Eléments de correction de l'examen - jeudi 2 mai 2013

Exercice

1-a. f est continue sur $[0,1]$ intervalle fermé borné donc elle est uniformément continue.

1-b. Avec le relation de Chasles, $T(f) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,dt$ et

$$|T(f) - T_n(f)| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(t) - f(\frac{k}{n}) \right) dt \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(t) - f(\frac{k}{n}) \right| dt.$$

Puis avec 1.a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon (= [\frac{1}{\eta}] + 1) \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad |T(f) - T_n(f)| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \varepsilon\,dt \leq \varepsilon.$$

La suite $(T_n(f))_n$ converge vers $T(f)$.

2. La linéarité résulte de la linéarité de l'intégrale et de la somme.

3-a. Pour tout f de $\mathcal{C}([0,1])$ et tout entier non nul n

$$|T_n(f)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \|f\|_\infty\,dt \leq \|f\|_\infty.$$

L'application linéaire T_n est continue et de norme inférieure ou égale à 1. Si on note 1 la fonction constante égale à 1, $T_n(1) = 1$ et $\|1\|_\infty = 1$ donc $\|T_n\| = 1$.

3-b. Pour tout f de $\mathcal{C}([0,1])$

$$|T(f)| \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\,dt \leq \|f\|_\infty$$

$T(1) = 1$ donc T est continue et de norme 1.

4-a. $T_n(f_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos(2\pi n \frac{k}{n}) = 1$ et

$$T(f_n) = \int_0^1 \cos(2\pi nt)\,dt = \left[\frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi nt) \right]_0^1 = 0.$$

4-b. $\|f_n\|_\infty = 1$ et $|(T_n - T)(f_n)| = 1$ d'où $\|T_n - T\| \geq 1$. La suite d'applications linéaires $(T_n)_n$ converge ponctuellement sur $\mathcal{C}([0,1])$ mais ne converge pas en norme.

Problème 1 - Suite de Fibonacci

Préliminaire

1-a. Les solutions sont $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1-b. ϕ et ψ sont solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ donc $\phi^2 = \phi + 1$ et $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$ (de même $\psi = 1 + \dfrac{1}{\psi}$). Toujours en utilisant que ϕ et ψ sont les deux solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ on a $\phi\psi = -1$.

2-a. Une récurrence immédiate nous donne que la suite (F_n) est à termes positifs. $F_0 \leq F_1$ puis pour $n \geq 1$, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ qui est positif. La suite est croissante.

2-b. Montrons que la suite n'est pas majoré. Notons (H_n) l'assertion : $F_n \geq n$,
(H_1) et (H_2) sont vérifiés car $F_1 = 1$ et $F_2 = 2$.
Montrons que pour tout entier $n \geq 2$, $[(H_p),\ 1 \leq p \leq n]$ implique (H_{n+1}),

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq n + n - 1 \geq n + 1$$

en utilisant (H_n) et (H_{n-1}) et que $n - 1 \geq 1$.
Nous obtenons par récurrence (forte) que pour tout $n \geq 1$, $F_n \geq n$, dont on déduit que $\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.

Partie I - Expression de F_n en fonction de n

1-a. Le déterminant du système est $\psi - \phi = -\sqrt{5} \neq 0$, c'est un système de Cramer, il admet une unique solution (a, b).

1-b.

$$a = \frac{\psi - 1}{\psi - \phi} = \frac{-1}{\psi\sqrt{5}} = \frac{\phi}{\sqrt{5}} \quad b = \frac{1 - \phi}{\psi - \phi} = \frac{1}{\phi\sqrt{5}} = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$$

2. Si on utilise directement que l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ vérifiant la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, de base les suites $(\phi^n)_n$ et $(\psi^n)_n$ alors le résultat découle immédiatement du I.1. Si on a oublié ce résultat alors on peut le retrouver en montrant par récurrence la relation (H_n) : $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \psi^{n+1})$.
Elle est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$;
montrons que pour tout $n \geq 1$, $[(H_p),\ 0 \leq p \leq n]$ implique (H_{n+1}) :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\phi+1)\phi^n - (\psi+1)\psi^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^2\phi^n - \psi^2\psi^n\right).$$

soit (H_{n+1}). On a donc (H_n) pour tout entier n.

Partie II - Une suite convergeant vers ϕ

1. $u_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{u_n}$, pour tout entier n.

