Université Bordeaux 1, **N1MA5012 Intégration**

Eléments de correction du devoir Maison II

Exercice I. *Fonctions eulériennes*
1) Soit $w = a + ib$ un nombre complexe (a et b réels) et x un réel strictement positif, calculer le module $|x^w|$.
Par définition $x^w = e^{(a+ib)\ln x}$, d'où $|x^w| = e^{a \ln x} = x^{Rew}$ car $\left|e^{ib\ln x}\right| = 1$.
2) Démontrer que l'ensemble des complexes z pour lesquels la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{z-1}$ est Lebesgue intégrable sur $]0, +\infty[$ est $P := \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$.
La fonction $x \mapsto e^{-x}x^{z-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc mesurable et P est l'ensemble des complexes z tels que

$$\int_0^{+\infty} \left|e^{-x}x^{z-1}\right| dx < \infty$$

c'est-à-dire tels que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{Re(z)-1}\, dx < \infty$$

La fonction $x \mapsto e^{-x}x^{Re(z)-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intgrable, de plus elle est *positive* et

$$e^{-x}x^{Re(z)-1} \underset{0}{\sim} x^{Re(z)-1} \quad \text{et} \quad e^{-x}x^{Re(z)-1} \underset{+\infty}{\ll} \frac{1}{x^2}$$

L'intégrale de Riemann $\int_0^1 x^{Re(z)-1}\, dx$ converge si et seulement si $Re(z) - 1 > -1$, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge donc avec les théorèmes pour les intégrales généralisés dans le cas d'équivalence et de comparaison entre fonctions *positives*, $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{Re(z)-1}\, dx$ converge si et seulement si $Re(z) > 0$.
3) Démontrer que l'ensemble des couples de complexes (p, q) pour lesquels la fonction $x \mapsto x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ est Lebesgue intégrable sur $]0, 1[$ est P^2.
De même qu'à la question précédente.
La fonction $x \mapsto x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ est continue donc mesurable. La fonction $x \mapsto \left|x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right|$ est continue sur $]0, 1[$ donc localement intégrable, elle est positive et

$$\left|x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right| \underset{0}{\sim} x^{Re(p)-1} \quad \text{et} \quad \left|x^{p-1}(1-x)^{q-1}\right| \underset{1}{\sim} (1-x)^{Re(q)-1}$$

Les intégrales de Riemann $\int_0^1 x^{Re(p)-1}\, dx$ et $\int_0^1 (1-x)^{Re(q)-1}\, dx$ convergent si et seulement si $Re(p) - 1 > -1$ et $Re(q) - 1 > -1$, avec les théorèmes pour les intégrales généralisés dans le cas d'équivalence entre fonctions *positives*, $x \mapsto x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ est Lebesgue intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si (p,q) est dans P^2.

On notera dans la suite de l'exercice

$$\begin{array}{rl} \forall z \in P & \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx \\ \forall (p,q) \in P^2 & B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \end{array}$$

4) Avec un changement de variable bien choisi, montrer que

$$\forall z \in P \quad \Gamma(z) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2z-1}\, du$$

L'application carré est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même, avec le théorème de changement de variables

$$\forall z \in P \quad \Gamma(z) = \int_{]0,+\infty[} e^{-u^2} u^{2(z-1)} |2u|\, du$$

soit l'égalité demandée.

5) Avec un changement de variable bien choisi, montrer que

$$\forall (p,q) \in P^2 \quad B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\, d\theta$$

L'application $\sin^2$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0,\frac{\pi}{2}[$ sur $]0,1[$, avec le théorème de changement de variables

$$\forall (p,q) \in P^2 \quad B(p,q) = \int_{]0,\pi/2[} (\sin\theta)^{2(p-1)}(1-\sin^2\theta)^{q-1} |2\sin\theta\, \cos\theta|\, d\theta$$

soit l'égalité demandée en utilisant que $1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$.

5) En utilisant le théorème de Fubini et un nouveau changement de variables, montrer que

$$\forall (p,q) \in P^2 \quad \Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

Si l'on prend p et q réels alors on travaille avec des fonctions positives et on peut utiliser le théorème de Tonelli ce qui allège un peu la rédaction.

