Eléments de correction du Devoir surveillé du 10 Novembre 2015.

Exercice 1 : (1) *Soit* $f_n(x) = n^2 x^n \ln(x)$. *Calculer*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[e^{-1},1]} f_n(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{[e^{-1},1]} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Existe-t-il une fonction g *intégrable sur* $[e^{-1}, 1]$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $x \in [e^{-1}, 1]$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *?*

Pour tout entier n, f_n est continue sur $[e^{-1}, 1]$ donc intégrale de Lebesgue et de Riemann coïncident et avec une intégration par parties

$$\int_{[e^{-1},1]} f_n(x)\,dx = \left[n^2 \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x)\right]_{e^{-1}}^{1} - \int_{e^{-1}}^{1} n^2 \frac{x^n}{n+1}\,dx = \frac{n^2}{(n+1)^2}\left((n+2)e^{-(n+1)} - 1\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+2)e^{-(n+1)} = 0$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[e^{-1},1]} f_n(x)\,dx = -1$$

Pour tout x de $[e^{-1}, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 x^n = 0$ (croissance comparée avec $|x| < 1$) et pour tout entier n, $f_n(1) = 0$, d'où

$$\int_{[e^{-1},1]} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0$$

(f_n) est une suite de fonctions mesurables qui converge en tout point de $[e^{-1}, 1]$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[e^{-1},1]} f_n(x)dx \neq \int_{[e^{-1},1]} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

par contraposée du théorème de convergence dominée il n'existe pas de fonction g intégrable sur $[e^{-1}, 1]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [e^{-1}, 1]$, $|f_n(x)| \leq g(x)$.

(2)*Calculer*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} (1 + (\sin(x))^n) x e^{-x^2}\; dx.$$

Pour tout entier n et tout réel x, on pose $f_n(x) = (1 + (\sin(x))^n) x e^{-x^2}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ donc mesurable.

$\forall x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $|\sin(x)| < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sin(x))^n = 0$. L'ensemble $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ est dénombrable donc de mesure de Lebesgue nulle, soit

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + (\sin(x))^n\right) x e^{-x^2} = x e^{-x^2} \quad p.p.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) \leq |x| e^{-x^2}$ et la fonction $x \to |x| e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

En effet par parité $\int_{\mathbb{R}} |x| e^{-x^2}\,dx = 2\int_{[0,+\infty[} x e^{-x^2} = \left[-e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = 1$ (on pouvait aussi utiliser les théorèmes de comparaison entre fonctions positives des intégrales généralisées).

Avec le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} (1 + (\sin(x))^n) x e^{-x^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

(3)*Pour* $n \geq 1$, *soit* $f_n(x) = \arctan(nx) e^{-x^n}$.

Calculer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ *sur* $[0,+\infty[$ *puis* $\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,+\infty[} f_n(x)\ dx$.
Pour tout $n \geq 1$, $f_n(0) = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
Pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(nx) = \frac{\pi}{2}$ d'où avec le produit de limites
pour tout x de $]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}$;
pour $x = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \frac{\pi}{2e}$;
pour $x > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée.
Pour tout entier n, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ donc mesurable.
Avec ce qui précède, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2}\chi_{]0,1[}$ *p.p.*
$\forall x > 1$, $-x^n \leq -x$, la fonction arctan est majorée par $\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [0,+\infty[\quad 0 \leq f_n(x) \leq g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x \in [0,1] \\ \frac{\pi}{2}e^{-x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction g est intégrable sur $[0,+\infty[$ et avec le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} f_n(x)\,dx = \int_{[0,+\infty[} \frac{\pi}{2}\chi_{]0,1[}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 2 : *Soit* $(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ *un espace mesuré avec* $\mu(\Omega) \neq 0$ *et soit* $f : \Omega \to [0,+\infty[$ *une fonction mesurable.*
(1)*Montrer qu'il existe un ensemble* $A \in \mathcal{T}$ *tel que* $\mu(A) > 0$ *et* f *soit bornée sur* A.
On pourra considérer les ensembles $A_n = \{x \in \Omega;\ f(x) \leq n\}$.
$A_n = f^{-1}([0,n])$, $[0,n]$ est fermé donc est un borélien et f mesurable ; A_n est un élément de $\mathcal{T}$ pour tout entier n.
$(A_n)_n$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$ et $\bigcup\limits_n A_n = \Omega$ car f ne prend que des valeurs finies, d'où

