Université Bordeaux 1, **N1MA5012 Intégration**

Devoir Maison II

Exercice I. *Fonctions eulériennes*
1) Soit $w = a + ib$ un nombre complexe (a et b réels) et x un réel strictement positif, calculer le module $|x^w|$.
2) Démontrer que l'ensemble des complexes z pour lesquels la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{z-1}$ est Lebesgue intégrable sur $]0, +\infty[$ est $P := \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$.
Ind. : on pensera à utiliser les théorèmes de convergence pour les fonctions positives vus en seconde année.
3) Démontrer que l'ensemble des couples de complexes (p, q) pour lesquels la fonction $x \mapsto x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ est Lebesgue intégrable sur $]0, 1[$ est P^2.
Ind. : la même.
On notera dans la suite de l'exercice

$$\begin{array}{c} \forall z \in P \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{z-1}\,dx \\ \forall (p,q) \in P^2 \quad B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \end{array}$$

4) Avec un changement de variable bien choisi, montrer que

$$\forall z \in P \quad \Gamma(z) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2z-1}\,du$$

5) Avec un changement de variable bien choisi, montrer que

$$\forall (p,q) \in P^2 \quad B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,d\theta$$

5) En utilisant le théorème de Fubini et un nouveau changement de variables, montrer que

$$\forall (p,q) \in P^2 \quad \Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

Exercice II. *Inégalité de Hardy*
On note $\mathcal{E}^+$ l'ensemble des fonctions mesurables $F\ :]0;\infty[\to [0;\infty]$, les tribus sur les espaces de départ et d'arrivée étant les tribus boréliennes. Soit également $p \in [1;\infty[$, et soit q l'exposant conjugué (c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ lorsque $p > 1$; $q = \infty$ lorsque $p = 1$).
1) Montrer que si $F \in \mathcal{E}^+$ est dans $L^p(\mu)$, alors

$$\|F\|_{L^p} = \sup\left\{\int_{]0;\infty[} FG\,d\mu;\ G \in \mathcal{E}^+\ ,\ \|G\|_{L^q} = 1\right\}.$$

Indication : Montrer une double inégalité et pour l'une d'elle on pourra considérer $G = \frac{F^{p/q}}{||F||_{L^p}^{p/q}}$.
2) Montrer que le résultat précédent est en fait valable pour toute $F \in \mathcal{E}^+$ (les deux membres de l'égalité précédente pouvant valoir ∞).

Soit $p \in]1;\infty[$ et soit $f \in L^p(]0;\infty[)$. On définit $F :]0;\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\,.$$

3) Justifier que $F(x)$ est bien défini pour tout réel strictement positif x.
4) Montrer que

$$\forall x > 0 \quad |F(x)| \leq \int_0^1 |f(xu)|\,du$$

5) On note pour tout réel u de $]0,1[$ et tout x de $]0,\infty[$, $\tilde{f}_u(x) = |f(ux)|$. Justifier que $\tilde{f}_u$ est dans $L^p(]0;\infty[)$ et que $\|\tilde{f}_u\|_{L^p} = u^{-1/p}\|f\|_{L^p}$.
6) En déduire que F est dans $L^p(]0;\infty[)$ et que

$$\|F\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}$$

7) Que peut-on dire pour f dans $L^\infty(]0,\infty[)$? Pour f dans $L^1(]0,\infty[)$?