CP200AMPC/4TBX207 : corrigé du DST d'algèbre de juin 2019

Exercice 1. **(1)** Les divisions euclidiennes donnent :

$$\begin{aligned}
A(X) &= (X^2 - X - 2)B(X) + 6(X^4 - X^3 - X^2 + 2X - 1),\\
B(X) &= (X+4)(X^4 - X^3 - X^2 + 2X - 1) + 2(X^3 - X + 1),\\
X^4 - X^3 - X^2 + 2X - 1 &= (X-1)(X^3 - X + 1)
\end{aligned}$$

donc $D(X) = X^3 - X + 1$ (dernier reste non nul, rendu unitaire).
(2) On trouve par division :

$$A(X)/D(X) = X^4 + 2X^3 - 7X^2 + 2X - 2 \quad \text{et} \quad B(X)/D(X) = X^2 + 3X - 2.$$

(3) En remontant le flot des divisions :

$$\begin{aligned}
D(X) &= \frac{1}{2}\,B(X) - \frac{1}{2}\,(X+4)(X^4 - X^3 - X^2 + 2X - 1)\\
&= \frac{1}{2}\,B(X) - \frac{1}{12}\,(X+4)[A(X) - (X^2 - X - 2)B(X)]\\
&= -\frac{1}{12}\,(X+4)A(X) + \frac{1}{12}\,\Big(6 + (X+4)(X^2 - X - 2)\Big)B(X)
\end{aligned}$$

ce qui donne la solution particulière

$$\begin{aligned}
U_0(X) &= -\frac{1}{12}\,(X+4),\\
V_0(X) &= \frac{1}{12}\,\Big(6 + (X+4)(X^2 - X - 2)\Big) = \frac{1}{12}\,(X^3 + 3X^2 - 6X - 2).
\end{aligned}$$

La solution générale est :

$$\begin{aligned}
U(X) &= U_0(X) + S(X)B(X)/D(X) = -\frac{1}{12}\,(X+4) + (X^2 + 3X - 2)S(X),\\
V(X) &= V_0(X) - S(X)A(X)/D(X) = \frac{1}{12}\,(X^3 + 3X^2 - 6X - 2) - (X^4 + 2X^3 - 7X^2 + 2X - 2)S(X)
\end{aligned}$$

où $S(X)$ est un polynôme arbitraire de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. **(1)** $\deg F < 0$ donc pas de partie entière et on aura : $F(X) = \dfrac{a}{X^2} + \dfrac{b}{X} + \dfrac{cX+d}{(X^2+1)^2} + \dfrac{eX+f}{X^2+1}$ avec :

$$a = X^2F(X)\big|_{X\to 0} = \frac{X^5 + X^4 + 1}{(X^2+1)^2}\Big|_{X\to 0} = 1,$$

$$b = \big(X^2F(X)\big)'\big|_{X\to 0} = \frac{(5X^4 + 4X^3)(X^2+1) - 4X(X^5 + X^4 + 1)}{(X^2+1)^3}\Big|_{X\to 0} = 0,$$

$$ci + d = (X^2+1)^2F(X)\big|_{X\to i} = -i - 2 \qquad \text{donc} \qquad c = -1,\ d = -2.$$

Il reste à trouver e et f. Pour cela, on peut prendre des valeurs particulières :

$$X = 1 \Longrightarrow \frac{3}{4} = 1 - \frac{3}{4} + \frac{e+f}{2} \Longrightarrow e + f = 1$$

$$X = -1 \Longrightarrow \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{-e+f}{2} \Longrightarrow e - f = 1$$

d'où $e = 1$, $f = 0$. [**N.B.** La *pseudo-formule* $ei + d = \big((X^2+1)^2F(X)\big)'\big|_{X\to i}$ (indûment calquée sur la *formule valable uniquement pour les parties polaires*) donnerait les valeurs complètement fausses $e = 0$ et $f = -3$.]
Finalement :

$$F(X) = \frac{1}{X^2} - \frac{X+2}{(X^2+1)^2} + \frac{X}{X^2+1} \qquad \text{dans } \mathbb{R}(X).$$