Dans le cas général (p et q complexes) il faut tout d'abord justifier que la fonction $(u,v) \mapsto e^{-u^2}u^{2p-1}e^{-v^2}v^{2q-1}$ est intégrable sur l'espace produit $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Elle est mesurable car continue et en utilisant le théorème de Tonelli

$$\begin{array}{rcl} \int_{]0,+\infty[^2} \left| e^{-u^2}u^{2p-1}e^{-v^2}v^{2q-1} \right| dudv & = & \int_{]0,+\infty[} \left| e^{-u^2}u^{2p-1} \right| \left(\int_{]0,+\infty[} \left| e^{-v^2}v^{2p-1} \right| dv \right) du \\ & = & \Gamma(Rep)\Gamma(Req) < +\infty \quad \forall (p,q) \in P^2 \end{array}$$

Elle est donc intégrable sur sur l'espace produit $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

En utilisant maintenant le théorème de Fubini

$$\begin{array}{rcl} \int_{]0,+\infty[^2} e^{-u^2} u^{2p-1} e^{-v^2} v^{2q-1}\, dudv & = & \int_{]0,+\infty[} e^{-u^2} u^{2p-1} \left(\int_{]0,+\infty[} e^{-v^2} v^{2p-1}\, dv\right) du \\ & = & \Gamma(p)\Gamma(q) \quad \forall (p,q) \in P^2 \end{array}$$

On va maintenant faire un changement en coordonnées polaires pour conclure. L'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi \ :]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[& \to &]0,+\infty[^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, de jacobien $jac(\varphi)(r,\theta) = r$. Avec le théorème de changement de variables

$$\int_{]0,+\infty[^2} e^{-u^2-v^2} u^{2p-1} v^{2q-1}\, dudv = \int_{]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[} e^{-r^2} (r\cos\theta)^{2p-1} (r\sin\theta)^{2q-1}\, rdrd\theta$$

Il faut maintenant à nouveau utiliser le théorème de Fubini. La fonction $(r,\theta) \mapsto e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} (\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1}$ est continue donc mesurable sur $]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[$. De plus elle est intégrable car avec le théorème de Tonelli

$$\begin{array}{c} \int_{]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[} \left| e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} (\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1} \right| drd\theta \\ = \int_{]0,+\infty[} \left| e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \right| \left(\int_{]0,\frac{\pi}{2}[} \left|(\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1}\right| d\theta\right) dr \\ = \Gamma(Re(p+q)) B(Re(q), Re(p)) < +\infty \quad \forall (p,q) \in P^2 \end{array}$$

On peut maintenant appliquer le théorème de Fubini et

$$\begin{array}{c} \int_{]0,+\infty[\times]0,\frac{\pi}{2}[} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} (\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1}\, drd\theta \\ = \int_{]0,+\infty[} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \left(\int_{]0,\frac{\pi}{2}[} (\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1}\, d\theta\right) dr \\ = \Gamma(p+q) B(q,p) \quad \forall (p,q) \in P^2 \end{array}$$

Ce qui termine la preuve de l'égalité $\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$ pour tout (p,q) dans P^2 par symétrie immédiate de la fonction B (faire le changement de variable $u = x - 1$ dans $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$).

Exercice II. *Inégalité de Hardy*
On note $\mathcal{E}^+$ l'ensemble des fonctions mesurables $F\ :]0;\infty[\to [0;\infty]$, les tribus sur les espaces de départ et d'arrivée étant les tribus boréliennes. Soit également $p \in [1;\infty[$, et soit q l'exposant conjugué (c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ lorsque $p > 1$; $q = \infty$ lorsque $p = 1$).
1) Montrer que si $F \in \mathcal{E}^+$ est dans $L^p(\mu)$, alors

$$\|F\|_{L^p} = \sup\left\{ \int_{]0;\infty[} FG\, d\mu;\ G \in \mathcal{E}^+\ ,\ \|G\|_{L^q} = 1 \right\}.$$

On remarque que F prend que des valeurs positives, et alors que $|F(X)| = F(X)$. Par l'inégalité de Holder :