2.

2-a. La fonction f est continue et décroissante sur $[1,2]$ donc $f([1,2]) = [f(2), f(1)] = [\frac{3}{2}, 2]$.

2-b. f est dérivable sur $[\frac{3}{2}, 2]$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $|f'|$ est décroissante sur $[\frac{3}{2}, 2]$ et $k = |f'(3/2)| = 4/9$.

3. $u_1 = 2 \in [\frac{3}{2}, 2]$, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$, f est dérivable sur $[\frac{3}{2}, 2]$ et avec II.2.a, $f([\frac{3}{2}, 2]) \subset [\frac{3}{2}, 2]$ d'où le résultat.

4. Tout d'abord remarquons que $f(\phi) = \phi$ et que $\phi \in [\frac{3}{2}, 2]$. Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \in [\frac{3}{2}, 2]$ et avec l'inégalité des accroissements finis

$$\forall n \geq 1 \quad |u_{n+1} - \phi| = |f(u_n) - f(\phi)| \leq k|u_n - \phi|$$

ce qui permet d'en déduire par récurrence que

$$\forall n \geq 1 \quad |u_n - \phi| \leq k^{n-1}|u_1 - \phi|.$$

Reste à vérifier que $|u_1 - \phi| \leq k$ et que $|u_0 - \phi| \leq 1$ pour pouvoir conclure.

$$|u_1 - \phi| \leq k \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq \frac{4}{9} \Leftrightarrow 19 \leq 9\sqrt{5}$$

et la dernière assertion est exacte.

$$|u_0 - \phi| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} \leq 3$$

et la dernière assertion est exacte.

5. $0 \leq k < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ et avec II.4. la suite $(u_n)_n$ converge vers ϕ.

6. Avec l'expression de F_n trouvée dans la partie I,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{\phi^{n+2} - \psi^{n+2}}{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}} = \phi \frac{1 - (\frac{\psi}{\phi})^{n+2}}{1 - (\frac{\psi}{\phi})^{n+1}}.$$

Or $|\frac{\psi}{\phi}| = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ qui est positif et strictement inférieur à 1. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \phi$.

Partie III - ϕ comme somme d'une série

1. On a vu dans les préliminaires que la suite $(F_n)_n$ est une suite croissante de termes positifs et telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n = +\infty$. On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{F_k F_{k+1}}\right)_n$ est décroissante et converge vers 0. Avec le théorème des séries alternées la série de terme général $\frac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}}$ converge.

2-a. $F_{k+2}^2 - F_{k+1}F_{k+3} = F_{k+2}(F_k + F_{k+1}) - F_{k+1}(F_{k+2} + F_{k+1}) = F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2$.

2-b. Notons pour tout entier k, $v_k = F_{k+1}^2 - F_k F_{k+2}$, avec la question précédente nous avons que pour tout entier k, $v_{k+1} = -v_k$ et avec une récurrence immédiate $v_k = (-1)^k v_0$. $v_0 = F_1^2 - F_0 F_2 = -1$, d'où pour tout entier k on a $F_{k+1}^2 - F_k F_{k+2} = (-1)^{k+1}$.

2-c. Pour tout entier k, $u_{k+1} - u_k = \frac{F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2}{F_k F_{k+1}} = \frac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}}$ avec III.2.b.

3. Avec ce qui précède, pour tout entier n,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

On a vu dans la partie II que la suite (u_n) converge vers ϕ donc la suite (S_n) converge vers $\phi - 1$, soit $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}} = \phi - 1$.

Partie IV - Série génératrice

1. F_n ne s'annule pas et on a vu dans la partie II que $\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$. Avec le critère de d'Alembert le rayon de convergence de la série entière est $1/\phi$.

2-a. Pour $|x| < \frac{1}{\phi}$,

$$f(x) = F_0 + F_1 x + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^{n-2} = 1 + x + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (F_{n-2} + F_{n-1}) x^{n-2} = 1 + x + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n + x \sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n$$

soit $f(x) = 1 + x + x^2 f(x) + x\,(f(x) - 1)$.

2-b. Avec ce qui précède pour $|x| < \frac{1}{\phi}$, $(1 - x^2 - x) f(x) = 1$ soit $f(x) = -\frac{1}{x^2+x-1}$.

