Programmation Linéaire
Cours 1 : programmes linéaires, modélisation et résolution graphique

F. Clautiaux
francois.clautiaux@math.u-bordeaux1.fr

Université Bordeaux 1
Bât A33

Motivation et objectif du cours

Introduction à la programmation linéaire
Un outil qui permet de :

- modéliser
- résoudre

toute une classe de problèmes d'optimisation.
Existence de solveurs efficace pour la PL

Ouvrages de référence

- V. Chvátal - Linear Programming, W.H.Freeman, New York, 1983.
- R. J. Vanderbei - Linear Programming, Foundations and Extensions, Springer-Verlag, 2008.
- C. Guéret, C. Prins et M. Sevaux - Programmation linéaire : 65 problèmes d'optimisation modélisés et résolus avec Visual Xpress, Eyrolles, 2000.
- C. Prins et M. Sevaux - Programmation linéaire avec Excel : 55 problèmes d'optimisation modélisés pas à pas et résolus avec Excel, Eyrolles, 2011.

Sommaire

Problème de production

Un fabricant produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de Fraise, de Lait et de Sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières.

	A	B
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

On dispose de 800 Kg de Fraises, 700 Kg de Lait et 300 Kg de sucre.
La vente de 1 Kg de yaourts A et B rapporte respectivement 4€ et 5€.

Le fabricant cherche à maximiser son profit.

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
- Que cherche-t-on à optimiser ?
- Quelles sont les contraintes du problème ?

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
  - Seules valeurs non constantes : les quantités de yaourts A et B produites
  - On parle de variables
  - On les notera x_A et x_B
- Que cherche-t-on à optimiser ?
- Quelles sont les contraintes du problème ?

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
  - Variables : x_A et x_B
- Que cherche-t-on à optimiser ?
  - Le profit z
  - Calculé à partir de x_A et x_B
  - On parle de fonction objectif
  - $z = 4x_A + 5x_B$
- Quelles sont les contraintes du problème ?

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
  - Variables : x_A et x_B
- Que cherche-t-on à optimiser ?
  - $\max z = 4x_A + 5x_B$
- Quelles sont les contraintes du problème ?
  - Première contrainte : 800 Kg de fraises disponibles
  - la quantité utilisée dépend de la production : $2x_A + x_B$
  - $2x_A + x_B \leq 800$

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
  - Variables : x_A et x_B
- Que cherche-t-on à optimiser ?
  - $\max z = 4x_A + 5x_B$
- Quelles sont les contraintes du problème ?

$$\begin{array}{rrll} 2x_A + & x_B & \leq 800 & \text{(fraises)} \\ x_A + & 2x_B & \leq 700 & \text{(lait)} \\ & x_B & \leq 300 & \text{(sucre)} \end{array}$$

Modélisation

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
  - Variables : x_A et x_B
- Que cherche-t-on à optimiser ?
  - $\max z = 4x_A + 5x_B$
- Quelles sont les contraintes du problème ?

$$
\begin{array}{rrll}
2x_A + & x_B & \leq 800 & \text{(fraises)} \\
x_A + & 2x_B & \leq 700 & \text{(lait)} \\
 & x_B & \leq 300 & \text{(sucre)} \\
x_A, & x_B & \geq 0 & \textcolor{red}{\text{positivité !}}
\end{array}
$$

Mon premier programme linéaire

$$
\begin{array}{rrl}
\max 4x_A + & 5x_B & \\
2x_A + & x_B & \leq 800 \\
x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
 & x_B & \leq 300 \\
x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}
$$

Problème de transport

Approvisionner au moindre coût les clients à partir des usines.

Usines ($i \in I$)	Bordeaux	Biarritz	Toulouse
Productions (p_i)	25	15	20

Clients ($j \in J$)	Pau	Bayonne	Bordeaux	Libourne
Demandes (d_j)	20	12	9	14

Prix/unité ($c_{i,j}$)	Pau	Bayonne	Bordeaux	Libourne
Bordeaux	26	19	0	4
Biarritz	12	2	20	24
Toulouse	19	30	24	28

Modélisation

- Variables :
  $x_{i,j}$: quantité transportée de i à j

Modélisation

- Variables :
  $x_{i,j}$: quantité transportée de i à j
- Objectif :
  Minimiser $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{i,j}x_{i,j}$

Modélisation

- Variables :

  $x_{i,j}$: quantité transportée de i à j
- Objectif :

  Minimiser $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{i,j} x_{i,j}$
- Contraintes :

$$\begin{array}{ll} \sum_{j \in J} x_{i,j} \leq p_i, & \forall i \in I \text{ (Capacité de production)} \\ \sum_{i \in I} x_{i,j} = d_j, & \forall j \in J \text{ (Demandes à satisfaire)} \\ x_{i,j} \geq 0, & \forall i \in I, j \in J \end{array}$$

Problème de planification

Planifier la production d'articles à moindre coût pour les 4 prochains mois.