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\int_{]0;\infty[} FG\,d\mu;\ G\in\mathcal{E}^+\ ,\ \|G\|_{L^q}=1\right\} &\le \sup\left\{\|F\|_{L^p}\|G\|_{L^q};\ G\in\mathcal{E}^+\ ,\ \|G\|_{L^q}=1\right\}\\
&\le \sup\left\{\|F\|_{L^p}\ ;\ G\in\mathcal{E}^+\ ,\ \|G\|_{L^q}=1\right\}\\
&\le \|F\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Si $\|F\|_{L^p}=0$ alors on a terminé puisque cela implique que F est nulle presque partout et alors pour tout avec $G\in\mathcal{E}^+$, $\int_{]0;\infty[} FG\,d\mu = 0$.
Si $p=1$ alors la fonction constante égale à 1 est mesurable positive et $\|1\|_\infty = 1$, de plus

$$\sup\left\{\int_{]0;\infty[} FG\,d\mu;\ G\in\mathcal{E}^+\ ,\ \|G\|_{L^\infty}=1\right\} \ge \int_{]0;\infty[} F\,1\,d\mu = \|F\|_{L^1}$$

car F est positive.
Reste le cas $\|F\|_{L^p}>0$ et pour $p,q\ne\infty$, on pose $G=\frac{F^{p/q}}{||F||_{L^p}^{p/q}}$ alors G est dans $\mathcal{E}^+$ et $\|G\|_{L^q}^q = \frac{1}{||F||_{L^p}^p}\int_{]0;\infty[}(|F|^p = 1$; c'est à dire $\|G\|_{L^q}=1$.
En utilisant les identités $1+\frac{p}{q}=p$ et $p-p/q=1$

$$\int_{]0;\infty[} FG\,d\mu = \frac{1}{||F||_{L^p}^{p/q}}\int_{]0;\infty[} F^{1+p/q}\,d\mu = \frac{\|F\|_{L^p}^p}{||F||_{L^p}^{p/q}} = \|F\|_{L^p}.$$

ce qui donne

$$\sup\left\{\int_{]0;\infty[} FG\,d\mu;\ G\in\mathcal{E}^+\ ,\ \|G\|_{L^q}=1\right\} \ge \|F\|_{L^p}$$

et démontre l'égalité.
2) Montrer que le résultat précédent est en fait valable pour toute $F\in\mathcal{E}^+$ (les deux membres de l'égalité précédente pouvant valoir ∞).
Nous avons montré en particulier dans la question précédente que si F est dans $L^p(\mu)$ alors $\sup\left\{\int_{]0;\infty[} FG\,d\mu;\ G\in\mathcal{E}^+\ ,\ \|G\|_{L^q}=1\right\}$ est fini. En prenant la contraposée,

$$\sup\left\{\int_{]0;\infty[} FG\,d\mu;\ G\in\mathcal{E}^+\ ,\ \|G\|_{L^q}=1\right\} = +\infty \Rightarrow \|F\|_{L^p} = +\infty$$

Supposons maintenant que $\|F\|_{L^p} = +\infty$ **on va supposer de plus que μ est σ-finie ... oubli de l'énoncé**. On note A_n la une suite *croissante* de boréliens tels que $\mu(A_n) < +\infty$ et $\bigcup_n A_n =]0,+\infty[$. F étant mesurable positive il existe une suite *croissante* (F_n) de fonctions étagées positives, qui converge vers F, on pose

$$\tilde{F}_n = F_n \mathbb{1}_{A_n}$$

ainsi pour tout entier n, $\tilde{F}_n \in L^p(]0,+\infty[)$ car $\|F_n\|_{L^p} \leq \sup_{]0,+\infty[}(F_n)\mu(A_n)^{1/p} < +\infty$ et la suite $(\tilde{F}_n)$ est encore croissante et converge vers F.
Ainsi pour tout G de $\mathcal{E}^+$

$$\int_{]0,\infty[} \tilde{F}_n G \, d\mu \leq \int_{]0,\infty[} F \, G \, d\mu$$

de plus, par ce qu'on a montré en (1) :

$$\|\tilde{F}_n\|_{L^p} = \sup \left\{ \int_{]0;\infty[} \tilde{F}_n G \, d\mu ; \; G \in \mathcal{E}^+ \; , \; \|G\|_{L^q} = 1 \right\}$$

Avec le théorème de convergence monotone $\lim_{n\to\infty} \|\tilde{F}_n\|_{L^p} = \|F\|_{L^p} = +\infty$ et donc

$$+\infty \leq \sup \left\{ \int_{]0;\infty[} FG \, d\mu ; \; G \in \mathcal{E}^+ \; , \; \|G\|_{L^q} = 1 \right\}$$

ce qui finit la démonstration.