3. Les solutions de $x^2 + x - 1 = 0$ sont $-\phi$ et $-\psi$, d'où

$$-\frac{1}{x^2+x-1} = -\frac{1}{(x+\phi)(x+\psi)} = \frac{1}{\phi-\psi}\frac{1}{x+\phi} + \frac{1}{\psi-\phi}\frac{1}{x+\psi} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x+\phi} - \frac{1}{x+\psi}\right).$$

En utilisant que $\phi = -\frac{1}{\psi}$, on obtient pour $|x| < \frac{1}{\phi}$,

$$-\frac{1}{x^2+x-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\psi \frac{1}{1-\psi x} + \phi \frac{1}{1-\phi x}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\psi \sum_{n=0}^{+\infty} (\psi x)^n + \phi \sum_{n=0}^{+\infty} (\phi x)^n\right)$$

les deux séries étant convergentes pour $|x| < \frac{1}{\phi}$.

Avec l'unicité du développement en série entière, nous obtenons que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\psi \times (\psi)^n + \phi \times (\phi)^n\right).$$

Partie V - Série génératrice exponentielle

1. Pour tout entier n, $\frac{F_{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{F_n} = \frac{1}{n+1}\frac{F_{n+1}}{F_n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\frac{F_{n+1}}{F_n} = 0$ avec la partie II. Le rayon de convergence est infini.

2-a. Le rayon de convergence de la série entière étant infini, g est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{F_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{n+1}}{n!} x^n \quad \text{et} \quad g''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{F_n}{(n-2)!} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{n+2}}{n!} x^n.$$

D'où

$$g''(x) - g'(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{n+2} - F_{n+1} - F_n}{n!} x^n = 0 \quad \text{et} \quad g(0) = F_0 = 1,\ g'(0) = F_1 = 1.$$

Le problème de Cauchy a une unique solution qui est la fonction g.

2-b. L'équation caractéristique associée est $r^2 - r - 1 = 0$, les solutions sont ϕ et ψ qui sont distinctes. Il existe a et b réels tels que pour tout x, $g(x) = a e^{\phi x} + b e^{\psi x}$. Pour déterminer a et b, on utilise que

$$g(0) = 1 = a + b \quad \text{et} \quad g'(0) = 1 = a\phi + b\psi.$$

Nous avons vu dans la partie I que la solution de ce système est $(a, b) = (\frac{\phi}{\sqrt{5}}, -\frac{\psi}{\sqrt{5}})$, nous obtenons que pour tout réel x

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi e^{\phi x} - \psi e^{\psi x}).$$

3. En développant en série entière les fonction $x \mapsto e^{\phi x}$ et $x \mapsto e^{\psi x}$ et en utilisant à nouveau l'unicité du développement en série entière

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{F_n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi \times \frac{\phi^n}{n!} - \psi \times \frac{\psi^n}{n!}\right).$$

Ce qui permet à nouveau d'avoir une expression de F_n en fonction de n.

Problème 2 - Transformée de Laplace

1. Soit $r \geq r_0$, f est par hypothèse continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto |f(t)| e^{-rt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc localement intégrable. De plus

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq |f(t)| e^{-rt} \leq |f(t)| e^{-r_0 t} e^{(r_0 - r)t} \leq |f(t)| e^{-r_0 t}.$$

La fonction $t \mapsto |f(t)|e^{-r_0 t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc par comparaison entre fonctions positives, $t \mapsto |f(t)|e^{-rt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $r \geq r_0$.
2-a. f est continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives et

$$\forall r \neq a \quad \int_0^T e^{at}e^{-rt}\,dt = \frac{1}{a-r}(e^{(a-r)T} - 1) \quad \text{et} \quad \int_0^T e^{at}e^{-at}\,dt = T.$$

2-b. Avec 2-a, $\int_0^T e^{at}e^{-rt}\,dt$ admet une limite finie lorsque T tend vers $+\infty$ si et seulement si $a - r < 0$, elle vaut alors $\frac{-1}{a-r}$. D'où $I_f =]a, +\infty[$ et $\mathcal{L}(f)(r) = \frac{1}{r-a}$ pour r dans I_f.
3. g est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et $t \mapsto |g(t)|e^{-rt}$ intégrable sur $[0, +\infty[$ équivaut à $t \mapsto |h(t)|e^{-(r-a)t}$ intégrable sur $[0, +\infty[$, soit $r \in I_g$ équivaut à $r - a \in I_h$. g est dans $\mathcal{F}$ et $I_g = a + I_h$. De plus pour tout r dans I_g, $r - a$ est dans I_h et

$$\mathcal{L}(g)(r) = \int_0^{+\infty} h(t)e^{at}e^{-rt}\,dt = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-(r-a)t}\,dt = \mathcal{L}(h)(r-a)$$