Production maximale normale : 1200 articles / mois
Production maximale en heure sup : 400 articles / mois
Surcoût heures sup : 7 euros / article
Stockage : 3 euros / article / mois

	mois 1	mois 2	mois 3	mois 4
Demandes	900	1100	1700	1300

Modélisation

- Variables :

  x_t : production normale en période $t = 1, \ldots, 4$

  y_t : production en heure sup en periode $t = 1, \ldots, 4$

  s_t : stock en fin de période $t = 1, \ldots, 3$

Modélisation

- Variables :

  x_t : production normale en période $t = 1, \dots, 4$

  y_t : production en heure sup en periode $t = 1, \dots, 4$

  s_t : stock en fin de période $t = 1, \dots, 3$

- Objectif :

  Minimiser $7 \sum_{t=1}^{t=4} y_t + 3 \sum_{t=1}^{t=3} s_t$

- Contraintes :

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & x_1 + & y_1 = & 900 + & s_1 & \\
s_1 + & x_2 + & y_2 = & 1100 + & s_2 & \\
s_2 + & x_3 + & y_3 = & 1700 + & s_3 & \\
s_3 + & x_4 + & y_4 = & 1300 & & \\
0 \leq & x_t \leq & 1200, & & & t = 1, \dots, 4 \\
0 \leq & y_t \leq & 400, & & & t = 1, \dots, 4 \\
 & s_t \geq & 0, & & & t = 1, \dots, 3
\end{array}
$$

Sommaire

Règles de réécriture (1)

Toute contrainte d'égalité peut s'écrire comme deux inégalités :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \equiv \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b \end{cases}$$

Toute contrainte $\geq$ peut s'écrire comme une contrainte $\leq$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b \equiv \sum_{i=1}^{n} -a_i x_i \leq -b$$

Tout problème de minimisation peut s'écrire comme un problème de maximisation :

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \equiv \min \sum_{i=1}^{n} -c_i x_i$$

Ecriture générale d'un programmation linéaire

On peut écrire ainsi un programme linéaire avec n variables $x_1, \ldots, x_n$ et m contraintes.

$$\begin{array}{rc} \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\ & x_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \ldots, n) \end{array}$$

- **Linéarité :** Objectif et contraintes sont des fonctions linéaires des variables de décision (les coefficients c_i et a_{ij} des variables sont constants)
- **Continuité :** Les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle respectant les contraintes linaires

Exemples simples de programmes non linéaires (1)

$$
\begin{array}{rc}
\text{min} & \sum_{i=1}^{n} x_i x_i \\
\text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\
 & x_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \ldots, n)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rc}
\text{min} & \sum_{i=1}^{n} x_i \\
\text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\
 & x_i \in \mathbb{N}, (i = 1, \ldots, n)
\end{array}
$$

Exemples simples de programmes non linéaires (2)

$$\begin{array}{rc} \min & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\ & x_i \in \mathbb{R} \cap [l_1, u_1] \cap [l_2, u_2], (i = 1, \ldots, n) \end{array}$$

$$\begin{array}{rc} \min & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\ & x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = x_3 \\ & x_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \ldots, n) \end{array}$$

Forme normale d'un programme linéaire

Tout programme linéaire peut s'écrire sous **forme normale**.

$$\begin{array}{rc} \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{sous les contraintes} & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, (j = 1, \ldots, m) \\ & x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \ldots, n) \end{array}$$

Si on a une variable $x_i \in \mathbb{R}$, on introduit $x_i^+ \geq 0$ et $x_i^- \geq 0$ et on pose $x_i = x_i^+ + x_i^-$.

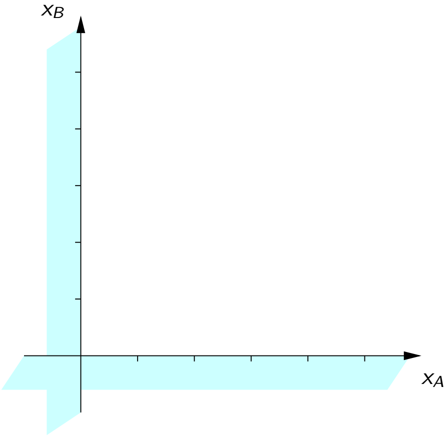
Sommaire

Résolution graphique

- On dispose d'un outil (la PL) pour modéliser des problèmes
- Comment résoudre les problèmes à l'aide de la PL ?
  - Plusieurs algorithmes existent, dont le simplexe (prochain cours)
  - Pour des problèmes avec deux variables, on peut résoudre graphiquement (aide à comprendre la structure du problème)

