69 - APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES À D'AUTRES DISCIPLINES.

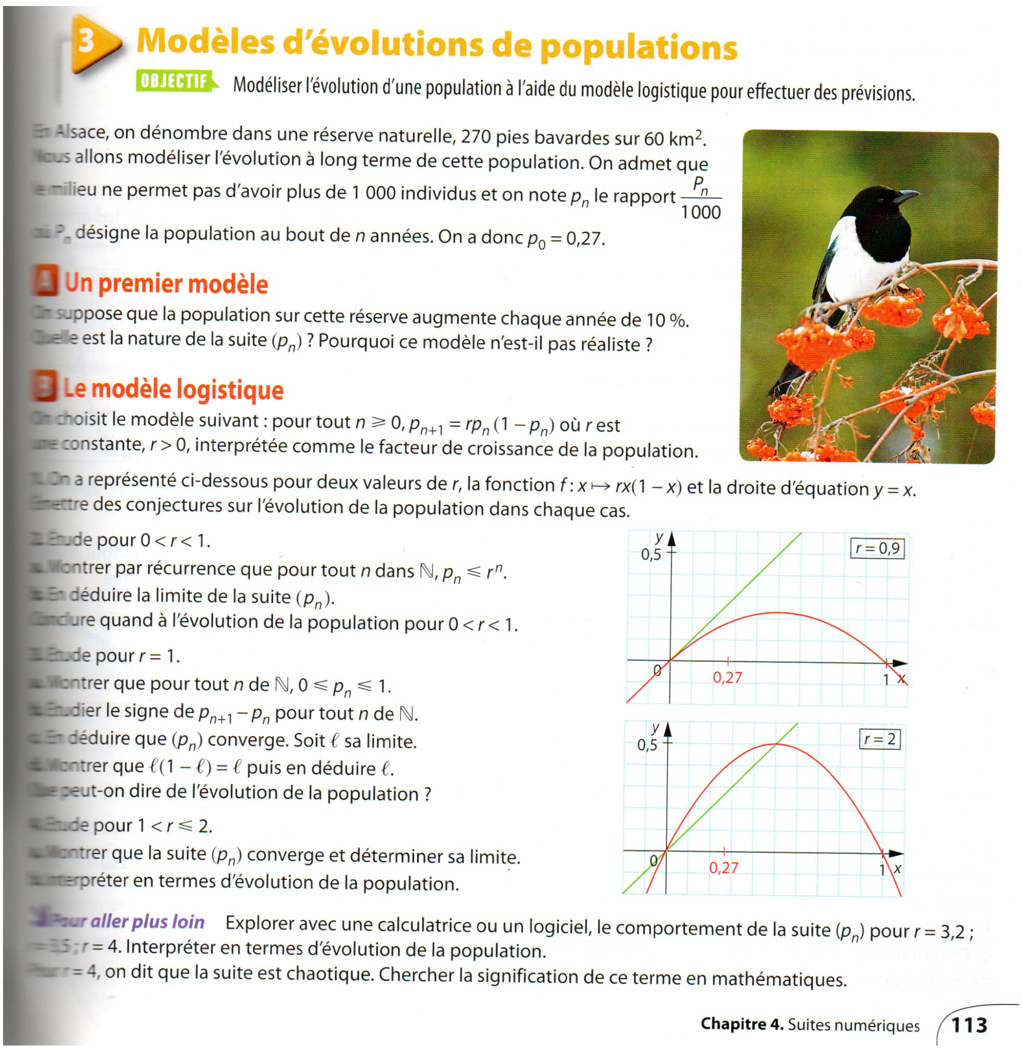
CHANTAL MENINI

1. Un plan possible

Les exemples qui vont suivre sont des pistes possibles et en aucun cas une présentation exhaustive. De même je n'ai pas fait une étude systématique des ouvrages du secondaire et STS, il est donc très probable qu'il y ait des références plus pertinentes que celles données. C'est un appui pour construire votre propre leçon.
Pour la construire, si possible varier les domaines mathématiques et domaines d'applications.
J'ai choisi de classer par thème mathématique plutôt que domaine d'application car pour quelques exemples un même thème se décline dans plusieurs disciplines différentes.

2. Analyse

2.1. **Suites numériques.** Domaine : *Evolution de population*, Outils : *Etude de suites définies par récurrence*,
Connaissances mathématiques : *résultats de convergences sur les suites, fonction polynomiale de degré 2, récurrence.* Didier TS p113.



3 Modèles d'évolutions de populations

OBJECTIF Modéliser l'évolution d'une population à l'aide du modèle logistique pour effectuer des prévisions.

En Alsace, on dénombre dans une réserve naturelle, 270 pies bavardes sur 60 km^2. Nous allons modéliser l'évolution à long terme de cette population. On admet que le milieu ne permet pas d'avoir plus de 1 000 individus et on note p_n le rapport $\frac{P_n}{1000}$ où P_n désigne la population au bout de n années. On a donc $p_0 = 0{,}27$.

A Un premier modèle

On suppose que la population sur cette réserve augmente chaque année de 10 %. Quelle est la nature de la suite (p_n) ? Pourquoi ce modèle n'est-il pas réaliste ?

B Le modèle logistique

On choisit le modèle suivant : pour tout $n \geqslant 0$, $p_{n+1} = rp_n(1 - p_n)$ où r est une constante, $r > 0$, interprétée comme le facteur de croissance de la population.

