1. Question de cours

Exercice 1 : C'est le temps qui court... cours... qui nous rend sérieux...

(1) Donner la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point.

(2) Donner la formule de la dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable.

(3) Énoncer le théorème de Rolle. Donner des contre-exemples selon les hypothèses.

(4) Énoncer le théorème (ou formule) des accroissements finis. Donner un contre-exemple pour f à valeurs complexes.

(5) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

(6) Donner la définition de la convexité d'une fonction.

Exercice 2 : On applique.

(1) Appliquer le théorème de Rolle à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ sur les segments $[1,2]$ puis $[2,3]$.

(2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1-(x^2)^{1/3}$. Montrer que f' ne s'annule pas sur $[-1,1]$; pourquoi cela ne contredit pas le théorème de Rolle ?

(3) Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ sur le segment $[-1,2]$.

2. Exercices d'applications directes du cours

Exercice 3 : Calcul de dérivées. Calculer les dérivées des fonctions suivantes (en précisant le domaine de dérivabilité bien entendu...) :

$$f_1(x) = (3x^2+7)\ln(x), \quad f_2(x) = \frac{e^x}{x^2+1}, \quad f_3(x) = \sqrt{x^4+8}, \quad f_4(x) = \ln(7-x^2), \quad f_5(x) = x|x|,$$
$$f_6(x) = 3x^2\ln(x), \quad f_7(x) = e^{\sqrt{x}}, \quad f_8(x) = e^{\cos(\sqrt{x})}, \quad f_9(x) = |x(x-2)|, \quad f_{10}(x) = \cos(2-x),$$
$$f_{11}(x) = (\sin(x)+3)^4, \quad f_{12}(x) = \sin^2(x)+\cos^2(x), \quad f_{13}(x) = \arccos(\arctan(x)).$$

Exercice 4 : À l'approche des développements limités...

(1) Soit $f(x) = (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})$ (pour $x > 0$). Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$.

(2) Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer la dérivée k-ième de $g(x) = x^n$.

(3) Déterminer la dérivée d'ordre n de $h(x) = e^{2x}$.

(4) Déterminer la dérivée d'ordre n de $l(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et de $m(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

(5) Déterminer la dérivée d'ordre n de $p(x) = \ln(1+x)$.

(6) Montrer que la dérivée d'ordre n de $\sin(x)$ est $\sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

Exercice 5 : Formule de Leibniz.

(1) Calculer la dérivée d'ordre $n \geq 3$ de $f(x) = x^3\sin(x)$.

(2) Calculer la dérivée n-ième de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x^3+x^2+1)e^{-x}$.

(3) Calculer la dérivée d'ordre $n \geq 2$ de $g(x) = (x^2+1)e^{2x}$.

(4) On note $P(x)$ un polynôme. Calculer $\left(P(x)e^{2x}\right)^{(4)}$.

Exercice 6 : ça dérive... Soit $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n réel tel que $\forall x \in]-1,1[, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$.

Exercice 7 : Avant l'Hospital... Calculer les limites suivantes, en utilisant la définition de la dérivée :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x},\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1},\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 8 : Fonction réciproque. Montrer que pour tout réel x, $\mathrm{Arcsinh}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Calculer la dérivée de $h(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 9 : Une formule classique. Calculer $f'(x)$ pour $f(x)=\arctan(x)+\arctan(1/x)$. En déduire les valeurs de $f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 10 : Théorème des accroissements finis (1).

(1) Montrer que, pour tout réel $x>-1$, $\dfrac{x}{1+x}\leq\ln(x+1)\leq x$.

(2) Montrer que, pour tout réel x : $e^x\geq 1+x$.

(3) Montrer que, pour tout réel $x>0$: $\sin(x)\leq x$.

(4) Montrer que, pour tout réel $x>0$: $\dfrac{1}{x+1}\leq\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\leq\dfrac{1}{x}$.

(5) Soit $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que $0\leq\dfrac{1-\cos(x)}{x}\leq\sin(x)$.

(6) Montrer que $\forall x\in]0;1[, x<\arcsin(x)<\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(7) Montrer que $\forall x>0, \dfrac{x}{1+x^2}<\arctan(x)<x$.

