Corrigé du TP noté

C. Dossal

11 Mars 2011

1. Ecrire une fonction matlab

   ```
   function coefs=Interpolation(V)
   ```

   qui prend en entrée un vecteur V de 4 composantes et qui renvoie les coefficients du polynôme P de degré 3 tel que

   $$P(1) = V(1), \quad P'(1) = V(2), \quad P(2) = V(3), \quad P'(2) = V(4).$$

   La fonction doit également afficher le graphe de P sur l'intervalle $[1,2]$ sur 1000 points. Tester la fonction avec le vecteur $V = [0;1;4;8]$.
   Si on écrit le polynôme P sous la forme $P(X) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on remarque que les 4 conditions ci dessus s'expriment comme un système linéaire en (a,b,c,d) avec comme second membre, les composantes du vecteur V. On résout le problème en inversant une matrice en matlab.

   ```
   function coefs=Interpolation(V)
   M=[1,1,1,1;3,2,1,0;8,4,2,1;12,4,1,0];
   coefs=inv(M)*V;
   t=[1:1/999:2];
   P=coefs(1)*t.^3+coefs(2)*t.^2+coefs(3)*t+coefs(4);
   plot(t,P);
   ```

   ```
   >> V=[0;1;4;8];coefs=Interpolation(V)

   coefs =

       1.0000
      -1.0000
      -0.0000
            0
   ```

2. Soit f une fonction C^4 sur $\mathbb{R}$.
   (a) Ecrire un script matlab *EstimPremDer* qui détermine (a_1, b_1, c_1, d_1) tel que

   $$\frac{a_1 f(x_0) + b_1 f(x_0+h) + c_1 f(x_0+2h) + d_1 f(x_0+3h)}{h} = f'(x_0) + 0(h^3)$$

   (b) Ecrire un script matlab *EstimSecDer* qui détermine (a_2, b_2, c_2, d_2) tel que

   $$\frac{a_2 f(x_0) + b_2 f(x_0+h) + c_2 f(x_0+2h) + d_2 f(x_0+3h)}{h^2} = f\text{''}(x_0) + 0(h^2)$$

Ici on écrit le développement limité à l'ordre 3 en chacun des points et on écrit la combinaison linéaire $a_1f(x_0)+b_1f(x_0+h)+c_1f(x_0+2h)+d_1f(x_0+3h)$, sous la forme $\alpha f(x_0)+\beta hf'(x_0)+\gamma h^2f''(x_0)+\delta h^3f''(x_0)+O(h^4)$. Pour obtenir une estimation de la dérivée première avec l'ordre maximal il faut que $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=0$ et $\delta=0$.
Pour déterminer le quadruplet (a_1,b_1,c_1,d_1), il suffit alors de résoudre un système, ce que l'on fait en inversant une matrice sous matlab.

```
function V=EstimPremDer
M=[1,1,1,1;0,1,2,3;0,0.5,2,9/2;0,1/6,4/3,9/2];
V=inv(M)*[0;1;0;0];
```

```
function V=EstimDeuxDer
M=[1,1,1,1;0,1,2,3;0,0.5,2,9/2;0,1/6,4/3,9/2];
V=inv(M)*[0;0;1;0];
```

3. Ecrire une fonction matlab

```
function I=SimpsonCos(n)
```

qui approche l'intégrale suivante par la méthode de Simpson sur n points :

$$I=\int_0^{\pi/8}\cos(x)^2dx$$

et donner la valeur obtenue pour $n=7$. En utilisant la valeur exacte donner la valeur de l'erreur commise.

```
function I=SimpsonCos(n)
t=[0:1/(n-1):1];
t2=pi*t/8;
f=cos(t2).^2;
S=0;
for k=1:2:n-2
   S=S+f(k)/6+2*f(k+1)/3+f(k+2)/6;
end
I=S*pi/(4*(n-1));
```

Un calcul direct montre que cette intégrale vaut $\frac{\pi}{16}+\frac{\sqrt{2}}{8}$. Si on calcule la différence obtenue avec SimpsonCos(7) on obtient : 2.8893×10^{-7}.

4. Ecrire une fonction matlab

```
function [a,b,c]=Approx(X,Y)
```

qui prend en entrée deux vecteurs $X=(x_k)_{k\leqslant n}$ et $Y=(y_k)_{k\leqslant n}$ de taille n et qui renvoie les réels a,b,c qui minimisent l'expression suivante :

$$\sum_{k=1}^{n}|y_k-ax_k^2-bx_k-c|^2$$

et qui affiche les points de coordonnées (x_k,y_k) en bleu et les points de coordonnées (x_k,z_k) en rouge où $z_k=ax_k^2+bx_k+c$.
Tester votre fonction sur avec les données suivantes :

```
>>X=[0;1/3;2/3;3/4;1];
>>Y=[0;1/27;8/27;27/64;1];
```

Pour répondre à cette question il faut comprendre qu'on est en train de calculer une projection. Soit E l'espace des fonctions définies sur les $(x_i)_{i\leqslant n}$ à valeurs réelles. Sur cet espace E on peut définir le produit scalaire canonique :

$$< f,g >= \sum_i f(x_i)g(x_i)$$

On peut définir le sous-espace vectoriel F de E des fonctions de degré 2 et on a vu en TD comment calculer la projection sur un espace vectoriel quelconque par une multiplication matricielle. On forme la matrice A dont les colonnes forment une base de l'espace vectoriel sur lequel on veut projeter. Ici, une fonction constante égale à 1, le vecteur x_i t le vecteur formé des x_i^2. La projection est obtenue par $Z = A(A^tA)^{-1}A^tY$ et les coefficients de la projection sont $Coefs = A(A^tA)^{-1}A^ty$.

```
function [a,b,c]=Approx(X,Y)
n=length(X);
M=[ones(n,1),X,X.^2];
V=inv(M'*M)*(M')*Y;
Z=M*V;
a=V(3);b=V(2);c=V(1);
plot(X,Y,'+');hold on;plot(X,Z,'r+');
```

```
>> [a,b,c]=Approx(X,Y)

a =

    1.5432


b =

   -0.5779


c =

    0.0152
```