1. On a représenté ci-dessous pour deux valeurs de r, la fonction $f : x \mapsto rx(1 - x)$ et la droite d'équation $y = x$. Émettre des conjectures sur l'évolution de la population dans chaque cas.

2. Étude pour $0 < r < 1$.
a. Montrer par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $p_n \leqslant r^n$.
b. En déduire la limite de la suite (p_n).
c. Conclure quand à l'évolution de la population pour $0 < r < 1$.

3. Étude pour $r = 1$.
a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant p_n \leqslant 1$.
b. Étudier le signe de $p_{n+1} - p_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
c. En déduire que (p_n) converge. Soit ℓ sa limite.
d. Montrer que $\ell(1 - \ell) = \ell$ puis en déduire ℓ.
e. Que peut-on dire de l'évolution de la population ?

4. Étude pour $1 < r \leqslant 2$.
a. Montrer que la suite (p_n) converge et déterminer sa limite.
b. Interpréter en termes d'évolution de la population.

C Pour aller plus loin Explorer avec une calculatrice ou un logiciel, le comportement de la suite (p_n) pour $r = 3{,}2$; $r = 3{,}5$; $r = 4$. Interpréter en termes d'évolution de la population.
Pour $r = 4$, on dit que la suite est chaotique. Chercher la signification de ce terme en mathématiques.

Chapitre 4. Suites numériques 113

Date: 30 janvier 2014.

Suite logistique : modèle simple pour l'évolution d'une population dans un milieu de ressources limitées. Elle est définie par la relation

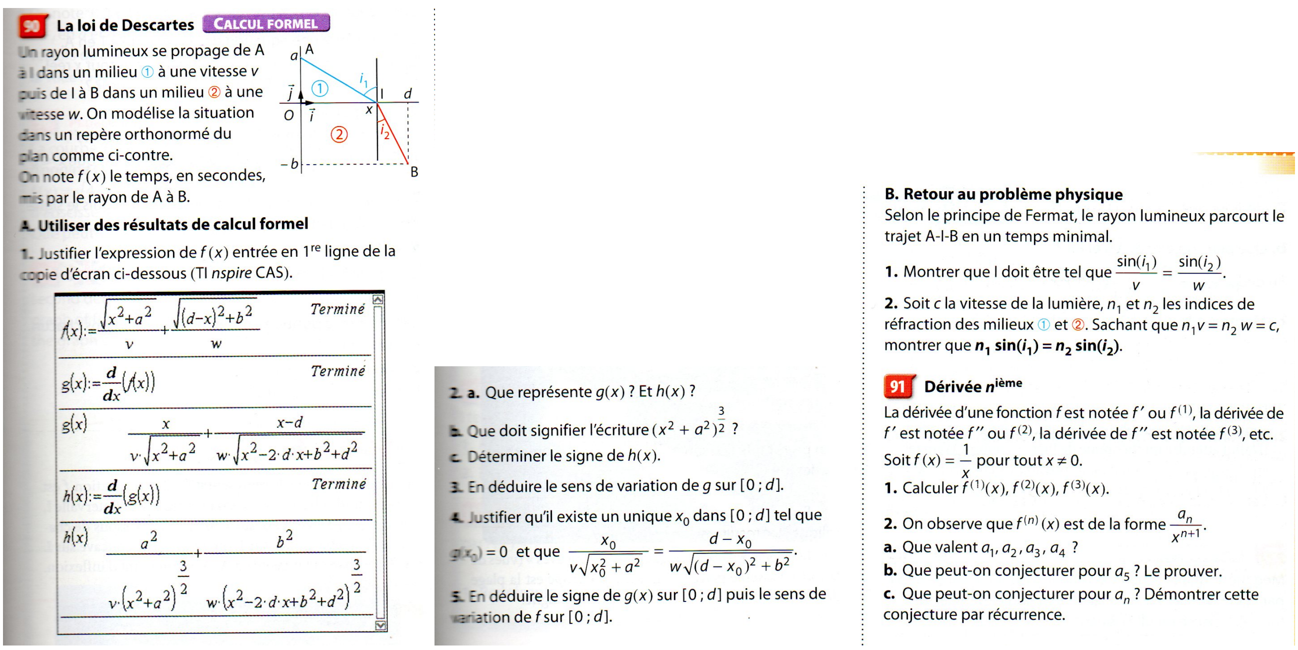
$$\begin{cases} p_{n+1} = rp_n(1-p_n) \\ p_0 \in]0,1[\end{cases}$$

Son comportement dépend de r, pour $0 \leq r \leq 1$ elle converge vers 0, pour $1 < r \leq 3$ la suite converge vers la solution non nulle de $l = rl(1-l)$. Pour $3 < r < 4$, elle commence par admettre des 2-cycles puis 4-cycles ... puis 2^n-cycles, pour $r = 4$ la suite est chaotique.
Pour tout savoir sur cette suite vous avez
http ://www.math.u-psud.fr/ perrin/Conferences/logistiqueDP2.pdf
et verrez que les démonstrations sont très complexes, on se limite donc à l'étude d'exemples.
Rappels généraux à adapter aux cas particuliers étudiés.

