Algèbre linéaire 2 — Année 2019-2020

Tutorat 1 - Correction

Niveau *

Exercice 1

Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints, puis en produits de transpositions.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 1425376 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 3261547 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7146253 \end{pmatrix}$$

Calculer la signature et l'ordre des permutations ci-dessus. Calculer le produit $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3$, sa signature et son ordre.

Correction :

$\sigma_1 = (2,4,5,3)(6,7)$, $\sigma_2 = (1,3,6,4)$, $\sigma_3 = (1,7,3,4,6,5,2)$. En utilisant la formule pour le cycles $\varepsilon(c) = (-1)^{longeur(c)-1}$ et le fait que ε est un morphisme de groupe, on obtient $\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^3(-1)^1 = 1$, $\varepsilon(\sigma_2) = (-1)^3 = -1$ et $\varepsilon(\sigma_3) = (-1)^6 = 1$. En utilisant que l'ordre d'une permutation est le *ppcm* de l'ordre des cycles dans la décomposition en cycles à supports disjoints, on obtient $|\sigma_1| = 4$, $|\sigma_2| = 4$, $|\sigma_3| = 7$.

On a $\sigma_2^{-1} = (4,6,3,1) = (6,3,1,4) = (3,1,4,6) = (1,4,6,3)$ d'où $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3 = (1,6,3,7)(2,5,4)$ et par les mêmes arguments on obtient $\varepsilon(\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3) = (-1)^3(-1)^2 = -1$ (ou $\varepsilon(\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_1)^{-1}\varepsilon(\sigma_3) = -1$), et $|\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2| = 12$. (Remarque : $|\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2| \neq ppcm(|\sigma_1|, |\sigma_2^{-1}|, |\sigma_3|)$).

Exercice 2

Déterminer le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par les entiers 24, 36 et -54.

Correction : Soit H ce sous-groupe. Par définition on a $H = \{24k+36l-54n,\ k,l,n \in \mathbb{Z}\}$. On a $pgcd(24,36,-54) = 6$ donc il existe une relation de Bezout, qu'on trouve facilement : $24+36-54 = 6$.Donc 6 est dans H donc H contient $6\mathbb{Z}$. Réciproquement, tout élément $24k+36l-54n$ de H (avec $k,l,n \in \mathbb{Z}$ est a fortiori un multiple de 6 donc H est inclus dans $6\mathbb{Z}$. D'où $H = 6\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Quelle est la décomposition de X^3+1 en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$? Dans $\mathbb{R}[X]$?

Correction : On peut par exemple crire $X^6 - 1 = (X^3+1)(X^3-1)$ donc une racine complexe de X^3+1 est une racine 6ime de l'unit qui n'est pas racine $3imedel'unit$. Il y en a 3 qui sont -1, $-j = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $-j^2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Ainsi la factorisation en produit d'irrductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est $X^3+1 = (X+1)(X+j)(X+j^2)$. En regroupant les racines complexes conjugues on obtient la dcomposition en produit d'irrductibles dans $\mathbb{R}[X]$: $X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)$. Autre mthode, trouver les racines complexes en rsolvant $(re^{i\theta})^3 = -1$.

Niveau **

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathcal{S}_n \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes.

1. Si σ est une transposition, que peut-on dire de $f(\sigma)$?
2. On dit que deux permutations σ_1 et σ_2 sont conjugues si $\exists \rho \in \mathcal{S}_n,\ \sigma_1 = \rho\sigma_2\rho^{-1}$. Montrer que deux permutations conjuguées ont même image par f.

3. Calculer pour $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$ deux à deux distincts, $\rho \circ (i,j) \circ \rho^{-1}$ où $\rho = (i,k)(j,l)$ et $(j,k)(i,j)(j,k)$.
4. En déduire que f est la fonction constante 1, ou bien f est la signature.