Exercice 11 : Corollaire. Soient $a<b\in\mathbb{R}$ et $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$.

Exercice 12 : Étude en un point d'une fonction. Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}x^2\sin(\frac{1}{x}) & ,\text{ si } x\neq 0\\ 0 & ,\text{ si } x=0\end{cases}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Exercice 13 : Étude d'une fonction. Soit $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & \text{si } x\in[0,1]\\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } x\in]1,2]\end{cases}$. Montrer que f est dérivable $]0,2[$, à droite en 0 et à gauche en 2, et donner sur le segment $[0,2]$ une version explicite du théorème des accroissements finis.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 14 : Calcul de dérivées. Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur les intervalles ouverts sur lesquels elles sont définies (après avoir précisé ces intervalles) :

$$f(x)=\ln|\tan(x/2)|,\quad g(x)=\ln\big(\tan(1+\sqrt{\sin(x^2)})\big),\quad h(x)=\frac{1}{(x^2)^{1/3}}-\frac{1}{(x^3)^{1/2}},\quad i(x)=x^x,$$

$$j(x)=\sqrt{1+x^2\sin^2(x)},\quad k(x)=\frac{\exp(\frac{1}{x})+1}{\exp(\frac{1}{x})-1},\quad \ell(x)=\ln\Big(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\Big),\quad m(x)=\big(x(x-2)\big)^{1/3}.$$

Exercice 15 : Si on oublie l'algèbre... En dérivant n fois la fonction $x\in\mathbb{R}\longmapsto e^{3x}$, montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n$.

Exercice 16 : Taux d'accroissement. Soit f une fonction dérivable en x_0. Calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h^2)-f(x_0+h)}{h}$.

Exercice 17 : ça monte et ça descend... Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[0;1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $\forall x \in]0;1[, f(x) \neq 0$. Montrer que $f'(0)f'(1) \leq 0$. *Indication* : on montrera d'abord que f est de signe constant sur $[0;1]$.

Exercice 18 : Théorème de Rolle avec des limites. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, admettant deux limites égales (finies ou infinies) en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que la fonction f' s'annule sur $\mathbb{R}$ en au moins un point.

Exercice 19 : Trop c'est trop ! Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux nombres réels. Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice 20 : Rolle en série... Montrer, à l'aide du théorème de Rolle, que, si $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme

$$P_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}\Big[(1 - X^2)^n\Big]$$

est un polynôme de degré n dont les n racines sont toutes réelles, simples, et appartiennent à $[-1, 1]$.

Exercice 21 : Dérivabilité et uniforme continuité. Montrer qu'une fonction f dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, telle que f' soit bornée sur I, est uniformément continue sur I.

Exercice 22 : Multiplication des Rolle... Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui s'annule en $k \geq 2$ nombres réels distincts, alors f' s'annule en au moins $k - 1$ nombres réels distincts. En déduire que si p est une fonction polynomiale d'une variable à coefficients réels, de degré supérieur ou égal à 2, et dont toutes les racines sont réelles, il en va de même de la fonction polynomiale dérivée p'.

Cas général : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ n-fois dérivable sur I. On suppose que f admet au moins k zéros dans I. Montrer que $f^{(\ell)}$ admet au moins $(k - \ell)$ zéros dans I avec $0 \leq \ell \leq k$ et $0 \leq \ell \leq n$. *Indication :* on procèdera judicieusement par récurrence.

Exercice 23 : Théorème des accroissements finis (2).

(1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$; montrer que $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

(2) Soient $0 < x < y$; montrer que l'on a $x < \dfrac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)} < y$.

(3) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\ln(x + 1)} - \sqrt{\ln(x)}\right) = 0$.

Exercice 24 : Approximations.

(1) En étudiant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, estimer inférieurement et supérieurement la différence $\sqrt{100.1} - 10$.

(2) En considérant $f : x \mapsto \exp(-x^2)$, encadrer la différence $1 - \exp(-0.024)$.