$$\lim_n \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu(\Omega) > 0$$

La limite est strictement positive donc il existe un entier n tel que $\mu(A_n) > 0$ et f bornée sur $A_n \in \mathcal{T}$.
(2)*Montrer que si* $\mu(\{x \in \Omega;\ f(x) > 0\}) > 0$, *alors il existe* $B \in \mathcal{T}$ *tel que* $\mu(B) > 0$ *et* f *soit minorée sur* B *par une constante strictement positive.*
On pose pour tout entier $n > 0$ $B_n = \{x \in \Omega\ ;\ \frac{1}{n} < f(x)\}$, $B_n = f^{-1}\left(]\frac{1}{n},+\infty[\right)$ est élément de $\mathcal{T}$ comme image réciproque d'un ouvert par f mesurable.
$(B_n)_n$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$ et $\bigcup\limits_n B_n = \{x \in \Omega\ ;\ f(x) > 0\}$. On termine de façon analogue à la question précédente

$$\lim_n \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_n B_n\right) = \mu(\{x \in \Omega;\ f(x) > 0\}) > 0$$

La limite est strictement positive donc il existe un entier n tel que $\mu(B_n) > 0$ et f est minorée par $\frac{1}{n} > 0$ sur $B_n \in \mathcal{T}$.

Exercice 3 : *Soit* $(\Omega,\mathcal{T},\mu)$ *un espace mesuré,* X *un ensemble et* $h : \Omega \to X$ *une application.*
On note $\mathcal{M} = \{B \subset X;\ h^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$.
(1) *Montrer que* $\mathcal{M}$ *est une tribu sur* X.
$\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ et

— $\emptyset \in \mathcal{M}$ car $h^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$;

— soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}$ alors $h^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} h^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ est une tribu donc stable par union au plus dénombrable ;
— soit $B \in \mathcal{M}$ alors $h^{-1}(X \setminus B) = \Omega \setminus h^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ est une tribu donc stable pour le complémentaire.

(2) *Pour $B \in \mathcal{M}$, soit $\mu_h(B) = \mu(h^{-1}(B))$.*
Montrer que μ_h est une mesure sur $\mathcal{M}$.
μ_h est définie de $\mathcal{M}$ dans $[0, +\infty]$ et
— $\mu_h(\emptyset) = \mu(h^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$;
— soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}$ deux à deux disjoints, alors

$$\mu_h\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \mu_h\left(h^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in I} h^{-1}(B_i)\right) = \sum_{i\in I} \mu\left(h^{-1}(B_i)\right) = \sum_{i\in I} \mu_h(B_i)$$

car $\left(h^{-1}(B_i)\right)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrable d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{T}$ et μ est une mesure sur $\mathcal{T}$.

(3) *Soit $B \in \mathcal{M}$. Montrer que $\int_X \chi_B \, d\mu_h = \int_\Omega \chi_B \circ h \, d\mu$, où χ_B est la fonction indicatrice de B.*
Indication : remarquer que $\chi_B \circ h = \chi_{h^{-1}(B)}$.

$$\int_X \chi_B \, d\mu_h = \mu_h(B) = \mu\left(h^{-1}(B)\right) = \int_\Omega \chi_{h^{-1}(B)} \, d\mu = \int_\Omega \chi_B \circ h \, d\mu$$

(4) *Montrer que pour toute fonction mesurable $f : (X, \mathcal{M}) \to ([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[)$,*

$$\int_X f \, d\mu_h = \int_\Omega f \circ h \, d\mu.$$

Avec la linéarité des intégrales on a l'égalité pour toute fonction étagée puisque c'est une combinaison linéaire finie d'indicatrices d'ensembles mesurables.
Toute fonction mesurable positive est la limite d'une suite croissante de fonctions étagées, on obtient l'égalité demandée avec le théorème de convergence monotone.