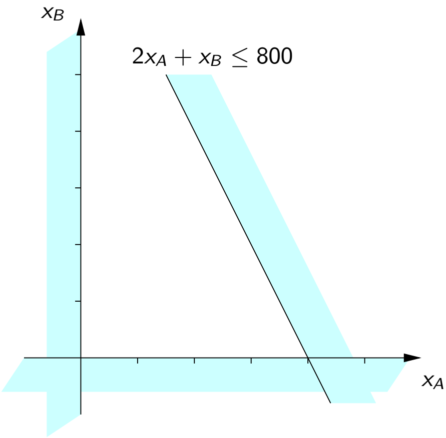
Représentation graphique

$$
\begin{array}{lrrl}
\max & 4x_A + & 5x_B & \\
 & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\
 & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
 & & x_B & \leq 300 \\
 & x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}
$$



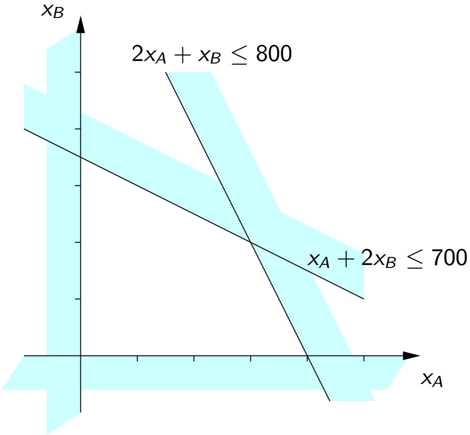
Représentation graphique

$$\begin{array}{lrrl} \max & 4x_A+ & 5x_B & \\ & 2x_A+ & x_B & \leq 800 \\ & x_A+ & 2x_B & \leq 700 \\ & & x_B & \leq 300 \\ & x_A, & x_B & \geq 0 \end{array}$$



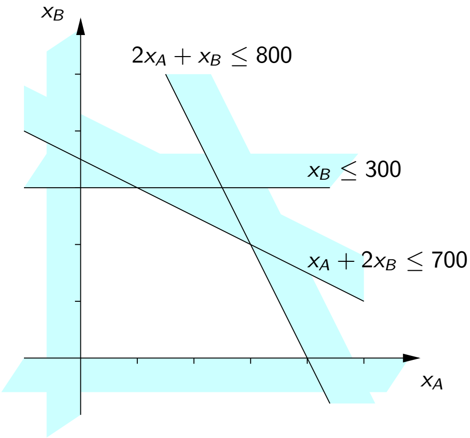
Représentation graphique

$$
\begin{array}{lrrl}
\max & 4x_A + & 5x_B & \\
& 2x_A + & x_B & \leq 800 \\
& x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
& & x_B & \leq 300 \\
& x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}
$$



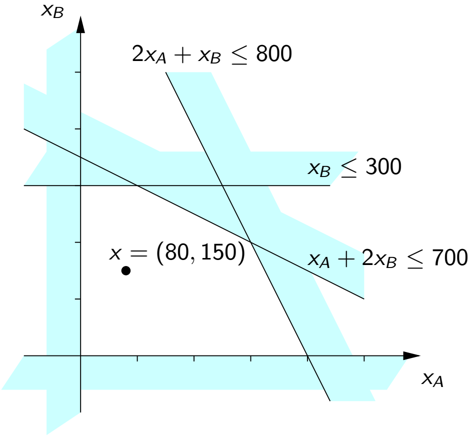
Représentation graphique

$$
\begin{array}{lrrl}
\max & 4x_A + & 5x_B & \\
 & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\
 & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
 & & x_B & \leq 300 \\
 & x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}
$$



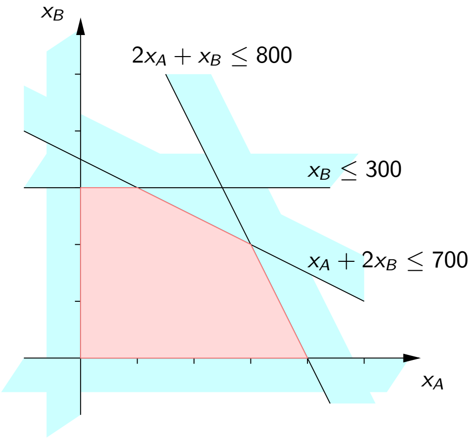
Terminologie

- **Solution :**
  affectation de valeurs aux variables
- **Solution réalisable :**
  solution réalisable si les valeurs satisfont l'ensemble des contraintes
- **Région réalisable :**
  ensemble des solutions réalisables.



