Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $[0;2\pi]$ par $f(x) = x - 2\sin(x)$. Par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - 2\cos(x)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Or $0 \leq x \leq 2\pi$, donc $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$. De plus, $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2\cos(x) \leq -1 \Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$.

D'où le tableau de variations de f suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$f(\pi/3)$	$\nearrow$	$f(5\pi/3)$	$\searrow$	2π

Par ailleurs, $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 2\pi$, $f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} < 0$ et $f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} > 2\pi$ (car $\sqrt{3} > \pi/3$).

On en déduit que, sur $[0;2\pi]$, f a 2 extrema globaux : $\underline{f \text{ atteint son minimum en } \frac{\pi}{3}}$, et $\underline{f \text{ atteint son maximum en } \frac{5\pi}{3}}$.

Exercice 2 :

1) Théorème des accroissements finis : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$.
Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$. Soit $x \in]0;\frac{\pi}{2}[$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $[0;x]$, dérivable sur $]0;x[$; d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0;x[$ tel que $f(x) - f(0) = xf'(c)$.
On a donc $\cos(x) - 1 = x\sin(c)$. Or $c \in]0;x[$, donc $0 \leq \sin(c) \leq \sin(x)$, car sin est croissante sur $[0;\dfrac{\pi}{2}]$ d'où, pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq 1 - \cos(x) \leq x\sin(x)$.

Enfin, comme $x \neq 0$ et $x > 0$, on obtient, pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\boxed{0 \leq \dfrac{1-\cos(x)}{x} \leq \sin(x).}$

Q1MI2M21 Math **Correction exercices à rendre : Extrema et TAF** **2015**

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie sur $[0;2\pi]$ par $f(x) = x - 2\sin(x)$. Par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - 2\cos(x)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Or $0 \leq x \leq 2\pi$, donc $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$. De plus, $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2\cos(x) \leq -1 \Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$.

D'où le tableau de variations de f suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$f(\pi/3)$	$\nearrow$	$f(5\pi/3)$	$\searrow$	2π

Par ailleurs, $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 2\pi$, $f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} < 0$ et $f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} > 2\pi$ (car $\sqrt{3} > \pi/3$).

On en déduit que, sur $[0;2\pi]$, f a 2 extrema globaux : $\underline{f \text{ atteint son minimum en } \frac{\pi}{3}}$, et $\underline{f \text{ atteint son maximum en } \frac{5\pi}{3}}$.

Exercice 2 :

1) Théorème des accroissements finis : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$.
Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$. Soit $x \in]0;\frac{\pi}{2}[$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $[0;x]$, dérivable sur $]0;x[$; d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0;x[$ tel que $f(x) - f(0) = xf'(c)$.
On a donc $\cos(x) - 1 = x\sin(c)$. Or $c \in]0;x[$, donc $0 \leq \sin(c) \leq \sin(x)$, car sin est croissante sur $[0;\dfrac{\pi}{2}]$ d'où, pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq 1 - \cos(x) \leq x\sin(x)$.

Enfin, comme $x \neq 0$ et $x > 0$, on obtient, pour $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\boxed{0 \leq \dfrac{1-\cos(x)}{x} \leq \sin(x).}$