1 Questions de cours

Exercice 1 : intégration par parties.

1. Énoncer le théorème d'intégration par parties pour des fonctions de classe C^1 sur $[a;b]$.
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_1^x e^t \ln(t)dt}{e^x \ln(x)} = 1$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \, dx$.

Exercice 2 : changement de variables.

1. Donner le théorème de changement de variable pour une fonction continue sur un segment.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$ et $\displaystyle\int_0^1 e^x \cos(e^x)\, dx$.

Exercice 3 : théorème fondamental de l'analyse.

1) Énoncer le théorème fondamentale de l'analyse reliant l'intégration et la dérivation.

2) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et g définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Montrer que si g est décroissante sur $\mathbb{R}$ alors $f \equiv 0$. *Indication : on établira le tableau de signe de la fonction* $G : x \mapsto \left(\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right)^2$.

Exercice 4 : sommes de Riemann.

1. Donner le résultat concernant le calcul d'une intégrale par les sommes des Riemann.
2. Expliciter le résultat pour une fonction f continue sur $[a;b]$ dans le cas d'une subdivision régulière, i.e. de pas $\frac{b-a}{n}$. Préciser ce résultat lorsque $a = 0$ et $b = 1$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 5 : l'intégrale est définie.

1. Montrer le résultat suivant : soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et positive (c'est-à-dire pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geq 0$) ; dans ce cas, si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ alors $f \equiv 0$.
2. Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ continue telle que $f \neq 0$ et $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$, où $f^2 = f \times f$. Montrer que $f \equiv 1$.

Exercice 6 : inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue (par morceaux). On note $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. On suppose $m > 0$.

1. Étudier les variations de φ définie sur $[m;M]$ par $t \mapsto \dfrac{t}{M} + \dfrac{m}{t}$.

2. Montrer que $2\sqrt{\frac{m}{M}}(b-a) \leq \frac{1}{M}\int_a^b f(t)dt + m\int_a^b \frac{dt}{f(t)} \leq (1+\frac{m}{M})(b-a)$.
3. Donner l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales.
4. Montrer que $(b-a)^2 \leq \int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{dt}{f(t)} \leq (b-a)^2\frac{(m+M)^2}{4mM}$.

2 Calcul d'intégrales et de primitives

Exercice 7 : intégration par parties. Calculer les intégrales suivantes :

$$C_1 = \int_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx; \quad C_2 = \int_0^1 (x^2+1)\cos x\,dx; \quad C_3 = \int_1^2 (3x^2+x+1)\ln(x)\,dx.$$

Exercice 8 : changement de variables. Calculer les intégrales suivantes :

$$D_1 = \int_e^3 \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx;\ D_2 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x)+1)}\,dx;\ D_3 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx;\ D_4 = \int_{1/2}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$$

Indications : poser $x = \sin u$ dans D_3 ; poser $y = 1/x$ dans D_4.

Exercice 9 : calculs d'intégrales. Calculer les intégrales suivantes :

$$K_1 = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx;\ K_2 = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx;\ K_3 = \int_{-1}^1 (\arccos x)^2\,dx;$$

$$K_4 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx;\ K_5 = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx;\ K_6 = \int_{1/2}^3 \frac{dx}{x^2-x+1}; K_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx;$$

$$K_8 = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}\,dx; \quad K_9 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx \quad K_{10} = \int_0^1 \arcsin^2(x)dx.$$

Exercice 10 : changement de variables. Calculer les intégrales suivantes. Pour le calcul de I_1, on posera $t = \sin x$. Deviner la suite. Que peut-on dire en général ?

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,dx; \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\cos^3 x\,dx; \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^2 x\,dx.$$

Exercice 11 : linéarisation de polynômes trigonométriques. Calculer par linéarisation la valeur des intégrales suivantes :

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx \quad \text{et} \quad J_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\sin^4 x\,dx.$$

Exercice 12 : encore un peu de trigonométrie...

1. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos(\frac{\pi}{4}-x)\right)dx$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx$.
   Indication : on exprimera $1+\tan(x)$ en fonction de $\cos(\frac{\pi}{4}-x)$.

Exercice 13 : calculs de primitives. Déterminer les primitives suivantes :

$$\int (x^3 - x^2 + 2x - 3)\sin(x)dx,\ \int (x^2 - x + 3)e^{2x}dx,\ \int \frac{dx}{x^3+1},\ \int x^3\cos(x)dx,\ \int \frac{x^3}{x^2+2x+2}dx.$$

Exercice 14 : sommes de Riemann. Déterminer les limites suivantes, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\lim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4};\quad \lim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sin(\frac{k\pi}{n});\quad \lim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2};\quad \lim_{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\exp\left(\frac{k+2n}{n}\right);\quad \lim_{+\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}.$$

Exercice 15 : sommes de Riemann.

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2n}$. Puis en déduire la limite de $\displaystyle v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

3 Exercices d'approfondissement

Exercice 16 : intégrale d'une fonction périodique.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue périodique, de période $T > 0$. Montrer que la quantité $\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx$ ne dépend pas de α.

Exercice 17 : première formule de la moyenne.

Soit f une fonction continue sur $I = [a,b]$. On considère une fonction g positive et Riemann-intégrable sur I, telle que $\displaystyle\int_{[a,b]} g(x)\,dx > 0$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que

$$\int_{[a,b]} f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_{[a,b]} g(x)\,dx.$$

Exercice 18 : Lemme de Riemann.

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{C})$, démontrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.

Exercice 19 : monotonie de l'intégrale.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{n^2}$.
3. Montrer $\forall\, n \geq 2$, $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^2} \leq u_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2}$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge, lorsque n tend vers l'infini, vers un nombre L appartenant au segment $[1,2]$.

Exercice 20 : monotonie de l'intégrale.

On pose : $\displaystyle I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx,\ J = \int_0^2 e^{x^2}\,dx$ et $\displaystyle K = \int_0^1 e^{-x^2}\,\sin(x)\,dx$. Montrer que :

1. $0 \leq I \leq 1$;
2. $I \leq J$;
3. $\displaystyle |K| \leq \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{e}\Big)$.

Exercice 21 : intégrale de Wallis.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(x)dx$.

1. Calculer W_0, W_1 et W_2. Puis étudier le sens de variation de la suite $(W_n)_n$.
2. Établir une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.
3. Montrer que la suite $\left((n+1)W_{n+1}W_n\right)_n$ est constante et en déduire que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 22 : étude d'une suite.

Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x positif, on pose : $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(t^a+1)^n}$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.
2. On suppose $a = 2$. Montrer que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_n(x) = \int_0^{\arctan(x)} \big(\cos(t)\big)^{2(n-1)}\, dt.$$

Exercice 23 : intégration par parties et changement de variables.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos(x)}$.
2. Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ (avec $a < b$) telle que $\forall\, x \in [a,b],\ f(a+b-x) = f(x)$.
Exprimer $\displaystyle\int_a^b x\, f(x)\, dx$ en fonction de $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1+\sin(x)}$.

Exercice 24 : étude d'une fonction définie par une intégrale (1).

Soit f une fonction continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{C}$. Démontrer que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} f(t)\, dt$ est dérivable sur $[-1,1]$ et calculer sa dérivée.

Exercice 25 : étude d'une fonction définie par une intégrale (2).

Pour tout $x > 0$ on pose : $F(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt$.

1. Quel est le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $F'(x)$.
3. Donner le DL de F au voisinage de $x = 1$ à l'ordre 3.

Exercice 26 : Sommes de Riemann.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Scinder en facteurs irréductibles le polynôme $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a^{2n} - 1 = (a^2-1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$.
3. On suppose $a^2 \neq 1$. À l'aide des sommes de Riemann, montrer que :
$$I(a) = \int_{[0,\pi]} \ln\left(a^2 - 2a\, \cos(t) + 1\right) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \\ 2\pi\, \ln|a| & \text{si } |a| > 1. \end{cases}$$