CP200. Corrigé du DS d'algèbre de mars 2019

Questions de cours. Cf. le cours.

Exercice 1. **(1)** L'algorithme d'Euclide donne : $A(X) = (X+1)B(X) - X^3 - 1$ puis $B(X) = (X+2)(X^3+1)$: donc $D(X) = X^3 + 1$ (dernier reste non nul rendu unitaire).
(2) Les divisions donnent $A(X)/D(X) = X^2 + 3X + 1$ et $B(X)/D(X) = X + 2$ (déjà vu).
(3) $M(X) = A(X)\,\dfrac{B(X)}{D(X)} = (X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1)(X+2)$, d'où en développant : $M(X) = X^6 + 5X^5 + 7X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 7X + 2$.
(4) La première division de l'algorithme d'Euclide se récrit $D(X) = -A(X) + (X+1)B(X)$, ce qui donne la solution $U_0 = -1$, $V_0 = X + 1$.
(5) La solution générale est :

$$\begin{aligned}
U(X) &= U_0(X) + S(X)\frac{B(X)}{D(X)} = -1 + S(X)(X+2),\\
V(X) &= V_0(X) - S(X)\frac{A(X)}{D(X)} = X + 1 - S(X)(X^2 + 3X + 1)
\end{aligned}$$

avec $S(X) \in \mathbb{R}[X]$ quelconque.

Exercice 2. On écrit $X^n + X + 1 = Q(X)(X-1)^2 + aX + b$ et sa dérivée : $nX^{n-1} + 1 = Q'(X)(X-1)^2 + 2Q(X)(X-1) + a$; puis on prend $X = 1$ dans chacune, ce qui donne $3 = a + b$ et $n + 1 = a$; d'où $a = n + 1$, $b = 2 - n$ et le reste est $R(X) = (n+1)X + 2 - n$.

Exercice 3. On écrit $(X+1)^n = Q(X)(X^2+1) + aX + b$ et on prend $X = i$, ce qui donne $ai + b = (i+1)^n = (\sqrt{2})^n\big(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\big)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\pi/4} = (\sqrt{2})^n\big(\cos(n\pi/4) + i\sin(n\pi/4)\big)$; donc $a = (\sqrt{2})^n \sin(n\pi/4)$, $b = (\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4)$ et le reste est $R(X) = (\sqrt{2})^n\big(\sin(n\pi/4)X + \cos(n\pi/4)\big)$.

Exercice 4. On écrit $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1} = Q(X)(X^2 - X + 1) + aX + b$ et on doit montrer que $a = b = 0$. Prenant $X = -j$ (qui annule $X^2 - X + 1$), et vu que $-j - 1 = j^2$ et $j^3 = 1$, on obtient : $-aj + b = (-j-1)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = j^{2n+4} - j^{2n+1} = j^{2n+1} - j^{2n+1} = 0$. Cqfd.

Exercice 5. On écrit $(X+1)^n - X^n - 1 = Q(X)(X^2 + X + 1) + aX + b$ et on cherche pour quelles valeurs de n on a $a = b = 0$. Prenant $X = j$, et vu que $j + 1 = -j^2$ on obtient : $aj + b = (j+1)^n - j^n - 1 = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1$. Donc ($k$ désignant un entier) :

Si $n = 6k$: $(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = -1 \neq 0$.
Si $n = 6k+1$: $(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$.
Si $n = 6k+2$: $(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$.
Si $n = 6k+3$: $(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = -1 - 1 - 1 = -3 \neq 0$.
Si $n = 6k+4$: $(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$.
Si $n = 6k+5$: $(-1)^n j^{2n} - j^n - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$.

Conclusion : $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$ ssi le reste de la division de n par 6 est 1 ou 5.

Exercice 6. **(1)** Les polynômes constants satisfont évidemment à la condition. Montrons que ce sont les seuls. Soit Q non constant, donc $\deg(Q) = n \geq 1$: écrivant des pointillés là où il n'y a que des termes de degré $< n-1$ on a $Q(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots$ (où $a_n \neq 0$), donc $Q(X+1) = a_n(X+1)^n + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + \cdots = a_n X^n + n a_n X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-1} + \dots$ et donc $Q(X+1) - Q(X) = n a_n X^{n-1} + \dots$, ce qui montre que $Q(X+1) - Q(X) \neq 0$ (il est de degré $n - 1 \geq 0$). Cqfd.

