Analyse, Probabilité et Statistiques M1 MEEF **ML. Chabanol et C. Menini**

Devoir surveillé - vendredi 25 octobre 2013

Durée 3h - Documents non autorisés. Calculatrice autorisée. Les différents exercice et problèmes sont indépendants. Merci de les rédiger sur des feuilles séparées

Exercice

On exprimera toute les réponses en terme de la fonction de répartition ϕ de la loi normale centrée réduite et de sa réciproque q.
On considère une variable aléatoire Z de loi normale centrée réduite, de densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$.
1. Soit $\alpha > 0$. Donner un intervalle de fluctuation I_α centré en 0 pour Z, au seuil $1-\alpha$. On note l_α sa longueur.
2. On considère la fonction g qui à tout réel x associe $P(Z \in J_x)$, où J_x désigne l'intervalle $J_x = [x, x+l_\alpha]$. Exprimer $g(x)$ à l'aide de la fonction ϕ.
3. Montrer que g admet un maximum en un unique point x_0 que l'on déterminera.
4. Déduire des questions précédentes que parmi tous les intervalle de fluctuation au seuil $1-\alpha$ fixé, l'intervalle centré en 0 est celui qui a la plus petite longueur.

Problème 1

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On rappelle que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si f est positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.
On rappelle que par convention $0! = 1$.

Partie I

On se propose dans cette partie de re-démontrer que pour tout entier naturel n, $\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$. Ce résultat ne pourra donc pas être utilisé dans cette partie.
I.1. Montrer que pour tout x réel, $e^x \geq x+1$.
I.2. En déduire que pour tout x positif, $e^x \geq (\frac{x}{2}+1)^2$, puis que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
I.3. En déduire que pour tout entier naturel n, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
I.4. Conclure.

Partie II

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

II.1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge.
On notera dans la suite du problème

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$

II.2. A l'aide d'une intégration par parties montrer que pour tout entier naturel n

$$I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

II.3.
(a) En utilisant une loi de probabilité, que l'on précisera, justifier que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
(b) Calculer I_1 en donnant le détail des calculs.

II.4.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n

$$\begin{array}{rcl} I_{2n} & = & \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n n!} \\ I_{2n+1} & = & 2^n n! \end{array}$$

Partie III.
III.1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x) & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démontrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
III. 2. Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité de probabilité.
(a) Justifier que X admet une espérance $E(X)$ et préciser sa valeur.
(b) Justifier que X admet une variance $V(X)$ et préciser sa valeur.
III.3. On désigne par F et G les fonctions de répartitions respectives sur $\mathbb{R}$ de X et $Y = X^2$.
(a) Exprimer G en fonction de F (on sera amené à distinguer $x < 0$ et $x \geq 0$).
(b) Donner une expression analytique de F puis de G. Sur quel ensemble sont-elles dérivables ?
(c) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité, déterminer sa densité et reconnaitre sa loi.

Problème 2

Partie I
On définit la suite de terme général a_n par

$$\forall n \geq 1, \;\; a_n = \frac{\sqrt{n}\binom{2n}{n}}{4^n}$$

I.1 Calculer a_1 et, pour tout entier $n \geq 1$, le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
I.2 Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $a_n \leq \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$ (on pourra effectuer une récurrence).
I.3 Montrer que la suite (a_n) est croissante.
I.4 Justifier que la suite (a_n) converge vers un réel l et que $\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Partie II
Deux urnes A et B, initialement vides, peuvent contenir chacune au plus N boules ($N \geq 1$).
Le terme “épreuve” désignera les deux opérations suivantes :
– On choisit une urne au hasard de façon uniforme.
– On met une boule dans cette urne.
Une expérience consistera à répéter ces épreuves (en rechoisissant une urne au hasard de façon indépendante à chaque fois) jusquà ce que l’une des deux urnes soit pleine.
On note R_N la variable aléatoire égale au nombre (éventuellement nul) de boules contenues dans l’urne **qui n’est pas pleine** à la fin de l’expérience (N fait toujours référence à la contenance maximale de chaque urne)
II.1 Donner les lois de R_1 et de R_2.
II.2 Calculer leur espérance et leur variance.
Dans toute la suite du problème, $N \geq 2$.
II.3. Quel est l’ensemble des valeurs $R_N(\Omega)$ prises par R_N ?
II.4. Soit k un entier fixé appartenant à cet ensemble $R_N(\Omega)$.
(a) On considère l’événement $U_{(N-1,k)}$: ”On effectue au moins $(N-1+k)$ épreuves et à l’issue de l’épreuve $(N-1+k)$, l’urne A contient $N-1$ boules et l’urne B contient k boules.”
Justifier $P(U_{(N-1,k)}) = \frac{1}{2^{N-1+k}}\binom{N-1+k}{N-1}$.
(b) En déduire $P(R_N = k) = \frac{1}{2^{N-1+k}}\binom{N-1+k}{N-1}$.

II.5
Vérifier

$$\forall k \in [\![0, N-2]\!],\ \ 2(k+1)P(R_N = k+1) = (N+k)P(R_N = k)$$

II.6 Par sommation des égalités précédentes, en déduire

$$E[R_N] = N - (2N-1)P(R_N = N-1)$$

II.7 Montrer que lorsque N tend vers l'infini, $E[\frac{R_N}{N}]$ converge vers 1 (on pourra exprimer $E[R_N]$ à l'aide de la suite (a_n) définie dans la partie **I**)
II.8
En considérant les égalités $\forall k \in [\![0, N-2]\!],\ \ 2(k+1)^2 P(R_N = k+1) = (k+1)(N+k)P(R_N = k)$, montrer de même que

$$E[R_N^2] = (2N+1)E[R_N] - N(N-1)$$

II.9 En déduire une expression de $\mathrm{Var}(R_N)$ en fonction de N et $E[R_N]$, puis montrer que $\lim_N \mathrm{Var}(\frac{R_N}{N}) = 0$.
II.10 On pose $Y_N = \frac{R_N}{N} - E[\frac{R_N}{N}]$. Montrer que Y_N converge en probabilité vers 0. Que peut-on en déduire sur $\frac{R_N}{N}$?