Exercice 5 : *Dans cet exercice μ_1 désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.*
(1) *Soit $F \subset [0, 1]$ un fermé de $[0, 1]$ tels que $\mu_1(F) = 1$. Montrer $F = [0, 1]$.*
(considérer $[0, 1] \setminus F$ qui est un ouvert...)
Si $[0, 1] \setminus F$ n'est pas vide alors il existe $0 < a < b < 1$ tel que $]a, b[\subset [0, 1] \setminus F$ et $\mu_1([0, 1] \setminus F) \geq b - a > 0$, nous avons une contradiction avec $\mu_1(F) = 1 = \mu_1([0, 1])$.
(2) *Le résultat du (1) reste t-il vrai en remplaçant μ_1 par une mesure finie sur $[0, 1]$ muni de la tribu borélienne de $[0, 1]$?*
La réponse est non, on peut prendre comme contre-exemple la mesure de Dirac δ_0 et le fermé $F = [0, \frac{1}{2}]$, on a bien $\delta_0(F) = \delta_0([0, 1])$ mais $F \neq [0, 1]$.
(3) *Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite dense dans $[0, 1]$, c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est égale à $[0, 1]$. Soit c une constante avec $0 < c < 1$. On pose*

$$U =]0, 1[\cap \left(\cup_{n\geq 1}]a_n - \frac{c}{2^{n+1}}, a_n + \frac{c}{2^{n+1}}[\right).$$

(i) *Montrer que U est un ouvert et que $\mu_1(U) < 1$.*
Une union quelconque d'ouverts est ouverte donc $\cup_{n\geq 1}]a_n - \frac{c}{2^{n+1}}, a_n + \frac{c}{2^{n+1}}[$ est ouvert, une intersection finie d'ouverts est ouverte donc $U =]0, 1[\cap \left(\cup_{n\geq 1}]a_n - \frac{c}{2^{n+1}}, a_n + \frac{c}{2^{n+1}}[\right)$ est ouvert.

$$\mu_1(U) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_1\left(]a_n - \frac{c}{2^{n+1}}, a_n + \frac{c}{2^{n+1}}[\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2c}{2^{n+1}} = c$$

or $0 < c < 1$ d'où $\mu_1(U) < 1$.

(ii) *Déterminer $\overline{U}$. Est-ce que $\mu_1(\overline{U} \setminus U) = 0$?*

$$\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset U \subset]0,1[\Rightarrow [0,1] = \overline{\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{U} \subset [0,1] \Rightarrow \overline{U} = [0,1]$$

$\mu_1(\overline{U} \setminus U) = \mu_1([0,1]) - \mu_1(U) \geq 1 - c > 0$ soit $\mu_1(\overline{U} \setminus U) \neq 0$

(iii)*Si F est un fermé de $[0,1]$, a-t-on toujours $\mu_1(F) = \sup\{\mu_1(V);\ V$ ouvert inclus dans $F\}$?*

La réponse est non. Prenons comme fermé $F = \overline{U} \setminus U$ et V un ouvert inclus dans F, nous allons montrer qu'alors $V = \emptyset$ bien que $\mu_1(F) > 0$.

$$V \subset \overline{U} \setminus U \Rightarrow V \cap U = \emptyset \Rightarrow V \cap \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$$

or tout ouvert non vide d'un espace E a une intersection non vide avec une suite dense de E, la contraposée nous permet de conclure que $V = \emptyset$