4. f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable, à valeurs positives et

$$\forall r > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{t \to +\infty} t^2 f_n(t)e^{-rt} = 0 \quad \Leftrightarrow f_n(t)e^{-rt} \ll_{+\infty} \frac{1}{t^2}.$$

Par comparaison entre fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} f_n(t)e^{-rt}\,dt$ converge. On a ainsi que $]0, +\infty[\subset I_{f_n}$ puis l'égalité car $\int_0^{+\infty} t^n\,dt$ diverge pour tout entier n.
5. Prenons f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = 1$ pour t dans $[0, 1]$ et $f(t) = \frac{1}{t^2}$ pour t dans $]1, +\infty[$.
f est continue sur $[0, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge donc $[0, +\infty[\subset I_f$ et pour $r < 0$ arbitraire $\lim_{t \to +\infty} f(t)e^{-rt} = +\infty$, l'intégrale diverge grossièrement. D'où $I_f = [0, +\infty[$.
6. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ convient. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable, strictement positive. Pour tout réel r, $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t^2}e^{-rt} = 0$ donc $e^{-t^2}e^{-rt} \ll_{+\infty} \frac{1}{t^2}$ et par comparaison entre fonctions positives, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}e^{-rt}\,dt$ converge pour tout réel r.
7. A l'aide d'une intégration par parties, pour tout r de I_f et tout $T > 0$

$$\int_0^T f'(t)e^{-rt}\,dt = (f(T)e^{-rT} - f(0)) + r\int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt.$$

Par hypothèses $\lim_{T \to +\infty} f(T)e^{-rT} = 0$ et $\lim_{T \to +\infty} \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$ existe car pour r dans I_f, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-rt}\,dt$ est absolument convergente donc convergente. D'où le résultat en prenant la limite quand T tend vers $+\infty$.
8-a. Pour tout entier naturel n, f_{n+1} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout tout r de $I_{f_{n+1}} =]0, +\infty[$, $\lim_{T \to +\infty} f_{n+1}(T)e^{-rT} = 0$. De plus $f'_{n+1} = (n+1)f_n$ et avec la question précédente on a

$$\mathcal{L}(f'_{n+1})(r) = -f_{n+1}(0) + r\mathcal{L}(f_{n+1})(r) \Rightarrow (n+1)\mathcal{L}(f_n)(r) = r\mathcal{L}(f_{n+1})(r).$$

8-b. Avec 2. en prenant $a = 0$ on obtient que pour tout r de $]0, +\infty[$, $\mathcal{L}(f_0)(r) = \frac{1}{r}$. Notons (H_n) l'assertion : $\forall r \in]0, +\infty[\ \mathcal{L}(f_n)(r) = \frac{n!}{r^{n+1}}$. (H_0) est vérifiée, montrons que pour tout entier naturel n, (H_n) implique (H_{n+1}). Avec 8-a. pour tout $r > 0$, $\mathcal{L}(f_{n+1})(r) = \frac{n+1}{r}\mathcal{L}(f_n)(r) = \frac{n+1}{r}\frac{n!}{r^{n+1}}$ avec (H_n), soit (H_{n+1}). On a bien l'égalité attendue pour tout entier naturel n.
9-a. On pose $h(x, t) = f(t)e^{-xt}$ pour (x, t) dans $[r_0, +\infty[\times[0, +\infty[$.
Pour tout t de $[0, +\infty[$, $h(\cdot, t)$ est continue sur $[r_0, +\infty[$.
Pour tout x de $[r_0, +\infty[$, $h(x, \cdot)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Pour tout (x, t) de $[r_0, +\infty[\times[0, +\infty[$, $|h(x, t)| \leq |f(t)|e^{-r_0 t}$ et la fonction $t \mapsto |f(t)|e^{-r_0 t}$ est bien continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ par hypothèse sur f.
Avec le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $[r_0, +\infty[$.
9-b. Avec la question précédente, pour tout r de I_f $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $[r, +\infty[$ donc en particulier en r ; $\mathcal{L}(f)$ est continue sur I_f.