(2) Dans $\mathbb{C}$, les pôles sont 0, i, $-i$ (tous doubles). On a déjà calculé la partie polaire pour 0. On aura donc :

$$F(X) = \frac{1}{X^2} + \frac{\alpha}{(X-i)^2} + \frac{\beta}{X-i} + \frac{\overline{\alpha}}{(X+i)^2} + \frac{\overline{\beta}}{X+i}$$

avec :

$$\alpha = \frac{X^5+X^4+1}{X^2(X+i)^2}\Big|_{X=i} = \frac{2+i}{4}$$

$$\beta = \left(\frac{X^5+X^4+1}{X^2(X+i)^2}\right)'\Big|_{X=i} = \frac{(5X^4+4X^3)X(X+i)-2(X+X+i)(X^5+X^4+1)}{X^3(X+i)^3}\Big|_{X=i} = \frac{1+i}{2}.$$

Conclusion :

$$F(X) = \frac{1}{X^2} + \frac{2+i}{4}\cdot\frac{1}{(X-i)^2} + \frac{1+i}{2}\cdot\frac{1}{X-i} + \frac{2-i}{4}\cdot\frac{1}{(X+i)^2} + \frac{1-i}{2}\cdot\frac{1}{X+i} \qquad \text{dans } \mathbb{C}(X).$$

Exercice 3.
(1) a est un pôle *simple* de $F(X)$, donc

$$\lambda = \lim_{x\to a}\big((x-a)F(x)\big) = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)/(x-a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

car $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{Q(x)-Q(a)}{x-a} = Q'(a)$.
(2) $X^n-1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X-a_k)$ où $a_k = e^{2\pi ik/n}$. Toutes les racines sont simples, donc la décomposition est

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{X-a_k}$$

et (vu la question précédente, avec ici $P(X)=1$, $Q(X)=X^n-1$, $Q'(X)=nX^{n-1}$) :

$$\lambda_k = \frac{1}{na_k^{n-1}} = \frac{a_k}{na_k^n} = \frac{a_k}{n}$$

d'où

$$F(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{2\pi ik/n}}{X-e^{2\pi ik/n}}.$$

Exercice 4. Notons $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $B=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors $AB = C = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$. L'élément de la ligne i et de la colonne j de la transposée ${}^t(AB)$ est : $c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{ki}a_{jk}$; mais b_{ki} est l'élément de la ligne i et de la colonne k de la transposée ${}^tB$, et a_{jk} est l'élément de la ligne k et de la colonne j de la transposée ${}^tA$. Donc ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Exercice 5. Regardons le déterminant :

$$\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & a \\ a & a & -a \\ a-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} (a+2)a+(-a^2)+(-a(a-2))-(a-2)a^2-(a+2)a-a = -a^3+a = -a(a-1)(a+1).$$

• Si $a\notin\{0,1,-1\}$ le déterminant est non nul donc (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donc $\dim F_a = 3$.
• Si $a=0$ alors $u=(2,0,-2)$, $v=(1,0,-1)$, $w=(0,0,1)$; donc $u=2v$ et il est clair que les deux vecteurs non colinéaires v,w forment une base de F_0, donc $\dim F_0 = 2$.
• Si $a=1$ alors $u=(3,1,-1)$, $v=(1,1,-1)$, $w=(1,-1,1)$; donc $u=2v+w$ et il est clair que les deux vecteurs non colinéaires v,w forment une base de F_1, donc $\dim F_1 = 2$.
• Si $a=-1$ alors $u=(1,-1,-3)$, $v=(1,-1,-1)$, $w=(-1,1,1)$; donc $w=-v$ et il est clair que les deux vecteurs non colinéaires u,v forment une base de F_{-1}, donc $\dim F_{-1} = 2$.

Exercice 6. **(1)** On calcule : $G^2 = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} = F_1$; $G^3 = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix} = F_2$. Hypothèse de récurrence : $G^{n+1} = F_n$; elle est vraie pour $n=1$ (et $n=2$) et elle est héréditaire car si $G^{n+1}=F_n$ alors $G^{n+2} = GF_n = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n+1}&u_n\\u_n&u_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_{n+2}&u_{n+1}\\u_{n+1}&u_n\end{pmatrix} = F_{n+1}$. Donc $G^{n+1} = F_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
(2) On en déduit : $u_{n+1}\,u_{n-1} - u_n^2 = \det F_n = \det(G^{n+1}) = (\det G)^{n+1} = (-1)^{n+1}$.