(1) L'intervalle $[0,1]$ est stable pour $0 \leq r \leq 4$.
(2) Si la suite converge alors en utilisant les résultats sur somme et produit de suites convergentes sa limite l vérifie la relation $l = rl(1-l)$.
(3) La fonction f définie par $f(x) = rx(1-x)$ est croissante sur $[0,1/2]$ et $f([0,1/2]) \subset [0,1/2]$ pour $0 \leq r \leq 2$; en conséquence $p_{n+1} - p_n$ est du même signe que $p_1 - p_0$.
(4) Ici la monotonie de la suite peut aussi être obtenue en remarquant que $p_{n+1} - p_n = -rp_n(p_n - \frac{r-1}{r})$ avec $\frac{r-1}{r}$ solution de $l = rl(1-l)$. Il ne reste plus qu'à étudier par récurrence le signe de $p_n - \frac{r-1}{r}$.
(5) On conclue à la convergence avec les résultats sur les suites croissantes et majorées ; décroissantes et minorées. Attention dans le cas où $\frac{r-1}{r} \neq 0$ de bien justifier si c'est 0 ou bien $\frac{r-1}{r}$ la limite.

Domaine : *Economie*, Outils : *Suites arithmétiques et géométriques*, livres de première, terminale ES, BTS.
Calculs d'un placement au bout d'une certaine période avec intérêts simples (suite arithmétique), composés (suite géométrique), avec intérêts composés et dépôts constants réguliers (suite arithmético-géométrique). Comparaison d'évolutions de salaires, calcul de mensualités pour un prêt, etc ...
Peut se traiter sur tableur (calculs, durée à partir de laquelle un type de placement est plus avantageux qu'un autre), peut donner lieu à des algorithmes notamment pour trouver la durée à partir de laquelle on a atteint une certaine somme (si on ne connait pas encore l'exponentielle pour les intérêts composés), pour trouver la durée à partir de laquelle un type de placement est plus avantageux qu'un autre.
Tout ceci est exploitable aussi dans l'exposé 41 « Suites arithmétiques, suites géométriques ».

2.2. **Etude de fonction - Optimisation.** Domaine : *Physique*, Outils : *Etude de fonctions et calcul formel*, Didier TS p57.



90 La loi de Descartes CALCUL FORMEL

Un rayon lumineux se propage de A à I dans un milieu ① à une vitesse v puis de I à B dans un milieu ② à une vitesse w. On modélise la situation dans un repère orthonormé du plan comme ci-contre.
On note $f(x)$ le temps, en secondes, mis par le rayon de A à B.

A. Utiliser des résultats de calcul formel

1. Justifier l'expression de $f(x)$ entrée en 1re ligne de la copie d'écran ci-dessous (TI *nspire* CAS).

$f(x):=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{v}+\dfrac{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}{w}$	*Terminé*
$g(x):=\dfrac{d}{dx}(f(x))$	*Terminé*
$g(x)$ $\quad \dfrac{x}{v\cdot\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x-d}{w\cdot\sqrt{x^2-2\cdot d\cdot x+b^2+d^2}}$	
$h(x):=\dfrac{d}{dx}(g(x))$	*Terminé*
$h(x)$ $\quad \dfrac{a^2}{v\cdot(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{b^2}{w\cdot(x^2-2\cdot d\cdot x+b^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$	

2. a. Que représente $g(x)$? Et $h(x)$?
b. Que doit signifier l'écriture $(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}$?
c. Déterminer le signe de $h(x)$.
3. En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;d]$.
4. Justifier qu'il existe un unique x_0 dans $[0\,;d]$ tel que $g(x_0)=0$ et que $\dfrac{x_0}{v\sqrt{x_0^2+a^2}} = \dfrac{d-x_0}{w\sqrt{(d-x_0)^2+b^2}}$.
5. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;d]$ puis le sens de variation de f sur $[0\,;d]$.

B. Retour au problème physique
Selon le principe de Fermat, le rayon lumineux parcourt le trajet A-I-B en un temps minimal.
1. Montrer que I doit être tel que $\dfrac{\sin(i_1)}{v} = \dfrac{\sin(i_2)}{w}$.
2. Soit c la vitesse de la lumière, n_1 et n_2 les indices de réfraction des milieux ① et ②. Sachant que $n_1 v = n_2 w = c$, montrer que $\boldsymbol{n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)}$.

91 Dérivée $n^{\text{ième}}$
La dérivée d'une fonction f est notée f' ou $f^{(1)}$, la dérivée de f' est notée f'' ou $f^{(2)}$, la dérivée de f'' est notée $f^{(3)}$, etc.
Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$.
1. Calculer $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$.
2. On observe que $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\dfrac{a_n}{x^{n+1}}$.
a. Que valent a_1, a_2, a_3, a_4 ?
b. Que peut-on conjecturer pour a_5 ? Le prouver.
c. Que peut-on conjecturer pour a_n ? Démontrer cette conjecture par récurrence.

Loi de Descartes : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ où n_1 et n_2 sont les indices de réfraction des milieux 1 et 2.

Connaissances mathématiques : *Lien signe de la dérivée et variation d'une fonction, théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Pythagore, relations trigonométriques dans un triangle.*
Grandes lignes de démonstration :

(1) $AI = \sqrt{a^2 + x^2}$ et $BI = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$ avec le théorème de Pythagore, on en déduit l'expression de
$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{w}$$

(2) Selon le principe de Fermat, le rayon lumineux parcourt le trajet $A - I - B$ en un temps minimal. On cherche le minimum de f sur $[0, d]$ pour cela on va étudier ses variations sur cet intervalle. La fonction est dérivable pour étudier ses variations on cherche à étudier le signe de sa dérivée.