Exercice 25 : Ne pas oublier les valeurs intermédiaires. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a < b \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $f'(a) > 0, f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c_1 < c_2 < c_3 \in]a, b[$ tels que $f(c_2) = 0, f'(c_1) = f'(c_3) = 0$.

Exercice 26 : Avec le critère de Cauchy. Soit f une fonction à valeurs complexes définie et dérivable sur $]0, 1]$. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, 1]$, $|f'(x)| < a$. Montrer, en utilisant le critère de Cauchy, que la suite $(f(1/n))_{n \geq 1}$ converge vers une limite finie.

Exercice 27 : Une limite avec le TAF. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bornée, 2 fois dérivable, telle que $f'' \geq 0$. Montrer que f décroît.

Exercice 28 : Bornée ou pas ? Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert borné non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable non bornée sur cet intervalle. Montrer qu'il est impossible que f' soit bornée sur I. Réciproquement, si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I et de dérivée non bornée sur cet intervalle ouvert, peut on affirmer que f est aussi une fonction non bornée ? Donner un contre-exemple si ce n'est pas le cas.

Exercice 29 : Fini d'être bornée... Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[-1,1]$, telle que $f(-1) = f(1) = 0$. On note $f'(-1)$ et $f'(1)$ respectivement les dérivées à droite en -1 et à gauche en 1. On pose

$$\forall x \in]-1,1[, g(x) = \frac{f(x)}{1-x^2}.$$

(1) Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité sur $[-1,1]$. On note $\tilde{g} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ le prolongement continu de g à $[-1,1]$. Expliciter $\tilde{g}(1)$ et $\tilde{g}(-1)$ en fonction des données de l'énoncé.

(2) Montrer qu'il existe au moins un point $c \in]-1,1[$ tel que $g'(c) = -\frac{1}{4}\big(f'(1) + f'(-1)\big)$.

(3) La fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est-elle bornée sur $]-1,1[$?

(4) Même question pour f puis pour g.

Exercice 30 : On combine les Rolle avec le TAF... Soient $h > 0$ et $f : [-h;h] \to \mathbb{R}$ de classe C^5. Montrer qu'il existe $c \in]-h;h[$ tel que $f(h) - f(-h) = \dfrac{h}{3}(f'(-h) + 4f'(0) + f'((h)) - \dfrac{h^5 f^{(5)}(c)}{90}$.

Exercice 31 : À nouveau des séries.

(1) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto 1/x^a$, montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, on a $\dfrac{1}{k^{a+1}} < \dfrac{1}{a}\Big(\dfrac{1}{(k-1)^a} - \dfrac{1}{k^a}\Big)$.

(2) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{a+1}}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers une limite finie.

(3) En appliquant maintenant le théorème des accroissements finis à $x \mapsto \ln(x)$, montrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on a $\ln(k+1) - \ln(k) < 1/k$.

(4) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1/k$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 32 : Théorème de Darboux : Théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée.

(1) Donner un exemple de fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'est pas continue.

(2) Soit f une fonction réelle dérivable dans un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Montrer que f' vérifie sur I le théorème des valeurs intermédiaires (Théorème de Darboux).

Exercice 33 : règle de Bernoulli-l'Hôpital. Appliquer la règle de Bernoulli-l'Hôpital pour calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{x-1}\right), \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{x}{x\sin(x)}\right), \quad \lim_{x\to\pi}\left((x-\pi)\tan(\frac{x}{2})\right),$$
$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to\pi/4} \tan(x)^{\tan(2x)}.$$

Exercice 34 : Une inégalité, DM 2, 2012-2013. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a+b=1$. Le but de cet exercice est de démontrer que :

(1) $$a\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b\ln\left(\frac{1}{b}\right) \leq \ln(2).$$

Pour cela, on considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} &f(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x) \qquad \text{si } 0 < x < 1 \\ &f(0) = f(1) = 0 \end{aligned}$$

(1) Montrer que f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$.

(2) Montrer que $\forall x \in [0,1], f(x) = f(1-x)$. Quelle propriété du graphe de f peut-on en déduire ?

(3) Calculer la dérivée de f sur $]0,1[$ et préciser son signe.

(4) Exploiter les résultats précédents pour démontrer l'inégalité (1).