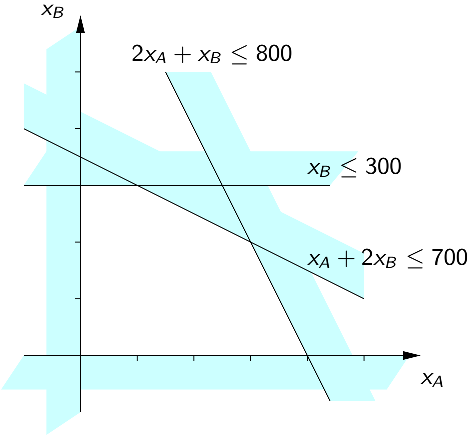
Terminologie

- **Solution :**
  affectation de valeurs aux variables
- **Solution réalisable :**
  solution réalisable si les valeurs satisfont l'ensemble des contraintes
- **Région réalisable :**
  ensemble des solutions réalisables.



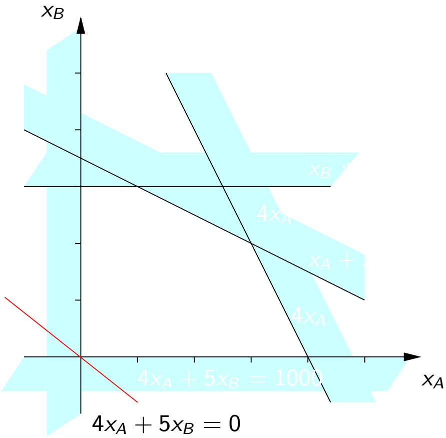
Résolution graphique

$$
\begin{array}{lrrl}
\text{Max} & 4x_A + & 5x_B & \\
 & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\
 & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
 & & x_B & \leq 300 \\
 & x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}
$$



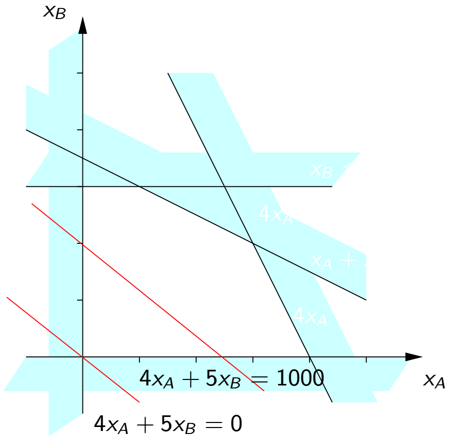
Résolution graphique

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max} & 4x_A + & 5x_B & \\
 & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\
 & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
 & & x_B & \leq 300 \\
 & x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}
$$



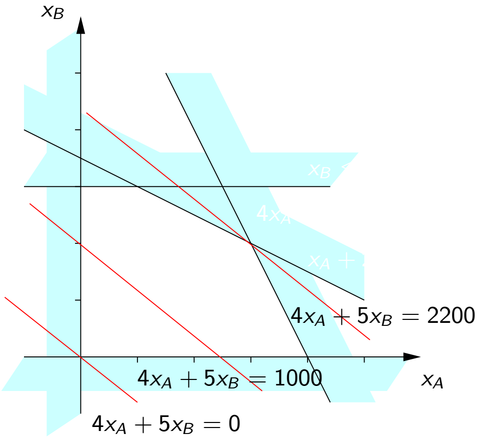
Résolution graphique

$$\begin{array}{lrrl} \text{Max} & 4x_A + & 5x_B & \\ & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\ & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\ & & x_B & \leq 300 \\ & x_A, & x_B & \geq 0 \end{array}$$



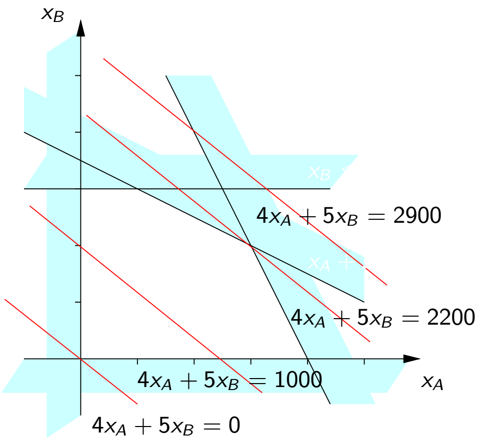
Résolution graphique

$$
\begin{array}{lrrl}
\text{Max} & 4x_A + & 5x_B & \\
 & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\
 & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\
 & & x_B & \leq 300 \\
 & x_A, & x_B & \geq 0
\end{array}
$$



Résolution graphique

$$\begin{array}{lrrl} \text{Max} & 4x_A + & 5x_B & \\ & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\ & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\ & & x_B & \leq 300 \\ & x_A, & x_B & \geq 0 \end{array}$$

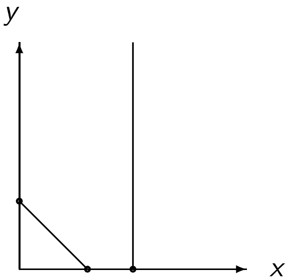


Existence d'une solution (optimale)

Quatre possibilités

$$\begin{aligned} \min x + 2y \\ \text{s.t. } x \leq 5 \\ x + y \geq 3 \\ x, y \geq 0 \end{aligned}$$

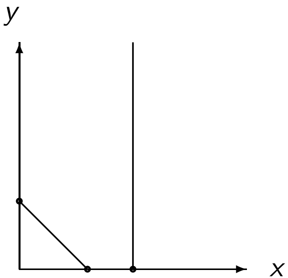
Une solution optimale unique.