(3) Calcul à la main très compliqué au niveau lycée, utilisation du logiciel de calcul formel pour le calcul de dérivée.

(4) L'étude du signe de f' sur $[0, d]$ nécessite d'avoir recours à la dérivée seconde, calcul à nouveau fait avec le logiciel de calcul formel.

(5) La valeur x_0 pour laquelle f réalise son minimum n'est pas explicitée mais on obtient quelle satisfait $f'(x_0) = 0$. L'existence de x_0 est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, l'unicité de la stricte croissance de f'.

(6) $g(x_0) = 0$ équivaut à $\frac{1}{v}\frac{x_0}{\sqrt{a^2+x_0^2}} = \frac{1}{w}\frac{d-x_0}{\sqrt{b^2+(d-x_0)^2}}$ soit $\frac{\sin(i_1)}{v} = \frac{\sin(i_2)}{w}$.

(7) Conclusion avec la relation $n_1 v = n_2 w = c$ (c vitesse de la lumière).

2.3. **Etude de fonctions - Recherche de minimum.** Domaine : *Economie*, Outils : *Dérivation, résolution d'équation*, Bordas TES-L p55, Foucher BTS CGO p82.

126. +++ **Coût moyen untitaire et coût marginal**

Un peu d'économie
*Le **coût moyen unitaire** (d'un article) quand on en a fabriqué q est $C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$ où C(q) est le **coût total de production** pour q articles.*

Une entreprise fabrique chaque mois une quantité q d'un certain produit, en tonnes.
Le coût total de production est donné en euros pour tout nombre q de l'intervalle $[10, 100]$ par
$C(q) = 3q^2 + 40q + 2\,700$.
On définit le **coût moyen unitaire** de production pour toute quantité produite q, par $C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$.
$C_m(q)$ est le coût moyen unitaire de production d'une tonne de produit quand on en a fabriqué q.

1. **a)** Vérifier que, pour tout q de $[10, 100]$:
$C_m(q) = 3q + 40 + \frac{2\,700}{q}$.

b) On désigne par C'_m la fonction dérivée de la fonction C_m sur $[10, 100]$.
Démontrer que, pour tout q de $[10, 100]$:
$C'_m(q) = \frac{3(q-30)(q+30)}{q^2}$.
c) Étudier le signe de $C'_m(q)$ lorsque x varie dans $[10, 100]$.
d) Établir le tableau de variation de la fonction C_m sur $[10, 100]$.
e) Déterminer la valeur q_0 de q pour laquelle le coût moyen unitaire est minimal.

2. **a)** Calculer le coût marginal $C'(q)$ au rang q.
b) Déterminer la valeur q_1 de q pour laquelle le coût marginal au rang q est égal au coût moyen unitaire.

Montrer que l'équation $C_m(q) = C'(q)$ est équivalente, sur $[10, 100]$, à l'équation $(q-30)(q+30) = 0$.

c) Que représente la valeur q_1 obtenue pour q au **b)** pour le coût moyen unitaire ?

Dans les situations rencontrées en BTS CGO, le coût moyen unitaire est minimal quand il est égal au coût marginal.

CORRIGÉ P. 313

Le texte scanné est la référence BTS, la référence lycée est plus progressive mais de ce fait un peu longue pour une présentation à l'oral.

(1) Les trois fonctions qui interviennent dans ce type de problème sont
- la fonction coût total C
- la fonction coût moyen C_m donnée par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$
- la fonction coût marginal est définie comme étant la fonction qui à x associe le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite, c'est-à-dire $C(x) - C(x-1)$ si x désigne le nombre d'unités produites. Il est aussi dit que ceci est *assimilé* à $C'(x)$ (cela revient à faire une approximation affine d'ordre 1 justifiable par le fait que pour les valeurs qui vont nous intéresser 1 est petit devant x).

(2) Le travail se poursuit avec la recherche de la valeur de x_0 pour laquelle C_m est minimale via une étude de fonctions et l'on constate que $C_m(x_0) = C'(x_0)$ (le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal). Il est même précisé dans le texte scanné que ce sera le seul cas d'étude en BTS CGO. Même type de résultat en TES-L et l'exercice est placé dans le chapitre "Continuité et convexité".

(3) Pourquoi ce constat ? Les fonctions étudiées sont très régulières donc dérivables sur l'intervalle $[a, b]$ d'étude. Si C_m admet un minimum sur $]a, b[$ alors il est à chercher parmi les points tels que $C'_m(x) = 0$ ce qui équivaut à $xC'(x) - C(x) = 0$ soit $C'(x) = C_m(x)$ (pour des raisons évidentes $x = 0$ ne nous intéresse pas ...). Cette condition *nécessaire* est *suffisante* dans le cas où C est une fonction convexe (et donc C' croissante) ce qui est le cas pour les fonctions étudiées dans les références données en début de paragraphe (à condition de réduire le domaine d'étude pour le Bordas). Reste la possibilité où le minimum de C_m pourrait être atteint en a ou b (bornes de l'intervalle d'étude) mais dans les exercices proposés on fait en sorte que ce ne soit pas le cas.