Correction :

1. On note d'abord que $\mathbb{C}^*$ est un groupe pour la loi $\times$, de neutre 1. Si σ est une transposition alors $\sigma^2 = id$, et comme f est un morphisme de groupe $f(\sigma^2) = f(\sigma)^2 = f(id) = 1$. D'où $f(\sigma) = \pm 1$.
2. On utilise encore que f est un morphisme de groupe donc $f(\sigma_1) = f(\rho\sigma_2\rho^{-1}) = f(\rho)f(\sigma)f(\rho)^{-1} = f(\sigma)$ (car $\mathbb{C}^*$ est commutatif).
3. On a $\rho \circ (i,j) \circ \rho^{-1} = (k,l)$ et $(j,k)(i,j)(j,k) = (i,k)$. Cela signifie que deux permutations quelconques sont toujours conjugues dans $\mathcal{S}_n$.
4. D'aprs les questions prcdentes, toutes les transpositions ont la mme image $\alpha = \pm 1$. Toute permutation σ peut se dcomposer en produits de transpositions, notons r le nombre de transpositions pour une telle décomposition de σ. Alors $f(\sigma) = \alpha^r$. Si $\alpha = 1$ on obtient que f est la fonction constante égale à 1, sinon on obtient $f = \varepsilon$. (Remarque : cet exercice prouve que la signature est le seul morphisme de groupe de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$ non trivial)

Exercice 5

Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ?

Correction :

Par l'absurde supposons que $(\mathbb{Q}, +)$ est engendré par un seul élément $\frac{p}{q}$ (p et q premiers entre eux) alors tout élément de $\mathbb{Q}$ s'écrit $n\frac{p}{q}$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que $\frac{p}{2q}$ (qui appartient à $\mathbb{Q}$) doit s'écrire $n\frac{p}{q}$, mais alors $2n = 1$ avec $n \in \mathbb{Z}$ ce qui est impossible. Conclusion $(\mathbb{Q}, +)$ n'est pas monogène.

Exercice 6

Pour quelles valeurs de a le polynme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Correction :

Soit $x \in \mathbb{R}$; x est une racine multiple de P si et seulement si $P(x) = 0$ et $P'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
P(x) = P'(x)0 \quad &\iff \quad \begin{cases} (x+1)^7 - x^7 - a = 0 \\ 7(x+1)^6 - 7x^6 = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} (x+1)x^6 - x^7 - a = 0 & \text{en utilisant la deuxième équation} \\ (x+1)^6 = x^6 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x^6 = a \\ (x+1)^3 = \pm x^3 & \text{en prenant la racine carrée} \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x^6 = a \\ x+1 = \pm x & \text{en prenant la racine cubique} \end{cases}
\end{aligned}$$

qui admet une solution ($x = -\frac{1}{2}$) si et seulement si $a = \frac{1}{64}$.

Niveau ***

Exercice 7

Soit G un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$. Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant : dans un groupe, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.

1. Montrer que si G est d'ordre impair alors G ne contient aucune permutation impaire.

2. Montrer que si G contient au moins une permutation impaire, alors G contient autant de permutations paires que de permutations impaires.

Correction :

1. Si G est d'ordre impair, alors tous les éléments de G dont nécéssairement d'ordre impair. La décomposition en cycles disjoints d'une permutation d'ordre impair ne contient que des cycles de longueur impaire. Donc la signature d'une telle permutation est toujours 1.
2. Soit $\sigma \in G$ une telle permutation impaire. On construit l'application $\phi : G \to G$, $\rho \to \sigma\rho$. Elle est bien définie car G est un sous-groupe donc $\sigma G \subset G$. C'est une bijection de réciproque $\phi^{-1} = \phi$. Elle envoie les permutations paires sur les impaires et inversement, car $\varepsilon(\sigma\rho) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\rho) = -\varepsilon(\rho)$. Ainsi il y a autant de permutations paires que d'impaires.

Exercice 8

Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Correction : Soit H un tel sous-groupe. Les $z \in H$ est d'ordre infini alors $\langle z \rangle$ est un ensemble infini dans H, ce que contredit que H est fini. Pour $z \in H$, on note n_z son ordre. On a donc $z^{n_z} = 1$. En prenant $N = ppcm(n_z,\ z \in H)$, on obtient que $\forall z \in H, z^N = 1$. Donc H est inclus dans l'ensemble des racines Nièmes de l'unité, qui est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$. On montre ensuite que les sous-groupes de ce nouveau groupe sont encore des ensembles de racines $n$ièmes de l'unité.

Exercice 9

Factoriser $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ sachant qu'il admet une racine triple.

Correction : On peut calculer le *pgcd* de P et $P''(X) = 20*x^3 - 156*x^2 + 402*x - 342$ qui vaut $pgcd(P, P'') = X - 3$. La racine triple est donc 3. On obtient $P(X) = (X-3)^3(X^2 - 4X + 4) = (X-3)^3(X-2)^2$.