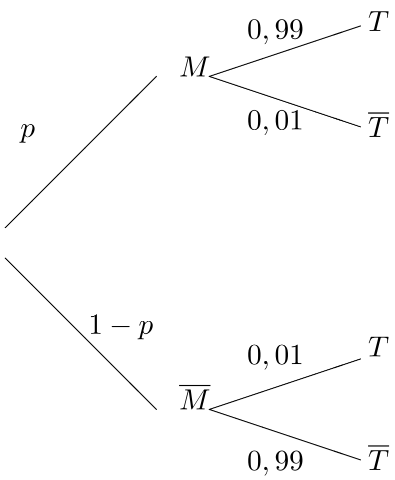
Corrigé de l'exercice 1 p 226 Déclic TS

On note M l'événement “l'individu choisi est malade” ; T l'événement “le test de l'individu choisi est positif” ; on a de plus $P(M) = p$.

1. La phrase “la probabilité qu'un individu atteint par la maladie présente un test positif est 0,99” signifie en termes de probabilités conditionnelles que $P_M(T) = 0,99$.
La phrase “la probabilité qu'un individu non atteint par la maladie présente un test négatif est également 0,99” signifie en termes de probabilités conditionnelles que $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,99$.

2.
a)



$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$ et avec l'arbre
$P(M \cap T) = P(M)P_M(T) = p \times 0,99$;
$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = p \times 0,99 + (1-p) \times 0,01 = 0,98p + 0,01$.
En multipliant numérateur et dénominateur par 100

$$f(p) = P_T(M) = \frac{99p}{98p+1}.$$

b) La fonction f est définie et dérivable sur $[0,1]$. Elle est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(p) = 99p$ et $v(p) = 98p + 1$. D'où pour p dans $[0,1]$

$$f'(p) = \frac{u'(p)v(p) - u(p)v'(p)}{v^2(p)} = \frac{99(98p+1) - 99p \times 98}{(98p+1)^2} = \frac{99}{(98p+1)^2}.$$

Elle est positive donc f est croissante sur $[0,1]$.

c)

p	0,001	0,01	0,1	0,3	0,5	0,8
$f(p)$	$\simeq 0,09$	0,5	$\simeq 0,916$	$\simeq 0,977$	$\simeq 0,99$	$\simeq 0,997$

3. On prend $p = 0,7$, nous avons donc

$$P_T(M) = f(0,7) \simeq 0,996 \quad P_T(\overline{M}) = 1 - P_T(M) \simeq 0,004.$$

Il est très peu probable que l'on ne soit pas malade lorsque le test est positif, le test est donc fiable dans ce cas.

4. On prend $p = 0,005$, nous avons donc
a) $P_T(M) = f(0,005) \simeq 0,332$.
b) $P_T(\overline{M}) = 1 - P_T(M) \simeq 0,668$.
c) Dans le cas de maladie rare étudié ici, pour une personne ayant un test positif il est encore environ deux fois plus probable pour elle de ne pas être malade que de l'être. Dans ce cas de figure, il faut procéder à d'autres tests ou examens pour préciser le diagnostic.