2.4. **Calcul intégral.** Domaine : *Physique*, Outils : *Linéarisation*, Didier TS p258

> **90** VERS LA PHYSIQUE
>
> **Valeur efficace dans un transfert d'énergie**
>
> À toute grandeur périodique de période T, on associe en physique sa valeur efficace $X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T x(t)^2\,dt}$ où $\int_T x(t)^2\,dt$ désigne l'intégrale de $x(t)^2$ sur un intervalle quelconque de longueur T.
>
> **1.** Si x est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T, expliquer pourquoi on n'a pas besoin de préciser l'intervalle de longueur T choisi pour calculer X.
>
> **2.** On considère une tension donnée par $u(t) = A\cos(\omega t)$, où A est un réel positif.
>
> **a.** Justifier que u est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
>
> **b.** Montrer que $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
>
> **c.** En déduire le calcul de la valeur efficace de u.
>
> **d.** Expliquer le commentaire suivant : « pour une grandeur sinusoïdale, sa valeur efficace est sa valeur crête divisée par $\sqrt{2}$ ».

Source Wikipedia : En électricité, la valeur efficace d'un courant ou d'une tension variables au cours du temps, correspond à la valeur d'un courant continu (comprendre intensité constante) ou d'une tension continue (idem constante) qui produirait un échauffement identique dans une résistance. L'énergie E durant une période T est donc en fonction de la tension variable u, $E = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{R}u^2(t)\,dt$, l'égalité $E = \frac{T}{R}U^2$ avec U la tension efficace nous conduit à l'expression donnée en début d'exercice.

Quelques remarques concernant la résolution de cet exercice

(1) On peut supposer sans plus d'indication que la justification attendue est par les aires. Avec la relation de Chasles

$$\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)\,dt = \int_{t_0}^{0} u^2(t)\,dt + \int_0^T u^2(t)\,dt + \int_T^{T+t_0} u^2(t)\,dt$$

puis $\int_{t_0}^{0} u^2(t)\,dt = -\int_0^{t_0} u^2(t)\,dt$ et enfin $\int_0^{t_0} u^2(t)\,dt = \int_T^{T+t_0} u^2(t)\,dt$ en interprétant ces deux intégrales comme des aires et en utilisant la T-périodicité de u^2.

Une autre démonstration possible (via les primitives) est en notant F une primitive de u^2 et en faisant remarquer au préalable que la dérivée de la fonction $x \mapsto F(x+T)$ est $x \mapsto u^2(x+T)$ puis d'en déduire (sans parler de changement de variable) que

$$\int_T^{T+t_0} u^2(t)\,dt = F(t_0+T) - F(T) = \int_0^{t_0} u^2(t+T)\,dt$$

puis de conclure avec la T-périodicité.

(2) Etes-vous capable de démontrer que $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ (démonstration exigible en première S) ?

2.5. Equations différentielles.

2.5.1. *Equations du premier ordre.* Domaines : *mécanique, électricité, radioactivité, évolution de population*, niveau Terminale STI2D, BTS
On aboutit à une équation différentielle du type

$$y' + ay = f$$

avec a constante réelle et f fonction (souvent une constante réelle).
Chute avec résistance de l'air : $mv'(t) + kv(t) = mg$ où $v(t)$ est la vitesse à l'instant t, m la masse de l'objet.
Circuit RC : $Cu'(t) + \frac{1}{R}u(t) = 0$ avec $u(t)$ tension aux bornes du condensateur à l'instant t.
Désintégration : $N'(t) = -\lambda N(t)$ où $N(t)$ est le nombre de noyaux radioactifs non désintégrés à l'instant t. Demi-vie : $T = \ln(2)/\lambda$ durée durant laquelle la moitié des noyaux radioactifs sont désintégrés quelque soit la quantité initiale.
Evolution de population : Modèle de Malthus, le taux d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre d'individus, $N'(t) = kN(t)$.
Loi de refroidissement de Newton : Cette loi de refroidissement (ou de réchauffement ...) suppose que le taux de variation de la température d'un objet est proportionnel à la différence de température entre l'objet et le milieu ambiant. Le coefficient de proportionnalité k dépend essentiellement de la surface de contact entre l'objet et son milieu (on le considérera constant). On note T(t) la température de l'objet à l'instant t.
On aboutit à l'équation $T'(t) = k(T_a - T(t))$, que l'on pourra résoudre dans les 2 cas particuliers suivants : la température T_a est constante, la température varie de façon sinusoïdale avec le temps $T_a(t) = T_m \sin(\omega t)$ (par exemple sol exposé aux rayons du soleil).

Un exemple d'équation du premier ordre non linéaire : équation logistique (évolution de population selon le modèle de Verhulst), la population vit dans un milieu dont les ressources ne sont pas illimitées ce qui conduit à l'équation $N'(t) = k(M - N(t))N(t)$. Elle se ramène à une équation du premier ordre en faisant le changement de fonction $y = \frac{1}{N}$. Même si cela ne fait pas partie du programme de l'oral, il est bien d'avoir une idée de la justification du fait que l'on peut faire ce changement de fonction. En effet, la fonction identiquement nulle est clairement une solution de cette équation, ainsi grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz toute solution de l'équation autre que la fonction nulle, ne s'annule en aucun point de son ensemble de définition.