Exercice 7. *Méthode de la comatrice :*

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} 8+3+12-24+3+4 = 6$$

$\det M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \qquad \det M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -16 \qquad \det M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7$

$\det M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \qquad \det M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -8 \qquad \det M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5$

$\det M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \qquad \det M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \qquad \det M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

d'où la comatrice : $\operatorname{Com} M = \begin{pmatrix} 11 & 16 & -7 \\ -7 & -8 & 5 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$. Et donc : $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M}\ {}^t\operatorname{Com} M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 11 & -7 & -3 \\ 16 & -8 & -6 \\ -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Méthode du pivot :

$$\begin{array}{rrrcrrrl} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ -1 & 2 & 3 & | & 0 & 1 & 0 & L_2 \\ 4 & -1 & 4 & | & 0 & 0 & 1 & L_3 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{rrrcrrrl} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 3 & 6 & | & 1 & 1 & 0 & L_2' = L_2 + L_1 \\ 0 & -5 & -8 & | & -4 & 0 & 1 & L_3' = L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\longleftrightarrow \begin{array}{rrrcrrrl} 1 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 3 & 6 & | & 1 & 1 & 0 & L_2' \\ 0 & 0 & 1 & | & -7/6 & 5/6 & 3/6 & L_3'' = (3L_3' + 5L_2')/6 \end{array}$$

$$\longleftrightarrow \begin{array}{rrrcrrrl} 1 & 1 & 0 & | & 27/6 & -15/6 & -9/6 & L_1' = L_1 - 3L_3'' \\ 0 & 1 & 0 & | & 8/3 & -4/3 & -3/3 & L_2'' = (L_2' - 6L_3'')/3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7/6 & 5/6 & 3/6 & L_3'' \end{array}$$

$$\longleftrightarrow \begin{array}{rrrcrrrl} 1 & 0 & 0 & | & 11/6 & -7/6 & -3/6 & L_1'' = L_1' - L_2'' \\ 0 & 1 & 0 & | & 16/6 & -8/6 & -6/6 & L_2'' \\ 0 & 0 & 1 & | & -7/6 & 5/6 & 3/6 & L_3'' \end{array}$$

et on retrouve bien $M^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 11 & -7 & -3 \\ 16 & -8 & -6 \\ -7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Développons par exemple selon la dernière colonne, puis calculons les déterminants 3×3 par la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -(-2+1-2-2-1-2) + (4+2+2-4+2+2) - (4-2-2-4-2-2) + (2+2+1+2+2-1)$$
$$= 8+8+8+8 = 32.$$

Exercice 9. **(1)**

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & mz & = & 1 & (1) \\ mx & + & y & + & z & = & m & (2) \\ x & + & my & + & z & = & 2m-1 & (3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & mz & = & 1 & (1) \\ & & (1-m)y & + & (1-m^2)z & = & 0 & (2)' = (2) - m(1) \\ & & (m-1)y & + & (1-m)z & = & 2(m-1) & (3)' = (3) - (1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & mz & = & 1 & (1) \\ & & (1-m)y & + & (1-m^2)z & = & 0 & (2)' \\ & & & & (1-m)(m+2)z & = & 2(m-1) & (3)'' = (2)' + (3)' \end{array}\right.$$

• **1[er] cas :** $m = 1$. Alors $(2)'$ et $(3)''$ deviennent $0 = 0$ et il ne reste que l'équation (1) : l'ensemble des solutions est le plan affine d'équation $x+y+z = 1$. (C'est le plan affine passant par le point $(1,0,0)$ et dirigé par le plan vectoriel d'équation $x+y+z = 0$ donc de base $\big((1,-1,0),(0,1,-1)\big)$.)

• **2[e] cas :** $m = -2$. Alors $(3)''$ donne $0 = -6$: aucune solution.

• **3ᵉ cas :** $m \notin \{1, -2\}$. Le système devient (après simplification) :

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 & (1) \\ y + (m+1)z = 0 & (2)' \\ z = -\dfrac{2}{m+2} & (3)'' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{m}{m+2} & (1)' = (1) - (2)' + (3)'' \\ y = \dfrac{2(m+1)}{m+2} & (2)'' = (2)' - (m+1)(3)'' \\ z = -\dfrac{2}{m+2} & (3)'' \end{cases} \qquad \text{(solution unique).}$$

(2) Le déterminant du système est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} 1 + m^3 + 1 - m - m - m = m^3 - 3m + 2 = (m-1)^2(m+2).$$