Existence d'une solution (optimale)

Quatre possibilités

$$\max x + 2y$$
$$\text{s.t. } x \leq 5$$
$$x + y \geq 3$$
$$x, y \geq 0$$

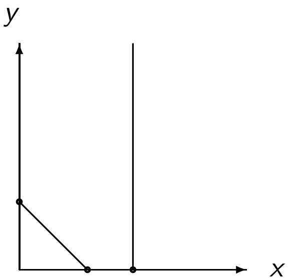


Solution non bornée.

Existence d'une solution (optimale)

Quatre possibilités

$$\begin{aligned} \max x + 2y \\ \text{s.t. } x \leq 5 \\ x + y \geq 3 \\ x + y \leq -1 \\ x, y \geq 0 \end{aligned}$$



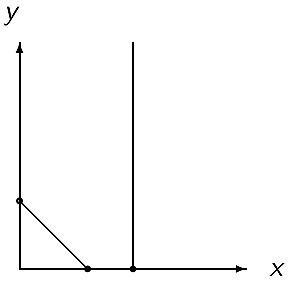
Pas de solution.

Existence d'une solution (optimale)

Quatre possibilités

$$\begin{aligned} \max x \\ \text{s.t. } x \leq 5 \\ x + y \geq 3 \\ x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Infinité de solutions.



Sommaire

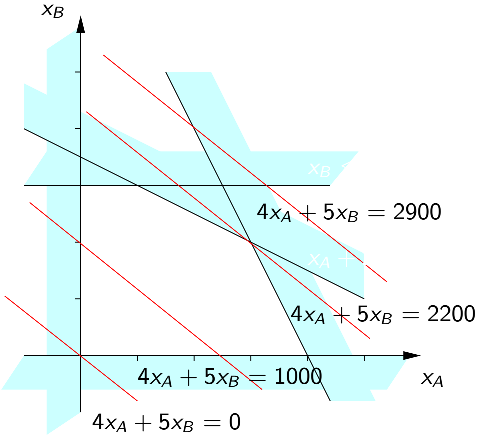
Notion de point extrême

Proposition

S'il en existe, il y a toujours une solution optimale sur un sommet (point extrême) de la région réalisable

Corollaire

Pour trouver l'optimum, il "suffit" d'examiner les points extrêmes de la région réalisable



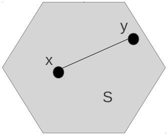
Polyèdres et points extrêmes (1)

Définition

Un **polyèdre convexe** est l'ensemble des solutions d'un système fini d'inégalités linéaires.

L'ensemble des solutions admissibles d'un PL est donc un polyèdre convexe.
On s'intéressera dans un premier temps aux polyèdres **bornés**.

Rappel : S est convexe si
$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in S.$



Polyèdres et points extrêmes (2)

Définition

Un point $\mathbf{x_0}$ d'un ensemble convexe S est un point extrême de S s'il n'existe pas deux points $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in S$ t.q. $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x_1} + (1 - \lambda \mathbf{x_2})$.

Théorème

Soit S un ensemble convexe borné de $\mathbb{R}^n$ et S^e l'ensemble de ses points extrêmes. Si $\mathbf{x} \in S$ alors $\mathbf{x}$ peut s'écrire comme une combinaison convexe de $n+1$ éléments de S^e.

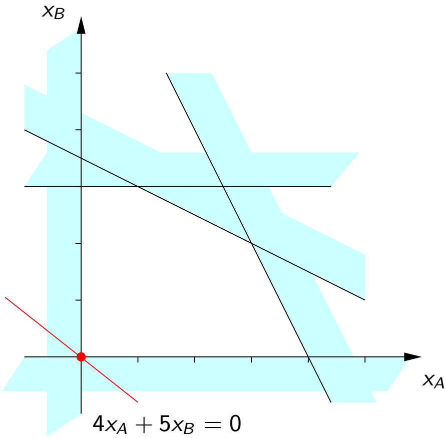
Rappel : soit $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$ alors pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{ax} \leq \max\{\mathbf{ay}, \mathbf{az}\}$.

Théorème

Si le polyèdre formé par l'ensemble des solutions d'un PL est borné, alors il existe au moins une solution optimale et l'une d'elles est obtenue sur un point extrême.