2.5.2. *Equations du second ordre.* Domaines : *mécanique, électricité*, niveau Terminale STI2D, BTS
On aboutit à une équation différentielle du type

$$y'' + ay' + by = f$$

avec a et b constantes réelles et f fonction (souvent une constante réelle).
Circuit LC : la charge q du condensateur est solution de l'équation différentielle $y'' + \frac{1}{LC}y = 0$, les conditions initiales (valeur de $q(0)$ et $q'(0)$) étant données par le problème étudié.
Masse suspendue à un ressort : y ordonnée du centre de gravité de l'objet suspendu est solution de l'équation $my'' + ky = 0$ avec m masse l'objet, k raideur du ressort.
Modélisation du comportement d'une structure lors d'un séisme : Term STI2D collection sigma, TP3 p249. Le modèle étudie le mouvement d'un chariot sans amortissement puis avec et enfin soumis à une force extérieure périodique (modélisation du séisme), travail complet et intéressant qui peut aussi être l'occasion de parler de phénomène de résonance. L'équation de départ est $my'' + dy' + ky = F(x)$ avec $y(x)$ position du chariot à l'instant x, m masse du chariot, d coefficient d'amortissement du piston, k raideur du ressort, F force extérieure.
Tous ces exemples trouveront bien sûr aussi leur place dans les exposés 55 ≪ Equations différentielles ≫ et 56 ≪ Problèmes conduisant à la résolution d'équations différentielles ≫.

3. Probabilités - Statistiques

3.1. Probabilités conditionnelles. Domaine : *génétique* Term S Math'X Didier p381 ou Term S Terracher
Les lois de Hardy-Weinberg : Dans une population donnée, un gène est composé de deux allèles et peut être de génotype AA, Aa ou aa. Chaque parent transmet un allèle à son enfant, cela se fait au hasard

et de façon équiprobable, l'appariement entre les parents se fait au hasard. Si l'on note p_n, q_n et r_n les probabilités qu'une personne prise au hasard dans la génération n soit respectivement de génotype AA, Aa ou aa alors on peut montrer que les suites (p_n), (q_n) et (r_n) sont constantes à partir de $n = 1$.
Domaine : *médecine* Term S Math'X Didier p392
Probabilité de la *cause* sachant la *conséquence* : valeur prédictive d'un test de dépistage de maladie en fonction de la fréquence p de la maladie que l'on veut dépister. Exercice assez complet qui peut être raccourci, changer aussi la notation Sp qui prête à confusion.

3.2. **Statistiques - Estimation.** Domaine : *Sondage* Term S, Math'X Didier, p447 ex 22 et 24
Dans les deux cas on estime des probabilités par intervalles de confiance $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec f la fréquence observée dans les personnes sondée. Puis on cherche l'effectif qu'il aurait fallu sonder pour dans l'exercice 22 avoir un intervalle inclus dans $[0.5, 1]$; dans l'exercice 24 avoir des intervalles disjoints.

3.3. **Statistiques descriptives.** Domaine : *Technologie*, Outils : *Séries statistiques à deux variables, ajustement affine, calculatrice ou logiciel pour les calculs*, Foucher BTS industriels groupement A, Tome 2, p191.

21 ** *Résistance à la rupture*

Toutes les valeurs numériques demandées seront arrondies à 10^{-3}.

Dans une fabrication de pièces en caoutchouc par moulage à l'aide d'une presse à injection, on constate que la résistance à la rupture de chaque pièce est fonction du taux de goudron de pin présent dans la gomme utilisée.

On note R, exprimée en newtons, la résistance à la rupture de la pièce.

On note T, exprimé en parties pour 100 parties de gomme, le taux de goudron de pin de la gomme utilisée.

On dispose d'une série de 10 mesures du couple (R, T).

N° de la mesure	T	R
1	1,74	250,4
2	2,03	247,1
3	2,10	246,6
4	2,00	247,3
5	2,00	247,6
6	2,14	246,2
7	1,96	247,7
8	1,99	247,1
9	2,37	243,7
10	1,95	249

Ces couples de mesures sont représentés par le nuage de points de la figure ci-dessous.

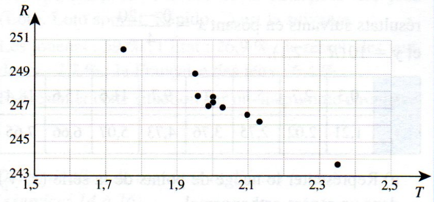


Fig 19

1° a) Déterminer une équation de la droite de régression de R en T, de la forme $R = aT + b$, par la méthode des moindres carrés.

b) Préciser le coefficient de corrélation linéaire. Commenter la valeur de ce coefficient.

2° À l'aide de la régression effectuée au **1°**, estimer la résistance à la rupture pour un taux de goudron de pin de 1,8.

Rappels :

(1) On travaille avec la série statistique $(x_i, y_i)_{1 \le i \le n}$.
On cherche une fonction affine f telle que, si l'on note $\varepsilon_i = y_i - f(x_i)$ l'erreur commise lorsque l'on approche y_i par $f(x_i)$, alors, $\varepsilon(a, b) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ soit minimal. On dit qu'alors f *réalise un ajustement affine de Y en X par la méthode des moindres carrés.*

Minimiser $\varepsilon(a, b)$ s'interprète graphiquement comme la minimisation de $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i H_i^2$ avec $M_i(x_i, y_i)$..

