, Hist. Math. 4, 75-89 (1977).
- [62] D. Russell, G. Weiss: *A general necessary condition for exact controllability*, SIAM Control and Optimazation Vol. 32, No. 1, 1-23 (1994).

- [63] M. Schreiber: *A functional calculus for general operators in Hilbert space* Trans. Am. Math. Soc. 87, 108-118, (1958).
- [64] E. Stein: *Singular Integrals and differentiability properties of functions*, Princeton university press (1970).
- [65] M.H. Stone: *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*. American Mathematical Society Colloquium Publ., 15. New York: American Mathematical Society (AMS). VIII, (1932).
- [66] H. Triebel: *Theory of function spaces*, Monographs in Mathematics, Birkhäuser (1983).
- [67] H. Triebel: *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland (1978).
- [68] L. Weis: *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p -regularity*, Math. Ann. 319, 735-758 (2001).
- [69] L. Weis: persönliche Mitteilung.
- [70] G. Weiss: *Representation of shift-invariant operators on L^2 by H^∞ transfer functions: An elementary proof, a generalization to L^p and a counterexample for L^∞* , Math. Control Signals Syst. 4, No. 2, 193-203 (1991).
- [71] G. Weiss: *Two conjectures on the admissibility of control operators*, Estimation and Control of Distributed Parameter Systems, ISNM Vol. 100, Birkhäuser (1991).
- [72] G. Weiss: *Regular linear systems with feedback*, Math. Control Signals Systems 7, 23-57 (1994).
- [73] D. Werner: *Funktionalanalysis*, Springer Lehrbuch (1995).
- [74] J. Zabczyk: *Mathematical Control Theory: An Introduction*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser (1995).

Abriss des Lebens- und Bildungsganges

Persönliche Daten

Name: Bernhard Hermann Haak
Geburtsdatum: 03.05.1975
Geburtsort: Aachen
Eltern: Mathilde und Hans Herbert

Schulbildung

1981 – 1985 Grundschole Birkenau
1985 – 1994 Werner Heisenberg Gymnasium Weinheim
21.06.1994 Abitur (Allgemeine Hochschulreife)

Studium

Fachrichtung: Mathematik (mit Anwendungsgebiet Informatik)
Hochschulen: Universität Karlsruhe (TH) und
Université Joseph Fourier, Grenoble
Studiendauer: Oktober 1994 bis September 2000
Diplomvorprüfung: 14.03.1997
Maîtrise-ès-sciences: 09.09.1998
Diplomarbeit: Über gewöhnliche Differentialgleichungen in
Montelschen Frécheträumen
Diplomprüfung: 29.09.2000

Tätigkeiten während des Studiums

01.10.1996 – 30.09.1997, Wissenschaftliche Hilfskraft
01.10.1998 – 30.09.1999 (Institut für Angewandte Mathematik)
01.04.1999 – 30.09.2000 Wissenschaftliche Hilfskraft
(Mathematisches Institut II)
01.06.2000 – 30.09.2000 Wissenschaftliche Hilfskraft
(Institut für Mathematische Stochastik)

Berufstätigkeit

seit 01.10.2000 Wissenschaftlicher Angestellter
(Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe)

Im Zentrum des Buches steht die Untersuchung des abstrakten linearen Kontrollproblems

$$\begin{aligned}x'(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\y(t) &= Cx(t).\end{aligned}$$

in unendlichdimensionalen Banachräumen. Will man unstetige Beobachtungsoperatoren C bzw. Kontrolloperatoren B betrachten, so entsteht auf natürliche Art und Weise der Begriff der Zulässigkeit von Kontroll- und Beobachtungsoperatoren.

Im vorliegenden Buch wird diskutiert, inwiefern der Zulässigkeitsbegriff für analytische Halbgruppen mit Hilfe der Laplacetransformierten zu charakterisieren ist. Unter der zusätzlichen Voraussetzung quadratischer Bochner-Abschätzungen ist eine solche Charakterisierung zwar möglich, es zeigt sich jedoch, daß die quadratischen Bochner-Abschätzungen, die zur *gleichzeitigen* Beschreibung der Zulässigkeit von Kontroll- und Beobachtungsoperatoren benötigt werden, nur selten außerhalb des Hilbertraumkontextes gelten.

Daher wird für Kontrolltheorie in Banachräumen ein neuer Weg vorgeschlagen: Auf Hilberträumen besteht ein enger Zusammenhang zwischen quadratischen Abschätzungen und der Eigenschaft von A , einen beschränkten H^∞ -Kalkül zu besitzen. Dies legt nahe, auch in Banachräumen einen geeigneten Begriff quadratischer Abschätzungen aus dem H^∞ -Kalkül abzuleiten. Dieses Herangehensweise erlaubt es dem Autor einen Zulässigkeitsbegriff in Banachräumen anzugeben, der zum einen mit dem klassischen Begriff in Hilberträumen übereinstimmt, andererseits eine Charakterisierung im Laplacebild erlaubt, deren Voraussetzungen auch außerhalb des Hilbertraumkontextes sinnvoll nachprüfbar sind.

Die für diesen Zugang notwendigen umfangreichen mathematischen Vorarbeiten werden ausführlich dargestellt und weiterentwickelt. Schließlich wird die Betrachtung durch eine Anwendung auf ein nichtlineares Problem abgerundet.