**Université Bordeaux 1,** **N1MA5012 Intégration**
**Mercredi 26 Octobre 2011**

**Devoir surveillé**

Dans tout ce sujet, $\Omega$ désigne un ensemble non vide muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure positive $\mu$.

**I.** Soit $(A_k)$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$.
1) Montrer que si la suite $(A_k)$ est croissante alors $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_k A_k)$.
2) Quel énoncé a-t-on pour les suites décroissantes $(A_k)$ ?
3) Montrer que $\mu(\bigcup_k A_k) \le \sum_k \mu(A_k)$.

**II.** Soit $\phi : \Omega \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On définit pour tout $A \in \mathcal{T}$,

$$\nu(A) = \int_A \phi \, d\mu.$$

1) Montrer que $\nu$ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
2) Sous quelle condition sur $\phi$, $\nu$ est une mesure de probabilités ?
3) Montrer que tout ensemble $\mu-$négligeable est $\nu-$négligeable.
4) Soit $f : \Omega \to [0, \infty]$ une fonction mesurable. Exprimer $\int_\Omega f \, d\nu$ en fonction d'une intégrale relativement à $\mu$ (indication : commencer par les fonctions étagées).

**III.** On suppose dans cet exercice que $\mu(\Omega) < \infty$.
Soit $(f_n)$ une suite de fonctions mesurables réelles et convergeant $\mu$-p.p. vers une fonction mesurable $f$.
1) Soit $\delta > 0$ fixé. On définit $A_n(\delta) = \bigcup_{j\ge n} \{x \in \Omega, |f_j(x) - f(x)| > \delta\}$. Donner la valeur de $\mu(\bigcap_{n\ge 1} A_n(\delta))$.
2) En observant que la suite $(A_n(\delta))_n$ est décroissante, montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe $n \ge 1$ tel que $\mu(A_n(\delta)) \le \eta$.
3) Fixons $\epsilon > 0$. Expliquer pourquoi on peut trouver une suite $n_k$ telle que pour tout $k \ge 1$

$$\mu\Big(\bigcup_{j\ge n_k} \{x \in \Omega, |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}\Big) \le \frac{\epsilon}{2^k}.$$

On pose

$$B = \bigcup_{k\ge 1} \bigcup_{j\ge n_k} \{x \in \Omega, |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}.$$

4) En déduire que $\mu(B) \le \epsilon$.
5) Montrer que pour tout $k \ge 1$,

$$|f_j(x) - f(x)| \le \frac{1}{k} \quad \forall j \ge n_k \text{ et } \forall x \in \Omega \setminus B.$$