(2) Etant donnée une série statistique $(x_i, y_i)_{1 \le i \le n}$ il existe une unique fonction réalisant un ajustement affine de Y en X par la méthode des moindres carrés. Elle est donné par $f(x) = ax + b$ avec

$$a = \frac{C_{xy}}{S_x^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

Avec $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ la moyenne de $(x_i)_{1 \le i \le n}$,

$S_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$ l'écart type de $(x_i)_{1 \le i \le n}$,

$$C_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

(3) La droite d'équation $y = ax + b$ avec $a = \frac{C_{xy}}{S_x^2}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$ est appellée **droite de régression de Y en X.**

(4) On appelle **coefficient de corrélation** la quantité $r_{xy} = \frac{C_{xy}}{S_x S_y}$. Le coefficient de corrélation r_{xy} appartient à $[-1, 1]$ et il vaut 1 ou -1 si et seulement si les points du nuage sont alignés.

(5) L'ajustement sert ici à faire de l'interpolation.

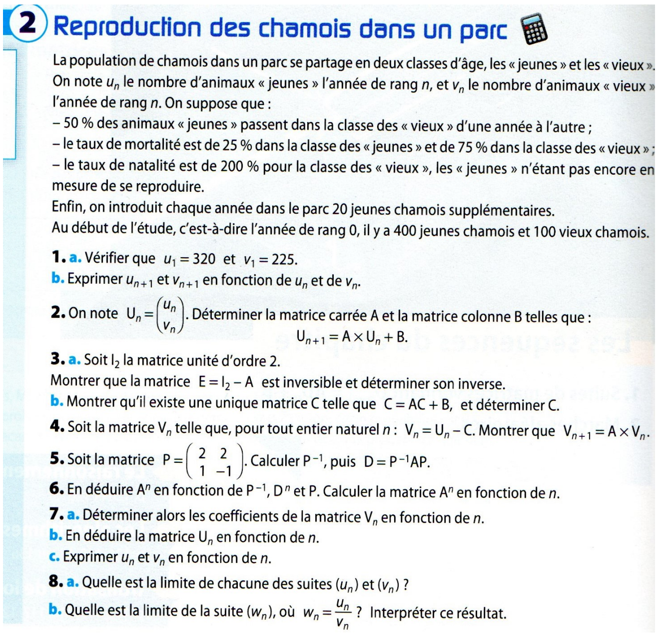
4. Algèbre - Géométrie

4.1. **Arithmétique.** Domaine : *Sécurité informatique, codage*
On peut parler du chiffrement de Hill (qui fera appel aussi aux matrices) ou du système RSA. Ces deux exemples sont présents dans de nombreux ouvrages, voir aussi le document ressource sur les Matrices pour le chiffrement de Hill.

Intérêt et points clés pour le chiffrement de Hill :
une même lettre n'est pas toujours codée de la même façon ce qui rend impossible la recherche de correspondance entre une lettre et son codage via une recherche fréquentielle.
Le point clé est de savoir inverser modulo 26 la matrice servant au codage, ceci équivaut à ce que son déterminant soit premier avec 26, c'est-à-dire que ni 2, ni 13 ne divise le déterminant de la matrice.

Intérêt et points clés pour du système RSA :
La clé de codage est publique mais la clé de décodage n'est connue que de celui qui doit recevoir le message. Cela repose sur la difficulté de trouver les facteurs p et q lorsque l'on connait seulement le produit pq avec p et q très grands nombres premiers.
Les points clés sont
- la donnée de la clé publique (pq, c) avec c premier avec $n = (p-1)(q-1)$ (n n'est connu que de celui qui devra décoder le message)
- le codage de a par b avec $b \equiv a^c$ $[pq]$
- le décodage de b en utilisant que $a \equiv b^d$ $[pq]$ où d est tel que $dc \equiv 1$ $[n]$
- l'existence de d découle du théorème de Bezout, avec l'algorithme d'Euclide étendu on pourra trouver des valeurs (d_0, r_0) telles que $d_0 c + r_0 n = 1$, les autres couples possibles sont alors $(d_0 + kn, r_0 - kc)$ avec k entier relatif. On peut donc choisir d compris entre 1 et $n-1$.
- si on suppose que a n'est divisible ni par p ni par q alors avec le petit théorème de Fermat (rappel p et q premiers) $a^{(p-1)} \equiv 1$ $[p]$ et $a^{(q-1)} \equiv 1$ $[q]$ puis $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1$ $[pq]$ avec le théorème de Gauss.

4.2. **Calcul Matriciel.** Domaine : *Évolution de population*, Outils :*Calcul de matrice inverse, diagonalisation, récurrence*, Bordas, Indice, Term S spé maths p112



2 Reproduction des chamois dans un parc

La population de chamois dans un parc se partage en deux classes d'âge, les « jeunes » et les « vieux ». On note u_n le nombre d'animaux « jeunes » l'année de rang n, et v_n le nombre d'animaux « vieux » l'année de rang n. On suppose que :
– 50 % des animaux « jeunes » passent dans la classe des « vieux » d'une année à l'autre ;
– le taux de mortalité est de 25 % dans la classe des « jeunes » et de 75 % dans la classe des « vieux » ;
– le taux de natalité est de 200 % pour la classe des « vieux », les « jeunes » n'étant pas encore en mesure de se reproduire.
Enfin, on introduit chaque année dans le parc 20 jeunes chamois supplémentaires.
Au début de l'étude, c'est-à-dire l'année de rang 0, il y a 400 jeunes chamois et 100 vieux chamois.

