Université de Bordeaux
Mathématiques

Algèbre 3 – Licence 2
Année 2015–2016

DM n° 1

À rendre avant les vacances

Exercice 1 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système linéaire suivant d'inconnues x, y, z (on discutera les solutions en fonction du paramètre m).

$$\begin{cases} mx + y + z &= 1 \\ x + my + z &= m \\ x + y + mz &= m^2 \end{cases}$$

Exercice 2 – Dans $\mathbb{C}^3$, le vecteur $u = (1, i, 1)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1, 2, -i)$, $e_2 = (1, i, 1+i)$ et $e_3 = (1, -1, 2i)$?

Exercice 3 – Dans $\mathbb{R}^4$, on définit:

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$F = \mathrm{Vect}((1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)) \quad G = \mathrm{Vect}((1, -1, 1, -1))$$

Exprimez chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants sous la forme $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$:

$$E \cap F, \quad F \cap G, \quad E \cap G, \quad E + F, \quad E + G, \quad F + G.$$

Exercice 4 – Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles. Soit

$$F = \{u \in E \mid \text{ pour tout } n \geq 0,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}.$$

1) Montrez que F est un sous-espace vectoriel de E.
2) Déterminez deux valeurs de a non nulles pour lesquelles la suite de terme général a^n appartient à F.