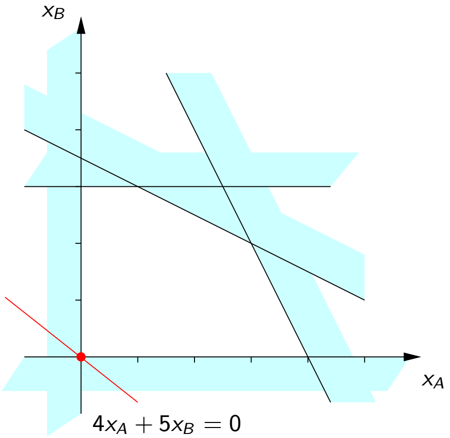
Algorithme géométrique

1. Partir d'un point extrême **x** de la région réalisable



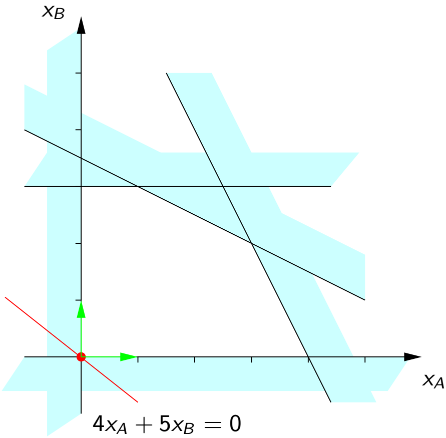
Algorithme géométrique

1. Partir d'un point extrême **x** de la région réalisable
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente. S'il n'en existe pas, **x** est optimal, STOP



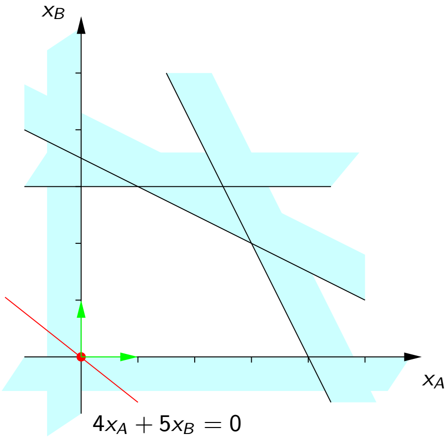
Algorithme géométrique

1. Partir d'un point extrême **x** de la région réalisable
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente.
   S'il n'en existe pas, **x** est optimal, STOP
3. Se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême **y** suivant.
   S'il n'existe pas, le problème est non borné, STOP
   Sinon, poser **x** $\leftarrow$ **y** et revenir en 2



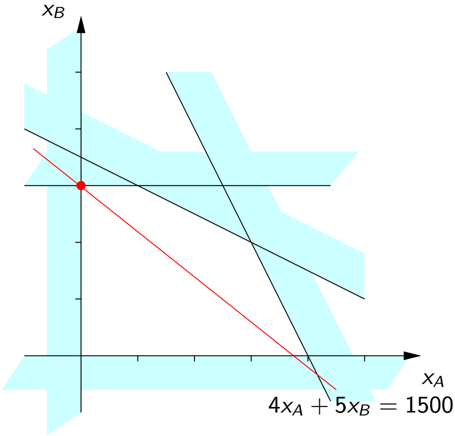
Algorithme géométrique

1. Partir d'un point extrême **x** de la région réalisable
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente.
   S'il n'en existe pas, **x** est optimal, STOP
3. Se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême **y** suivant.
   S'il n'existe pas, le problème est non borné, STOP
   Sinon, poser **x** $\leftarrow$ **y** et revenir en 2



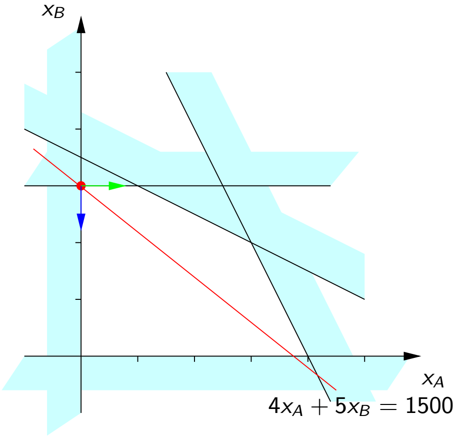
Algorithme géométrique

1. Partir d'un point extrême **x** de la région réalisable
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente.
   S'il n'en existe pas, **x** est optimal, STOP
3. Se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême **y** suivant.
   S'il n'existe pas, le problème est non borné, STOP
   Sinon, poser $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}$ et revenir en 2