Autre argument : si $Q(X+1) - Q(X) = 0$, la propriété $Q(n) = Q(0)$ est héréditaire (car $Q(n+1) = Q(n)$) donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$; ainsi $Q(X) - Q(0)$ a une infinité de racines et donc c'est le polynôme nul, d'où $Q(X) = Q(0) = \text{const}$. Cqfd.

(2) On écrit la division euclidienne : $A(X) = Q(X)(X-a) + r$ (où $r = \text{const}$) et en prenant $X = a$ on voit que $r = A(a)$: donc $A(a) = 0$ ssi $X - a$ divise $A(X)$.

(3) Si $(X+1)A(X) = XA(X+1)$, prenant $X = -1$ on a $0A(-1) = -A(0)$ donc $A(0) = 0$ et on peut écrire $A(X) = XQ(X)$; alors $A(X+1) = (X+1)Q(X+1)$ et la condition devient $(X+1)XQ(X) = X(X+1)Q(X+1)$, c'est-à-dire $Q(X) = Q(X+1)$: d'après la première question, les solutions pour Q sont les constantes ; donc les solutions pour A sont les polynômes $A(X) = cX$ où $c = \text{const}$.

(4) Si $(X+2)A(X) = XA(X+1)$, prenant $X = -2$ on voit que $A(-1) = 0$, donc $A(X) = (X+1)Q(X)$; alors $A(X+1) = (X+2)Q(X+1)$ et la condition devient : $(X+2)(X+1)Q(X) = X(X+2)Q(X+1)$, c'est-à-dire $(X+1)Q(X) = XQ(X+1)$: on est ramené à la question précédente, qui donne $Q(X) = cX$ d'où $A(X) = cX(X+1)$ où $c = \text{const}$.

(5) Si $(X+3)A(X) = XA(X+1)$, prenant $X = -3$ on voit que $A(-2) = 0$, donc $A(X) = (X+2)Q(X)$; alors $A(X+1) = (X+3)Q(X+1)$ et la condition devient $(X+3)(X+2)Q(X) = X(X+3)Q(X+1)$, c'est-à-dire $(X+2)Q(X) = XQ(X+1)$: on est ramené à la question précédente, qui donne $Q(X) = cX(X+1)$ d'où $A(X) = cX(X+1)(X+2)$ où $c = \text{const}$.

(6) On va prouver par récurrence que les solutions de $(X+k)A(X) = XA(X+1)$ sont les polynômes $A(X) = c\prod_{j=0}^{k-1}(X+j)$ où $c = \text{const}$. Les cas précédents amorcent la récurrence. Vérifions l'hérédité de notre hypothèse : si $(X+k+1)A(X) = XA(X+1)$, prenant $X = -k-1$ on voit que $A(-k) = 0$, donc $A(X) = (X+k)Q(X)$; alors $A(X+1) = (X+k+1)Q(X+1)$ et la condition devient : $(X+k+1)(X+k)Q(X) = X(X+k+1)Q(X+1)$, c'est-à-dire $(X+k)Q(X) = XQ(X+1)$; l'hypothèse de récurrence donne $Q(X) = c\prod_{j=0}^{k-1}(X+j)$ et donc $A(X) = c\prod_{j=0}^{k}(X+j)$: cqfd.

Exercice 7. Si $A' \mid A$, alors $A' \neq 0$ et donc $\deg(A') \geq 0$, $\deg(A) \geq 1$. Posons $A = QA'$: alors $\deg(Q) = 1$ donc $Q(X) = c(X-a)$. Soit $X - b$ un facteur irréductible unitaire de A dans $\mathbb{C}[X]$ (d'Alembert), et soit m sa multiplicité : alors $X - b$ est un facteur de A' de multiplicité $m - 1$ (caractérisation des ordres des racines). Si $b \neq a$, dans l'égalité $A = c(X-a)A'$ le facteur $X - b$ figure à gauche avec la multiplicité m et à droite avec la multiplicité $m - 1$: c'est incohérent ! Donc $b = a$. Ainsi le seul facteur irréductible unitaire de A est $X - a$ et donc

$$A = \mathrm{cd}(A)(X-a)^m.$$

Cette condition nécessaire pour que $A' \mid A$ est suffisante car alors

$$A'(X) = \mathrm{cd}(A)m(X-a)^{m-1} \mid A(X). \qquad \text{(FIN.)}$$