Soit $p \in]1;\infty[$ et soit $f \in L^p(]0;\infty[)$. On définit $F :]0;\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt \, .$$

3) Justifier que $F(x)$ est bien défini pour tout réel strictement positif x.
Si $x > 0$ et $f \in L^p(]0,\infty[)$ alors $f \in L^p(]0,x[)$; ce qui implique que $f \in L^1(]0,x[)$ car $\lambda(]0,x[) = x < +\infty$ pour tout x fixé. Ainsi $F(x)$ est bien défini.
4) Montrer que

$$\forall x > 0 \quad |F(x)| \leq \int_0^1 |f(xu)| \, du$$

On fixe x et on fait le changement de variable $u = t/x$ de jacobien $1/x$ qui donne $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(xu)du$ et donc

$$|F(x)| = |\int_0^1 f(xu) \, du| \leq \int_0^1 |f(xu)| \, du.$$

5) On note pour tout réel u de $]0,1[$ et tout x de $]0,\infty[$, $\tilde{f}_u(x) = |f(ux)|$. Justifier que $\tilde{f}_u$ est dans $L^p(]0;\infty[)$ et que $\|\tilde{f}_u\|_{L^p} = u^{-1/p}\|f\|_{L^p}$.
Cette fois on fixe u et on fait le changement de variable $w = ux$ pour obtenir $\|\tilde{f}_u\|_p^p = \int_0^\infty |\tilde{f}_u(x)|^p dx = \frac{1}{u}\int_0^\infty |f(w)|^p dw$ ce qui donne le résultat.

6) En déduire que F est dans $L^p(]0;\infty[)$ et que

$$\|F\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p}$$

Avec les questions 1 et 2,

$$\|F\|_{L^p} = \sup \left\{ \int_{]0;\infty[} |F| G \, d\lambda; \; G \in \mathcal{E}^+ \; , \; \|G\|_{L^q} = 1 \right\}. \qquad (*)$$

Maintenant on fixe une fonction $G \in \mathcal{E}^+$, $\|G\|_{L^q} = 1$. Avec la question 4 :

$$\int_{]0;\infty[} |F| G \, d\lambda \leq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 |f(xu)| \, du \right) G(x) \, dx$$

Et, avec le théorème de Fubini-Tonelli (les fonctions sont positives) :

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 |f(xu)| \, du \right) G(x) \, dx = \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} |f(xu)| G(x) \, dx \right) du$$

En mettant ensemble l'équation $(*)$ et le résultat de la question 1 on obtient :

$$\|F\|_{L^p} \leq \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} |f(xu)| G(x) \, dx \right) du \leq \int_0^1 \|\tilde{f}_u\|_{L^p} \, du.$$

De plus

$$\int_0^1 \|\tilde{f}_u\|_{L^p} \, du = \int_0^1 u^{-1/p} \|f\|_{L^p} \, du = \|f\|_{L^p} \left[\frac{1}{1 - 1/p} u^{1-1/p} \right]_0^1 = \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p}$$

ce qui termine la question.

7) Que peut-on dire pour f dans $L^\infty(]0, \infty[)$? Pour f dans $L^1(]0, \infty[)$?
Si $p = \infty$ le résultat est toujours vrai. On a encore F bien définie car $L^\infty(]0, x[) \subset L^1(]0, x[)$ pour la mesure de Lebesgue (on utilise à nouveau que $]0, x[$ est de mesure de Lebesgue finie). De plus on sait que $|f| \leq \|f\|_\infty$ presque partout sur $]0, +\infty[$ d'où

$$|F(x)| \leq \int_0^1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

donc $F \in L^\infty(]0, \infty[)$ et $\|F\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
Si $p = 1$ le résultat n'est plus vrai. En prenant $f(t) = \frac{1}{t^2} \mathbb{1}(t)_{[1,+\infty[}$ on a bien $f \in L^1(]0, \infty[)$ et $\|f\|_{L^1} = 1$.
Pour $0 < x \leq 1$, $F(x) = 0$ et pour $x > 1$ $F(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.
Mais F est une fonction positive donc $\int_{[0,\infty[} F(x) dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t F(x) dx = \infty$ car $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = +\infty$, et $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$. Donc F n'est pas dans $L^1(]0, \infty[)$.