Il y a longtemps, très longtemps, au détour d'un cercle bien rond le nombre π est apparu. Ce nombre joue un rôle central pour "la quadrature du cercle" - construire à la règle et au compas un carré de surface égale à celle d'un disque donné, qui est un exemple de "problèmes grecs". Problèmes qui nous conduisent jusqu'aux travaux du génial Galois (1811-1832) inaugurant eux-même l'algèbre "moderne" (théorie des groupes puis des extensions de corps) ! Depuis l'Antiquité il est important de pouvoir connaître sa valeur (et sa nature). Or, c'est là le problème : comment la calculer ? ! Depuis Archimède (287-212 av. J.-C.), on est capable d'approcher sa valeur par $3,14$. *Mais peut-on l'exprimer comme quotient d'entiers (nombre rationnel) ? Ce serait pratique : par exemple* $\frac{355}{113} \approx 3,141592$ *(Zu Chongzhi env. 465 ap. J.-C.). L'analyse est un outil pour approcher la valeur des nombres réels non rationnel (c'est la notion de limite). Ici, nous allons nous intéresser aux intégrales de Wallis (1616-1703) bien qu'elles fournissent une mauvaise approximation de* π *(3 chiffres en 5000 étapes). En revanche, comme souvent en mathématiques, ce travail permet d'obtenir un résultat inattendu, à savoir un équivalent de* $n!$ *lorsque* n *tend vers l'infini (objet incontournable en dénombrement).*

I. Intégrales de Wallis.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

1. (a) Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale W_n est bien définie.
   (b) Calculer W_0, W_1 et W_2.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n \geq 0$. Existe-t-il un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n = 0$?
   (d) Montrer que la suite $(W_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. (a) À l'aide d'une double intégration par partie, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$,
   $$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n. \qquad (\star)$$
   (b) Montrer que la suite $(w_n)_{\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (n+1)W_nW_{n+1}$ est constante. Quelle est la valeur de cette constante ? *Indication : on calculera* w_0.
3. (a) Justifier que, pour $n \geq 1$, $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ et en déduire que $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \leq W_n \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n$.
4. (a) Montrer par récurrence, à l'aide de $(\star)$, que, pour $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} W_0 = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$.
   (b) Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2n}\,(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.
   (c) En déduire une expression de π comme limite d'une suite à définir.

La notation π *date de 1647 par Oughtred et Barrow (professeur de Newton). Elle a été internationalisé par Euler en 1748 dans son ouvrage* Introductio in analysin infinitorum. *Tout comme la notation* $f(x)$ *pour la fonction* f *appliquée à* x *et* $\sum$ *que nous utiliserons plus loin !*

II. Équivalent de Stirling (1692-1770).

On considère la suites $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \dfrac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. On admet que $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers $\ell \geq 0$.

5. À l'aide de la question 4.a), montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{2k}}{u_k^2} = \dfrac{\sqrt{2n}}{\pi} I_{2n}$.
6. Sachant que $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est croissante, justifier que $\ell > 0$. En déduire que $\ell = \sqrt{2\pi}$.
7. Déduire de la question 4.b) et de la valeur de ℓ que $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} + \circ(1)$.

Cette magnifique formule (si, si...) s'appelle l'équivalent de Stirling.

8. Soit $M > 0$. On considère la suite $(s_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $s_n = \frac{M^n}{n!}$. On va montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ puis prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 0$.
   (b) En déduire que (s_n) est décroissante à partir d'un certain rang et que $(s_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers $L \geq 0$.
   (c) En supposant que $L > 0$ obtenir une contradiction à l'aide de 8.a). Conclure.
9. On considère la suite $(t_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $t_n = \frac{n!}{n^n}$. À l'aide de l'équivalent de Stirling, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

III. Irrationalité de π.

L'irrationalité de π a été démontrée en 1761 par Lambert (1728-1777) en utilisant le développement en fraction continue de la fonction tangente. Nous présentons une autre preuve ici.

10. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction polynomiale de degré $2n$.
    (a) À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que
    $$\int_0^\pi f(t)\sin(t)dt = \big[f(\pi) + f(0)\big] - \int_0^\pi f''(t)\sin(t)dt.$$
    En particulier $\forall k \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^\pi f^{(2k)}(t)\sin(t)dt = \big[f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0)\big] - \int_0^\pi f^{(2k+2)}(t)\sin(t)dt.$
    (b) En déduire que
    $$\int_0^\pi f(t)\sin(t)dt = \big[f(\pi) + f(0)\big] - \big[f''(\pi) + f''(0)\big] + \cdots + (-1)^n\big[f^{(2n)}(\pi) + f^{(2n)}(0)\big].$$

Nous raisonnons par l'absurde, supposons que $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec a et $b \in \mathbb{N}^*$. On considère, pour $n \geq 1$, la fonction polynomiale de degré $2n$, $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n!} \cdot x^n \cdot (a - bx)^n$ et l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\sin(t)dt$.
NB : *le fait que π soit rationnel permet de voir $\pi = \frac{a}{b}$ comme une racine du polynôme à* ***coefficients entiers*** *$a - bx$. Ce fait sera utile pour les questions 13.b) et 13.c).*

11. (a) Prouver que f_n est une fonction continue positive sur $[0;\pi]$ qui s'annule seulement en 0 et en π.
    (b) En déduire que $I_n > 0$.
    (c) En majorant le trinôme du second degré $x(a - bx)$, prouver que
    $$\text{pour } 0 \leq x \leq \pi = \frac{a}{b},\ 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{a^2}{4b}\right)^n.$$
    (d) En déduire que $0 \leq I_n \leq \dfrac{\pi}{n!} \cdot \left(\dfrac{a^2}{4b}\right)^n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. *Indication : utiliser la question 8.*

Pour obtenir la contradiction, on va montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est un entier positif non nul.

On introduit la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}$ par $F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_n^{(2k)}(x)$. Alors d'après la question 10.b), $I_n = F_n(0) + F_n(\pi)$. Pour montrer que I_n est un entier, il suffit de montrer que $F_n(0)$ et $F_n(\pi)$ sont des entiers relatifs, c'est-à-dire que $f_n^{(2k)}(0)$ et $f_n^{(2k)}(\pi)$ sont des entiers relatifs. Prouvons-le.

12. Justifier que, pour $0 \leq p < n$, les dérivées de $f_n^{(p)}$ s'annulent en 0 et en π.
13. Reste à calculer $f_n^{(p)}(0)$ et $f_n^{(p)}(\pi)$ pour $p \geq n$. On note $g(x) = x^n$ et $h(x) = (a - bx)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.
    (a) Soit $p \geq n$, montrer que $f_n^{(p)}(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} g^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x)$.
    (b) Que se passe-t-il pour $g^{(k)}(0)$ selon la valeur de k ? En déduire que $f^{(p)}(0) \in \mathbb{Z}$.
    (c) De même, que se passe-t-il pour $h^{(n-k)}(\pi)$ selon la valeur de k ? En déduire que $f^{(p)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.
    (d) À l'aide de la question 12.b), déduire de ce qui précède que $I_n \geq 1$.
    (e) Conclure.