**Exercices chapitre 3 : Développements limités**

Du mardi 26 février au mardi 26 mars 2013

## Calcul de développements limités

*Exercice 1* : Montrer que la partie régulière d'un DL en 0 d'une fonction paire ne contient que des termes de degré pair.

*Exercice 2* : Ecrire le DL de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 au point 0.

*Exercice 3* : Ecrire le DL de $\ln(x)$ au à l'ordre 3 au point 1 puis au point 5.

*Exercice 4* : Ecrire le DL de $\exp(x-1)$ à l'ordre 3 au point 0. En déduire le DL de $\exp(x)$ à l'ordre 3 au point -1.

*Exercice 5* : Ecrire le DL de $\dfrac{1}{1+(x/2)}$ à l'ordre 3 au point 0. En déduire le DL de $1/x$ à l'ordre 3 au point 2.

*Exercice 6* : Ecrire le DL de $\ln(1+\dfrac{x}{e})$ à l'ordre 2 au point 0. En déduire le DL de $\ln x$ à l'ordre 2 au point $e$.

*Exercice 7* : Déterminer le DL en $x_0$ à l'ordre $n$ des fonctions : $x \mapsto e^x$ en $x_0 = 1$; $x \mapsto \cos(x)$ en $x_0 = \pi/4$.

*Exercice 8* : On définit $f$ par $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Calculer $f'(x)$. En déduire le DL de la fonction $f$ à l'ordre 5 au point 0.

*Exercice 9* : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ e^{-1/x} & si \quad x > 0 \end{cases}$

1. Montrer par récurrence qu'il existe un polynôme $P_n(x)$ tel que pour $x > 0$ , $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}\, e^{-1/x}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f^{(n)}(x)$. En déduire que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n$, $f^{(n)}(0) = 0$.
3. Ecrire la formule de Taylor-Young de $f$ à l'ordre $n$ en 0. Que peut-on dire du développement limité de $f$ en 0 ?

*Exercice 10* : Ecrire le DL en 0 à l'ordre indiqué entre parenthèses des fonctions suivantes :
$x \mapsto e^x + \cos x$ ordre 4; $x \mapsto (2x+1)\sinh(x)$ ordre 6; $x \mapsto e^x \ln(1+x)$ ordre 3; $x \mapsto \tan x$ ordre 5;
$x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ ordre 4; $x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ ordre 5; $x \mapsto \ln(\cos(x))$ ordre 4; $x \mapsto e^{\sin x}$ ordre 4;
$x \mapsto \sqrt{\cos x}$ ordre 4; $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^4}$ ordre $n$; $x \mapsto \arctan(x)$ ordre $n$; $x \mapsto \ln(-x^2+x+6)$ ordre 6.

*Exercice 11* : Déterminer le développement asymptotique en 0 à l'ordre 3 de : $f_1(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; $f_2(x) = \dfrac{\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

*Exercice 12* : Déterminer le développement limité en $+\infty$ jusqu'au terme en $\dfrac{1}{x^3}$ de :

$$f_1(x) = \sqrt{1+x^2}; \quad f_2(x) = \frac{x^3+2}{x-1}; \quad f_3(x) = \frac{x^3-2x^2+2x+2}{x-1}.$$

## Applications

*Exercice 13* : Calculer les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin x}{x - \sin x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x - x^2 \ln(1+\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - e^{-x^2}}{\sin^2 x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cosh(x)\cos x - 2}{x^4}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.

*Exercice 14* : Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$.
Etudier la fonction $f$ au voisinage de 0 en précisant bien la tangente à la courbe en ce point, ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

*Exercice 15* :
Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan x}$.

1. Montrer que l'on peut prolonger $f$ en 0 par continuité.
2. Montrer que la courbe représentative de $f$ admet une tangente au point d'abscisse 0 et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

*Exercice 16* : Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \ln x$.
Montrer que la courbe de $f$ admet au point d'abscisse 1 une tangente que l'on déterminera. Préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

*Exercice 17* : Etudier les branches infinies des courbes d'équation :

$$y = x + \sqrt{x^2 - 1}\ ; \qquad y = \frac{x}{1 + e^{1/x}}\ ; \qquad y = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}\ ;$$

*Exercice 18 : DS 2007* :
On se propose de trouver un développement asymptotique à deux termes en $0^+$ de $f(x) := \dfrac{1}{\tan^2(x)\sin(x)}$.

1. Trouver la limite de $f(x)$ et de $x^3 f(x)$ en $0^+$.
2. Trouver le développement limité de $x^3 f(x)$ à l'ordre 2 en 0.
3. En déduire le développement asymptotique à deux termes de $f(x)$ en $0^+$.

## Exercices avec des équations différentielles

*Exercice 19 : DS 2007* : On se propose de trouver le développement limité à l'ordre 9 en 0 de la fonction dérivable tangente hyperbolique $\tanh(x)$ par la méthode de l'équation différentielle.

1. Montrer que $\tanh$ vérifie l'équation différentielle $y' = 1 - y^2$.
2. Donner les raisons pour lesquelles $\tanh$ admet un développement limité de la forme

   $$\tanh(x) = x + ax^3 + bx^5 + cx^7 + dx^9 + x^{10}\varepsilon_1(x)$$

   où $a$, $b$ $c$ et $d$ sont des constantes réelles et $\varepsilon_1$ est une fonction nulle et continue en 0.
3. Donner les raisons pour lesquelles $(\tanh)'$ admet un développement limité de la forme

   $$\tanh'(x) = 1 + 3ax^2 + 5bx^4 + 7cx^6 + 9dx^8 + x^9\varepsilon_2(x)$$

   où $\varepsilon_2$ est une fonction nulle et continue en 0.
4. Trouver le développement limité à l'ordre 9 en 0 de $\tanh(x)$.

*Exercice 20* : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \dfrac{\text{Argshx}}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que $f$ satisfait l'équation différentielle $\left(x^2+1\right) y'(x) + xy(x) = 1$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 7 de $f$ en 0.

## Exercices à rendre le mardi 6 mars (falcultatif)

**Exercice 1 : session 2 printemps 2008** :

1. Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction $f$ définie sur un intervalle $[a, b]$.
2. Soit $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Montrer que $0 \leq \dfrac{1-\cos(x)}{x} \leq \sin(x)$.

**Exercice 2 : session 1 printemps 2012** :

1. Donner l'ensemble de définition puis calculer la dérivée d'ordre $n$ de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
2. Soit $x \geq 0$, montrer l'inégalité $1 - x + x^2 - x^3 + \dfrac{x^4}{(1+x)^5} \leq f(x) \leq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$.

   *Indication :* On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange à un ordre bien choisi.
3. A partir de l'inégalité précédente, trouver un réel $a$ (le plus grand possible) tel que l'inégalité

   $$\left|f(x) - \left(1 - x + x^2 - x^3\right)\right| \leq 10^{-6}$$

   soit satisfaite pour tout $x \in [0, a]$.