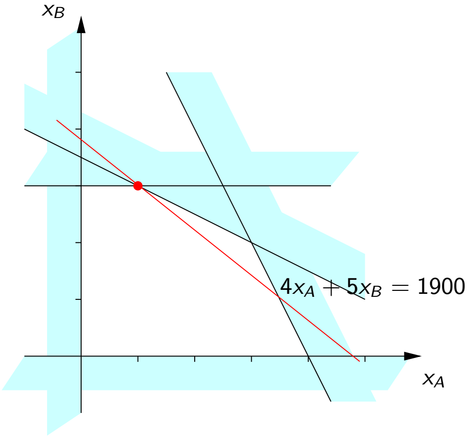
Algorithme géométrique

1. Partir d'un point extrême $\mathbf{x}$ de la région réalisable
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente.
   S'il n'en existe pas, $\mathbf{x}$ est optimal, STOP
3. Se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême $\mathbf{y}$ suivant.
   S'il n'existe pas, le problème est non borné, STOP
   Sinon, poser $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}$ et revenir en 2



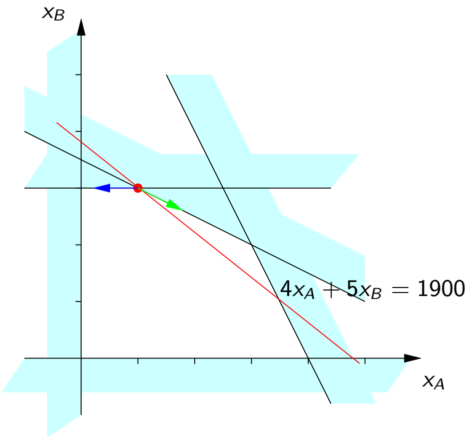
Algorithme géométrique

1. Partir d'un point extrême $\mathbf{x}$ de la région réalisable
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente.
   S'il n'en existe pas, $\mathbf{x}$ est optimal, STOP
3. Se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême $\mathbf{y}$ suivant.
   S'il n'existe pas, le problème est non borné, STOP
   Sinon, poser $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}$ et revenir en 2



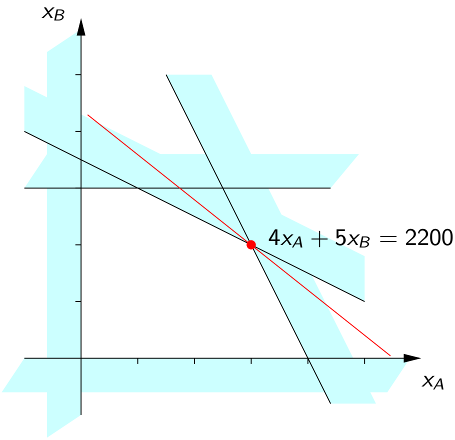
Algorithme géométrique

1. Partir d'un point extrême **x** de la région réalisable
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente.
   S'il n'en existe pas, **x** est optimal, STOP
3. Se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême **y** suivant.
   S'il n'existe pas, le problème est non borné, STOP
   Sinon, poser $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}$ et revenir en 2



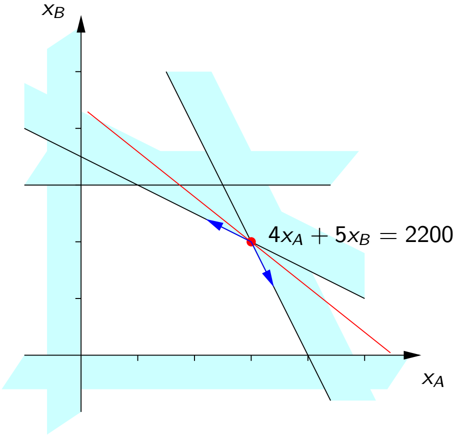
Algorithme géométrique

1. Partir d'un point extrême **x** de la région réalisable
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente.
   S'il n'en existe pas, **x** est optimal, STOP
3. Se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême **y** suivant.
   S'il n'existe pas, le problème est non borné, STOP
   Sinon, poser $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}$ et revenir en 2



Algorithme géométrique

1. Partir d'un point extrême $\mathbf{x}$ de la région réalisable
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente.
   S'il n'en existe pas, $\mathbf{x}$ est optimal, STOP
3. Se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême $\mathbf{y}$ suivant.
   S'il n'existe pas, le problème est non borné, STOP
   Sinon, poser $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}$ et revenir en 2



Sommaire

Forme standard

Jusqu'à présent on a utilisé la **forme normale** pour représenter un programme linéaire.
On introduit la **forme standard** qui va être utilisée dans l'algorithme du simplex.

$$\begin{array}{rrr} \max z = & 4x_1 + 5y_1 & \\ & 2x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq 10 \\ & -x_2 & \leq -2 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} \max z = & 4x_1 + 5x_2 & +0s_1 + 0s_2 & +0s_3 & \\ & 2x_1 + x_2 & +s_1 & & = 4 \\ & x_1 + 2x_2 & + s_2 & & = 10 \\ & -x_2 & & +s_3 & = -2 \\ & x_1, x_2, & s_1, s_2, & s_3 & \geq 0 \end{array}$$

