Contrôle continu 2 : jeudi 2 avril 2015

Durée : 20 minutes. La calculatrice Université de Bordeaux est autorisée mais ne servira pas. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (5 points). Soient $p, q > 0$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue. On considère la fonction g définie sur $[a; b]$ par $g(x) = pf(a) + qf(b) - (p + q)f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$.

Exercice 2 : DS2 2013 (5 points). Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, telle que, pour tout $x \in]a; b[$, $f'(x) \neq 0$. Montrer que , pour tout $x \in]a; b[$, $f(x) \neq f(a)$.

Question bonus : (1 point). Sans justifications, donner un exemple de fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ mais non uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ et une autre fonction qui est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Correction du CC 2 du jeudi 2 avril 2015

Exercice 1. Tout d'abord, par somme, g est continue sur $[a; b]$. On a $g(a) = q(f(b) - f(a))$ et $g(b) = p(f(a) - f(b))$, donc $g(a)g(b) = -pq(f(a) - f(b))^2 < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a; b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire, il existe $c \in [a; b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$.

Exercice 2 : DS2 2013. On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe $x \in]a; b[$ tel que $f(x) = f(a)$. Alors, f est continue sur $[a; x]$, dérivable sur $]a; x[$ et vérifie $f(a) = f(x)$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a; x[$ tel que $f'(c) = 0$. Contradiction avec l'hypothèse que f' ne s'annule pas sur $]a; b[$. Donc, pour tout $x \in]a; b[$, $f(x) \neq f(a)$.

Question bonus. Nous avons vu que la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ mais qu'elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Par contre, nous avons vu que la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Contrôle continu 2 : jeudi 2 avril 2015

Durée : 20 minutes. La calculatrice Université de Bordeaux est autorisée mais ne servira pas. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 (5 points). Soient $p, q > 0$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue. On considère la fonction g définie sur $[a; b]$ par $g(x) = pf(a) + qf(b) - (p + q)f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in [a; b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$.

Exercice 2 : DS2 2013 (5 points). Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, telle que, pour tout $x \in]a; b[$, $f'(x) \neq 0$. Montrer que , pour tout $x \in]a; b[$, $f(x) \neq f(a)$.

Question bonus : (1 point). Sans justifications, donner un exemple de fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ mais non uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ et une autre fonction qui est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Correction du CC 2 du jeudi 2 avril 2015

Exercice 1. Tout d'abord, par somme, g est continue sur $[a; b]$. On a $g(a) = q(f(b) - f(a))$ et $g(b) = p(f(a) - f(b))$, donc $g(a)g(b) = -pq(f(a) - f(b))^2 < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a; b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire, il existe $c \in [a; b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c)$.

Exercice 2 : DS2 2013. On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe $x \in]a; b[$ tel que $f(x) = f(a)$. Alors, f est continue sur $[a; x]$, dérivable sur $]a; x[$ et vérifie $f(a) = f(x)$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a; x[$ tel que $f'(c) = 0$. Contradiction avec l'hypothèse que f' ne s'annule pas sur $]a; b[$. Donc, pour tout $x \in]a; b[$, $f(x) \neq f(a)$.

Question bonus. Nous avons vu que la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ mais qu'elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Par contre, nous avons vu que la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.