Corrigé du test 1

Exercice 1. Trouver la solution générale de l'équation de Bernoulli $y' - \dfrac{3}{4}\, y = (9x-3)y^5$ dans un intervalle (qu'on ne demande pas de préciser) où $y \neq 0$.

$y' - \dfrac{3}{4}\, y = (9x-3)y^5 \Longrightarrow \dfrac{y'}{y^5} - \dfrac{3}{4}\, \dfrac{1}{y^4} = 9x - 3$. On pose $z = \dfrac{1}{y^4}$ donc $z' = -4\, \dfrac{y'}{y^5}$.

L'équation devient :

$-\dfrac{1}{4}\, z' - \dfrac{3}{4}\, z = 9x - 3$ (linéaire).

Équation homogène : $-\dfrac{1}{4}\, z'_H - \dfrac{3}{4}\, z_H = 0 \Longleftrightarrow z'_H = -3z_H$

Solution de l'équation homogène : $z_H = C\, e^{-3x}$ où C est une constante.

Solution particulière de l'équation avec second membre : $z_p = -12x + 8$

Solution générale de l'équation linéaire : $z = -12x + 8 + C\, e^{-3x}$

Conclusion : $y = \pm\big(-12x + 8 + C\, e^{-3x}\big)^{-1/4}$ où C est une constante.

Exercice 2. Soit une équation de Riccati $y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$. On suppose connue une solution y_p. Sous quelle forme cherchera-t-on y pour transformer l'équation de Riccati en une équation de Bernoulli ? Écrire l'équation de Bernoulli ainsi obtenue (on ne demande pas de la résoudre).

On pose $y = y_p + z$. L'équation devient :

$y_p' + z' = a(x) + b(x)y_p + b(x)z + c(x)y_p^2 + 2c(x)y_p z + c(x)z^2$

Et puisque $y_p' = a(x) + b(x)y_p + c(x)y_p^2$ il reste :

$z' = \big(b(x) + 2c(x)y_p(x)\big)z + c(x)z^2$

qui est une équation de Bernoulli.

Suite au verso...

Exercice 3. Résoudre *par variation des constantes* l'équation différentielle $y'' - 6y' + 9y = x^2e^{3x}$.

Équation homogène : $y''_H - 6y'_H + 9y_H = 0$.

Équation caractéristique : $r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r = 3$ (racine double).

Solution de l'équation homogène : $y_H = a_1e^{3x} + a_2xe^{3x}$
où a_1 et a_2 sont des constantes.

Variation des constantes : on cherche y sous la forme

$$y = C_1(x)e^{3x} + C_2(x)xe^{3x}.$$

Système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} {C_1}'e^{3x} + {C_2}'xe^{3x} & = & 0 \\ {C_1}' \cdot 3e^{3x} + {C_2}' \cdot (1+3x)e^{3x} & = & x^2e^{3x} \end{array}\right.$$

Dans la seconde équation on supprime ${C_1}' \cdot 3e^{3x} + {C_2}' \cdot 3xe^{3x}$ (qui est nul d'après la première). Et on simplifie par e^{3x} dans les deux équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} {C_1}' + {C_2}'x & = & 0 \\ {C_2}' & = & x^2 \end{array}\right.$$

La seconde équation donne $C_2 = \frac{x^3}{3} + a_2$ (où a_2 est une constante) et la première, qui se récrit ${C_1}' = -x^3$, donne $C_1 = -\frac{x^4}{4} + a_1$ (où a_1 est une constante). La solution générale est donc :

$$\begin{array}{rcl} y & = & -\dfrac{x^4}{4}\,e^{3x} + \dfrac{x^3}{3}\,xe^{3x} + a_1e^{3x} + a_2xe^{3x} \\ & = & \dfrac{x^4}{12}\,e^{3x} + a_1e^{3x} + a_2xe^{3x}. \end{array}$$

Fin.