1. a. Vérifier que $u_1 = 320$ et $v_1 = 225$.
b. Exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

2. On note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice carrée A et la matrice colonne B telles que :
$$U_{n+1} = A \times U_n + B.$$

3. a. Soit I_2 la matrice unité d'ordre 2.
Montrer que la matrice $E = I_2 - A$ est inversible et déterminer son inverse.
b. Montrer qu'il existe une unique matrice C telle que $C = AC + B$, et déterminer C.

4. Soit la matrice V_n telle que, pour tout entier naturel n : $V_n = U_n - C$. Montrer que $V_{n+1} = A \times V_n$.

5. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}, puis $D = P^{-1}AP$.

6. En déduire A^n en fonction de P^{-1}, D^n et P. Calculer la matrice A^n en fonction de n.

7. a. Déterminer alors les coefficients de la matrice V_n en fonction de n.
b. En déduire la matrice U_n en fonction de n.
c. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

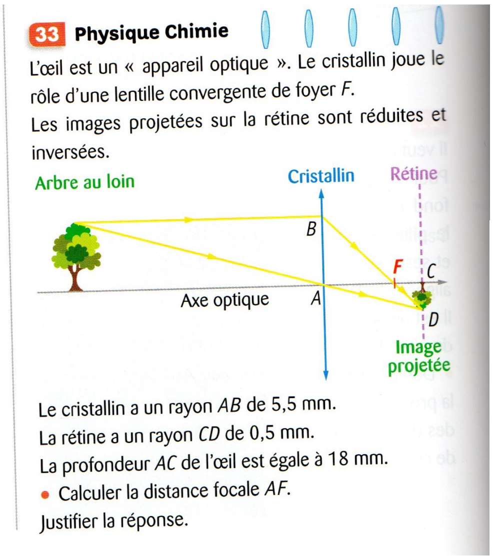
8. a. Quelle est la limite de chacune des suites (u_n) et (v_n) ?
b. Quelle est la limite de la suite (w_n), où $w_n = \frac{u_n}{v_n}$? Interpréter ce résultat.

Remarque : si à l'occasion d'un autre exemple on a présenté les suites arithmético-géométriques bien faire le parallèle sur la méthode permettant d'obtenir le terme général de la suite en fonction de n (recherche de point fixe puis introduction d'une suite auxiliaire géométrique).

4.3. **Géométrie.** Domaine : *Optique*, Utilisation du théorème de Thalès, Hachette Phare 3ième p212, prolongement à la relation de conjugaison de Descartes.
Pour la figure (B) le point A doit être différent de F et tel que F soit sur le segment $[A, O]$ (si A est entre F et O il n'y a pas d'image). F et F' sont les foyers, $OF = OF' = f$, avec le théorème de Thales nous avons alors

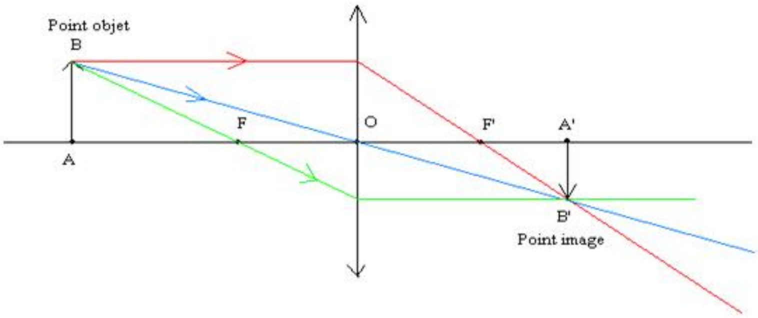
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{OF}{FA'}$$

on en déduit alors la relation de conjugaison de Descartes $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f}$.


33 Physique Chimie
L'œil est un « appareil optique ». Le cristallin joue le rôle d'une lentille convergente de foyer F.
Les images projetées sur la rétine sont réduites et inversées.

Le cristallin a un rayon AB de 5,5 mm.
La rétine a un rayon CD de 0,5 mm.
La profondeur AC de l'œil est égale à 18 mm.
- Calculer la distance focale AF.
Justifier la réponse.

(A) Énoncé de l'exercice



(B) Modèle d'une lentille convergente

Domaine : *Géopositionnement*, Outils : *Produit scalaire, formule d'Al-Kashi et loi des sinus*, Didier Première S p325.
La trilatération : on détermine la position d'un point P en connaissant la distance de ce point par rapport à trois points A, B et C de position connue (c'est le principe utilisé par les GPS pour lesquels on mesure la distance à au moins quatre satellites -il faut aussi mesurer l'erreur de synchronisation des horloges-).
La formule d'Al-Kashi permet de déterminer les angles géométriques d'un triangle en connaissant les longueurs de ses côtés (elle nous donne leur cosinus). Dans l'ouvrage de référence on a recours au calcul formel pour déterminer les coordonnées de P connaissant celles des points de référence A, B et C.
La triangulation : on détermine la position d'un point N en connaissant les angles géométriques $\widehat{BAN}$ et $\widehat{ABN}$ ainsi que la longueur AB.
Les longueurs NA et NB sont déterminés en utilisant la loi des sinus.

5. Graphes

Domaine : *Logistique*
Exemples à piocher dans l'exposé 1 « Résolutions de problèmes à l'aide de graphes ».
Construction d'un graphe pour calculer la durée minimale d'un projet, organisation de taches en tenant compte de certaines taches qui ne peuvent être faites simultanément (problème de coloriage), calcul de chemin le plus court (on retrouve le GPS et l'algorithme de Dijkstra).