Exercice 1 : *Calculez la dérivée de $f : x \mapsto \exp(\cos(\sqrt{x}))$ en justifiant son domaine de dérivabilité.*

La fonction f est la composée de 3 fonctions, $f = w \circ v \circ u$ avec $w(x) = \exp(x), v(x) = \cos(x)$ et $u(x) = \sqrt{x}$. Les fonctions w et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc le domaine de dérivabilité de f est égal à celui de u. Or u est dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*} =]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
Pour $x > 0$, on a $f'(x) = (v \circ u)'(x) \cdot w'(v \circ u(x)) = u'(x) \cdot v'(u(x)) \cdot w'(v(u(x))) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (-\sin(\sqrt{x})) \cdot \exp(\cos(\sqrt{x}))$.
Donc, pour $x > 0$, $\boxed{f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \cdot \exp(\cos(\sqrt{x})).}$

Exercice 2 : *Donnez le domaine de dérivabilité de $f_1 : x \mapsto \frac{1}{1+x}, f_2 : x \mapsto \frac{1}{1-x}$, et $f_3 : x \mapsto x^2e^x$ puis calculez leur dérivée d'ordre n en justifiant son existence.*

• Par quotient, la fonction f_1 est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ car son dénominateur s'annule seulement en -1.
Soit $x \neq -1$, alors $f_1'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $f_1''(x) = +\dfrac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \dfrac{2}{(1+x)^3}$, et $f_1^{(3)}(x) = -\dfrac{2 \cdot 3(1+x)^2}{(1+x)^6} = -\dfrac{6}{(1+x)^4}$.
On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq -1$, $f_1^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.
Donc, pour $x \neq -1$, $f_1^{(n+1)}(x) = -\dfrac{(-1)^n n! \cdot (n+1)(1+x)^n}{(1+x)^{2(n+1)}} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$. Par récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \neq -1$, on a $\boxed{f_1^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.}$

• Comme pour f_1, par quotient, f_2 est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Soit $x \neq 1$, alors $f_2'(x) = -\dfrac{-1}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $f_2''(x) = -\dfrac{(-1) \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$, et $f_2^{(3)}(x) = -\dfrac{2 \cdot (-3)(1-x)^2}{(1-x)^6} = \dfrac{6}{(1-x)^4}$.
On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 1$, $f_2^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.
Donc, pour $x \neq 1$, $f_2^{(n+1)}(x) = \dfrac{n! \cdot (-1) \cdot (n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2(n+1)}} = \dfrac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$. Par récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \neq 1$, on a $\boxed{f_2^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}.}$

Il faut connaître les formules des dérivées n-ième de ces 2 fonctions et savoir les redémontrer !

• La fonction f_3 est le produit de 2 fonctions de classes C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc f_3 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On note, pour $x \in \mathbb{R}, u(x) = x^2$ et $v(x) = e^{2x}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on sait que $u'(x) = 2x, u''(x) = 2$ et $\forall k \geq 3, u^{(k)}(x) = 0$. Et, pour $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, v^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$.
Donc, par la formule de Leibniz, pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_3^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) \times v^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) \times v^{(n-k)}(x) \text{ car, pour } k \geq 3, u^{(k)}(x) = 0 \\
&= \binom{n}{0} u(x) \cdot v^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u'(x) \cdot v^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} u''(x) \cdot v^{(n-2)}(x) \\
&= 1 \cdot x^2 \cdot 2^n e^{2x} + n2x \cdot 2^{n-1}e^{2x} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot 2^{n-2}e^{2x}.
\end{aligned}$$

Donc, pour $x \in \mathbb{R}, n \geq 2$, $\boxed{f_3^{(n)}(x) = \big(2^n x^2 + 2^n \cdot nx + 2^{n-2}n(n-1)\big)e^{2x}.}$

Puis, pour $x \in \mathbb{R}, n = 1$, $f_3'(x) = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}$, d'où $\boxed{f_3'(x) = 2(x + x^2)e^{2x}.}$

Et, pour $x \in \mathbb{R}, n = 2$, $f_3''(x) = 2(1 + 2x)e^{2x} + 4(x + x^2)e^{2x}$, d'où $\boxed{f_3''(x) = 2(1 + 4x + 2x^2)e^{2x}.}$