Forme standard

À partir de tout PL sous forme normale, on peut construire un PL sous forme standard

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j (j = 1, \ldots, m)$$
$$x_i \geq 0 (i = 1, \ldots, n)$$

$$\max z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + s_j = b_j (j = 1, \ldots, m)$$
$$x_i \geq 0 (i = 1, \ldots, n)$$
$$s_j \geq 0 (i = 1, \ldots, m)$$

Interprétation de la forme standard

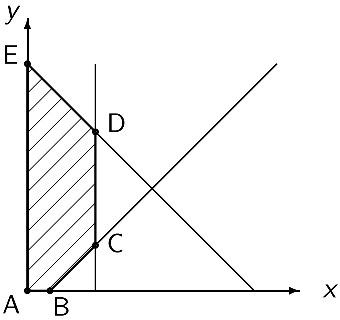
Les variables supplémentaires s_i sont appelées **variables d'écart**. Chaque variable d'écart est associée à une contrainte.

$$\begin{aligned} \max 5x + y & \\ x + y &\leq 10 \\ x - y &\leq 1 \\ x &\leq 3 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{array}{lllll} \max 5x + y & & & & \\ x + y & +s_1 & & & = 10 \\ x - y & & + s_2 & & = 1 \\ x & & & +s_3 & = 3 \\ x, y, & s_1, s_2, & & s_3 & \geq 0 \end{array}$$

Quand $s_1 = 0$, la contrainte $x + x \leq 10$ est vérifiée à l'égalité.

Forme standard et points extrêmes

$$\max 5x + y$$
$$x + y + s_1 = 10$$
$$x - y + s_2 = 1$$
$$x + s_3 = 3$$
$$x, y, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

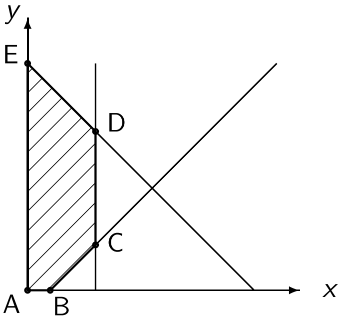


Points extrêmes : intersection d'hyperplans (contraintes)

$x = 0, y = 0$: A
$x = 0, s_2 = 0$: B
$s_2 = 0, s_3 = 0$: C
$s_1 = 0, s_3 = 0$: D
$y = 0, s_1 = 0$: E

Interprétation de la forme standard

$$\max 5x + y$$
$$x + y + s_1 = 10$$
$$x - y + s_2 = 1$$
$$x + s_3 = 3$$
$$x, y, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$



Si on annule s_2 et s_3, il reste ce système qui a pour solution $x = 3, y = 3, s_1 = 4$

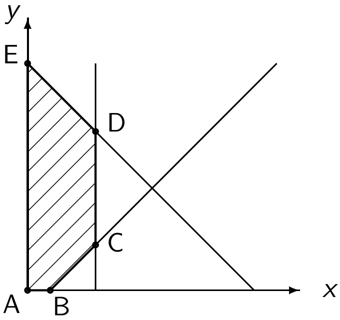
$$x + y + s_1 = 10$$
$$x - y = 0$$
$$x = 3$$
$$(x, y, s_1 \geq 0)$$

Sommets = bases

- On dispose d'un PL à $n + m$ variables et m contraintes.
- Si on annule n variables, on obtient un système de m équations à m inconnues
- Si la matrice associée est de rang m (base), le système admet une solution unique
- Une base = une solution
- Pour résoudre le problème obtenu : pivot de Gauss !
- Attention : si la solution n'a pas des valeurs positives, elle n'est pas valide !

Base non réalisable

$$\max 5x + y$$
$$x + y + s_1 = 10$$
$$x - y + s_2 = 1$$
$$x + s_3 = 3$$
$$x, y, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$



$y = 0,\ s_1 = 0$
Solution $x = 10,\ s2 = -9,$
$s_3 = -3,$ non valide !

$$x = 10$$
$$x + s_2 = 1$$
$$x + s_3 = 3$$
$$(x, s_2, s_3 \geq 0)$$

Idée de résolution

- Si on a une base réalisable, on a un point extrême = une solution dominante
- Pour calculer les valeurs des variables pour ces points : pivot de Gauss

Il reste à voir

- comment trouver une première base réalisable
- comment passer d'une base réalisable à une autre

Sommaire

Bilan

À travailler en TD

- Modélisation linéaire d'un problème
- Mise sous forme normale
- Résolution graphique
- Mise sous forme standard

À retenir pour la suite

- Solution, polyèdre convexe, point extrême

Prochain cours

- Méthode pour résoudre les problèmes linéaires : le simplex