Le système est de Cramer ssi $m \notin \{1, -2\}$ et les formules de Cramer donnent alors :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \\ 2m-1 & m & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}} \overset{\text{Sarrus}}{=} \frac{1 + (2m-1) + m^3 - (2m-1)m - m - m}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{m^3 - 2m^2 + m}{(m-1)^2(m+2)}$$

$$= \frac{m(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{m}{m+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & 2m-1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}} \overset{\text{Sarrus}}{=} \frac{m + m^2(2m-1) + 1 - m^2 - (2m-1) - m}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{2m^3 - 2m^2 - 2m + 2}{(m-1)^2(m+2)}$$

$$= \frac{2(m-1)(m^2-1)}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{2(m+1)}{m+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m \\ 1 & m & 2m-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}} \overset{\text{Sarrus}}{=} \frac{(2m-1) + m^2 + m - 1 - m^2 - (2m-1)m}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{-2m^2 + 4m - 2}{(m-1)^2(m+2)}$$

$$= \frac{-2(m^2 - 2m + 1)}{(m-1)^2(m+2)} = -\frac{2}{m+2}$$

Exercice 10.

(1) $f(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & 3c \\ b+2d & 3d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & c \\ 2a+3b & 2c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & 2c \\ -2a-2b+2d & -2c \end{pmatrix}$.

Donc dans la base $\mathcal{B}$: $f(u) = 2c(e_1 + e_2 - e_4) + (-2a - 2b + 2d)e_3$.

(2) Le résultat obtenu montre que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{e_1 + e_2 - e_4, e_3\}$; or, $\mathcal{B}$ étant une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, e_3 est linéairement indépendant de $e_1 + e_2 - e_4$; et donc $(e_1 + e_2 - e_4, e_3)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

(3) $f(u) \in \operatorname{Ker} f$ ssi $2c = 0$ et $-2a - 2b + 2d = 0$, donc ssi $c = 0$ et $d = a + b$, et donc ssi $u = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a+b \end{pmatrix} = a(e_1 + e_4) + b(e_3 + e_4)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{e_1 + e_4, e_3 + e_4\}$; or, $\mathcal{B}$ étant une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $e_3 + e_4$ est linéairement indépendant de $e_1 + e_4$; et donc $(e_1 + e_4, e_3 + e_4)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.

(4) $\operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{e_1 + e_2 - e_4, e_3, e_1 + e_4, e_3 + e_4\} = \operatorname{Vect}\{e_1 + e_2 - e_4, e_3, e_1 + e_4, e_3 + e_4 - e_3\} = \operatorname{Vect}\{e_1 + e_2 - e_4, e_3, e_1 + e_4 - e_4, e_4\} = \operatorname{Vect}\{(e_1 + e_2 - e_4) - e_1 + e_4, e_3, e_1, e_4\} = \operatorname{Vect}\{e_2, e_3, e_1, e_4\} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la formule de

Grassmann donne $\dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f) = 2 + 2 - 4 = 0$ donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ et donc la somme est directe. Donc $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(5) Le résultat de la première question donne sans nouveau calcul :
$f(e_1) = -2e_3$, $f(e_2) = 2(e_1 + e_2 - e_4)$, $f(e_3) = -2e_3$, $f(e_4) = 2e_3$. Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(6) On voit que $e_1 = e'_1 + e'_3 - e'_4$, $e_2 = -e'_1 + e'_2 - e'_3 + 2e'_4$, $e_3 = e'_1$, $e_4 = -e'_1 + e'_4$. Cela montre que $\mathcal{B}'$ est une partie génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; et comme elle a quatre éléments et que $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On voit que

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(7) $f(e'_1) = f(e_3) = -2e_3 = -2e'_1$, $f(e'_2) = f(e_1 + e_2 - e_3 - e_4) = f(e_1) + f(e_2) = -2e_3 + 2(e_1 + e_2 - e_4) = 2e'_2$, $f(e'_3) = f(e_1 + e_4) = 0$, $f(e'_4) = f(e_3 + e_4) = 0$ (rappelons que $e_1 + e_4$ et $e_3 + e_4$ sont dans $\operatorname{Ker} f$). Donc :

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(8) A' est diagonale, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A'^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (noter qu'à cause des 0 sur la diagonale cette formule n'est pas valable pour $n = 0$ si on convient que $A^0 = I_4$). On en déduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} A^n = PA'^n P^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ (-2)^n & -2^n & 0 & 0 \\ 0 & -2^n & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 \\ (-2)^n & -2^n[(-1)^n + 1] & (-2)^n & -(-2)^n \\ 0 & -2^n & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$